

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ  
В СТЕНКАХ ЦИЛИНДРОВ И ПОРШНЕЙ  
ДВИГАТЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕГО  
СГОРАНИЯ**  
(сообщение третье)

Я. Л. ГОФЛИН

Во втором сообщении в результате различных преобразований было получено следующее выражение для  $w(r, z, t)$ :

$$w(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(\alpha_n^2 + \beta_k^2)} \cdot \frac{\int_0^1 f(z) Z(\beta_k z) dz \cdot Z(\beta_k z) e^{-a^2(\alpha_n^2 + \beta_k^2)t}}{\int_0^1 z^2 (\beta_k z) dz \cdot \frac{2}{\pi^2 \alpha_n^2} \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)} \cdot \left\{ -\frac{2}{\alpha_n \pi V \frac{r_1 \cdot r_1}{r_1 \cdot r_1}} \text{Sin} [\alpha_n (r - r_1)] \right\}.$$

Так как в этом выражении

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 f(z) Z(\beta_k z) dz}{\int_0^1 z^2 (\beta_k z) dz} \cdot Z(\beta_k z) = f(z),$$

ибо выражение под знаком суммы есть разложение по ортогональным и нормированным функциям:

$$\frac{Z(\beta_k z)}{\sqrt{\int_0^1 Z(\beta_k z) dz}};$$

кроме того, значениями  $\beta_k \ll \alpha_n$  можно без большой погрешности в написанном выше выражении  $w(r, z, t)$  пренебречь  $\beta_k$  по сравнению с  $\alpha_n$ .

Для доказательства этого были определены численные значения  $\alpha_n$  и  $\beta_k$ .

Этот вывод позволяет после дифференцирования по времени искомого интеграла задачи 11 —  $w(r, z, t)$ , допуская незначительную погрешность, пренебречь множителем  $e^{-a^2 \beta_k^2 (t-\lambda)}$  в подинтегральной функции, что приведет к незначительному увеличению ее, так как показатель степени указанного выше множителя отрицательный.

Учитывая все изложенное, переходим к следующему этапу в опре-

делении температурного поля при переменной температуре на поверхности. Применяем метод Дюамеля, позволяющий свести задачу по определению температуры тела, когда температура на поверхности тела изменяется со временем, к задаче с постоянной температурой на поверхности. В основе метода Дюамеля лежит следующая теорема (по Карслоу):

«Допустим, что  $V = F(x, y, z, \lambda, t)$  — температура в момент времени  $t$  в точке  $(x, y, z)$  твердого тела, начальная температура которого равна нулю, а температура на поверхности равна  $\varphi(x, y, z, \lambda)$ . Решение задачи, если начальная температура равна нулю, а температура на поверхности равна  $\varphi(x, y, z, t)$ , дается тогда выражением:

$$V = \int_0^t \frac{d}{dt} F(x, y, z, \lambda, t - \lambda) d\lambda.$$

#### Доказательство

Когда температура на поверхности равна нулю от  $t = -\infty$  до  $t = 0$  и равна  $\varphi(x, y, z, \lambda)$  от  $t = 0$  до  $t = t$ , мы можем сказать, что начальная температура равна нулю и температура на поверхности равна  $\varphi(x, y, z, \lambda)$ , так что температура в момент времени  $t$  выразится:  $V = F(x, y, z, \lambda, t)$  при  $t > 0$ . Поэтому, когда температура на поверхности равна нулю от  $t = -\infty$  до  $t = \lambda$  и равна  $\varphi(x, y, z, \lambda)$  от  $t = \lambda$  до  $t = t$ , имеем:

$$V = F(x, y, z, \lambda, t - \lambda) \text{ при } t > \lambda.$$

Когда температура на поверхности равна нулю от  $t = -\infty$  до  $t = \lambda + d\lambda$  и  $\varphi(x, y, z, \lambda)$  от  $t = \lambda + d\lambda$  до  $t = t$ , имеем:

$$V = F(x, y, z, \lambda, t - \lambda - d\lambda) \text{ при } t > \lambda + d\lambda;$$

отсюда следует, что если температура на поверхности равна нулю от  $t = -\infty$  до  $t = \lambda$ ,  $\varphi(x, y, z, \lambda)$  от  $t = \lambda$  до  $t = \lambda + d\lambda$  и нулю от  $t = \lambda + d\lambda$  до  $t = t$ , то мы имеем:  $V = F(x, y, z, \lambda, t - \lambda) - F(x, y, z, \lambda, t - \lambda - d\lambda)$  или, так как  $\epsilon = dF - \Delta F$  есть бесконечно малая более высокого порядка, чем  $dF$  и  $\Delta F$ , то можно принять при вычислении малых приращений функции  $\Delta F = dF$  и, следовательно:

$$V = \frac{d}{dt} F(x, y, z, \lambda, t - \lambda) d\lambda.$$

Таким образом, разбивая интервал от  $t = 0$  до  $t = t$  на малые интервалы и суммируя полученные результаты, мы находим решение задачи, когда температура на поверхности равна  $\varphi(x, y, z, t)$  в форме:

$$V = \int_0^t \frac{d}{dt} F(x, y, z, \lambda, t - \lambda) d\lambda \text{ »}.$$

Пользуясь этим методом для определения температуры в стенках цилиндра двигателя при нестационарном режиме, получаем:

$$V(r, z, t) = \int_0^t \frac{d}{dt} w(r, z, \lambda, t - \lambda) d\lambda,$$

$$\text{так как } \frac{d}{dt} U(r, z) = 0.$$

$$\int_0^t \frac{d}{dt} w(r, z, \lambda, t - \lambda) d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(\alpha_n^2 + \beta_k^2)} \cdot \frac{\pi^2 \alpha_n^2}{2} \left\{ -\frac{2}{\alpha_n \pi \sqrt{r \cdot r_1}} \right\} \times$$

$$\times \sin[\alpha_n(r - r_1)] \frac{\int_0^1 f(z) Z(\beta_k \cdot z) dz}{\int_0^1 z^2(\beta_k z) dz} \left[ -a^2(\alpha_n^2 + \beta_k^2) \right] \times$$

$$\times \int_0^t e^{-a^2(\alpha_n^2 + \beta_k^2)(t - \lambda)} d\lambda = \frac{2a^2}{V \sqrt{r \cdot r_1} \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)} \int_0^t \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 f(z) Z(\beta_k z) dz}{\int_0^1 z^2(\beta_k z) dz} \cdot \frac{Z(\beta_k z)}{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin[\alpha_n(r - r_1)]} e^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda - t)} \right\}$$

$$\cdot d\lambda = \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} f(z) \frac{2a^2}{\left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) V \sqrt{r \cdot r_1}} \cdot \alpha_n \sin[\alpha_n(r - r_1)] e^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda - t)} d\lambda.$$

В этом выводе были реализованы замечания, сделанные в начале статьи.

Переходим к дальнейшим преобразованиям. В общем решении можно изменить порядок суммирования и интегрирования. Тогда полученное выражение примет вид:

$$V = \int_0^t \frac{2a^2}{\left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)} f(z) \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin[\alpha_n(r - r_1)] e^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda - t)} d\lambda.$$

Приближенно можно заменить сумму интегралом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin[\alpha_n(r - r_1)] e^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda - t)} \approx \int_1^{\infty} \alpha_n \sin[\alpha_n(r - r_1)] e^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda - t)} dn.$$

Этот интеграл мы заменим интегралом от 0 до  $\infty$ , что изменит его величину незначительно ввиду малости первых членов. Таким образом, задача сводится к вычислению интеграла типа:

$$\left| \begin{aligned} (c) &= \int_0^{\infty} e^{-b\alpha^2} \alpha \sin C \alpha d\alpha = -\frac{1}{2b} \int_0^{\infty} \left( e^{-b\alpha^2} \right) \sin \alpha d\alpha = \\ &= \frac{C}{2b} \int_0^{\infty} e^{-b\alpha^2} \cos C \alpha d\alpha = \frac{C \sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} \cdot e^{-\frac{C^2}{4b}}. \end{aligned} \right.$$

Возвращаясь к общему решению и полагая:

$$b = a^2 \left( \frac{\pi}{r_2 - r_1} \right)^2 (t - \lambda),$$

$$C = \frac{\pi}{r_2 - r_1} (r - r_1), \quad a = n,$$

получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{Sin} [\alpha_n (r-r_1)] l^{a^2 \alpha_n^2 (\lambda-t)} \approx \\ & \approx \int_0^{\infty} \alpha_n \operatorname{Sin} [\alpha_n (r-r_1)] l^{-a^2 \alpha_n^2 (t-\lambda)} dn = \\ & = \frac{\pi}{r_2-r_1} \int_0^{\infty} n \operatorname{Sin} \left[ \frac{\pi n}{r_2-r_1} (r-r_1) \right] l^{-a^2 \left( \frac{\pi n}{r_2-r_1} \right)^2 (t-\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

Заменяя переменную интегрирования, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{r_2-r_1} \int_0^{\infty} \alpha \operatorname{Sin} (C\alpha) l^{-b\alpha^2} d\alpha &= \frac{\pi}{r_2-r_1} \left| (c) = \frac{\pi}{r_2-r_1} \cdot \frac{C \sqrt{\pi}}{4b^{3/2}} l^{-\frac{c^2}{4b}} = \right. \\ &= \frac{\pi}{r_2-r_1} \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \pi (r-r_1) \cdot (r_2-r_1)^3}{(r_2-r_1) \cdot 4a^3 \pi^3 (t-\lambda)^{3/2}} \cdot l^{-\frac{\pi^2 (r-r_1)^2 \cdot (r_2-r_1)^2}{4 (r_2-r_1)^2 a^2 \pi^2 (t-\lambda)}} = \\ &= \frac{(r_2-r_1) (r-r_1)}{4a^3 \sqrt{\pi} (t-\lambda)^{3/2}} \cdot l^{-\frac{(r-r_1)^2}{4a^2 (t-\lambda)}}. \end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в наше решение, имеем:

$$\begin{aligned} W(r, z, t) &= \frac{2a^2 (r_2-r_1) (r-r_1)}{\left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} 4a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t f(z) l^{\frac{-(r-r_1)^2}{4a^2 (t-\lambda)}} d\lambda = \\ &= \frac{r_1 (r-r_1)}{2a \sqrt{\pi r r_1}} \int_0^t \frac{fz}{(t-\lambda)^{3/2}} \cdot l^{-\frac{(r-r_1)^2}{4a^2 (t-\lambda)}} d\lambda. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\frac{r-r_1}{2a \sqrt{t-\lambda}} = \mu, \text{ тогда } t-\lambda = \frac{(r-r_1)^2}{4a^2 \mu^2} \dots (A)$$

$$\text{при } \lambda=0, \mu = \frac{r-r_1}{2a \sqrt{t}} \text{ при } \lambda=t, \mu = \infty.$$

Дифференцируя обе части тождества (A), получаем:

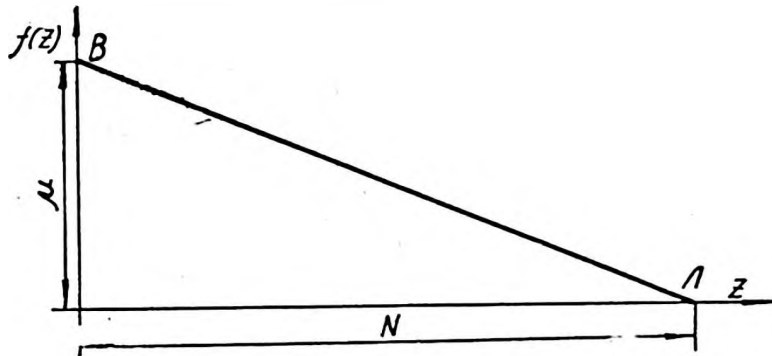
$$\begin{aligned} -d\lambda &= -\frac{2(r-r_1)^2}{4a^2 \mu^3} d\mu = -\frac{(r-r_1)^2}{2a^2 \mu^3} d\mu \\ \int_0^t l^{\frac{-(r-r_1)^2}{4a^2 (t-\lambda)}} d\lambda &= \int_{\frac{r-r_1}{2a \sqrt{t}}}^{\infty} l^{-\mu^2} \cdot \frac{(2a\mu)^3}{(r-r_1)^3} \cdot \frac{(r-r_1)^2}{2a^2 \mu^3} d\mu = \end{aligned}$$

$$= \int_{\frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} 1 - \frac{4a}{(r-r_1)} \mu^{-2} d\mu = \frac{4a}{(r-r_1)} \left[ \int_0^{\infty} 1 - \mu^2 d\mu - \int_0^{\frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}} 1 - \mu^2 d\mu \right] =$$

$$= \frac{4a}{r-r_1} \left[ \frac{V\pi}{2} - \left( b - \frac{b^3}{1 \cdot 3} + \frac{b^5}{2 \cdot 5} - \frac{b^7}{3 \cdot 7} + \dots \right) \right],$$

где  $b = \frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}$ .

Принимаем изменение температуры на внутренней поверхности цилиндра двигателя (по длине его от в. м. т. до н. м. т.) по линейному закону:  $f(z) = U(r_1, z) = \mu - \frac{\mu}{N} Z$ ,



$$\frac{z}{N} + \frac{f(z)}{\mu} = 1, \text{ отсюда } f(z) = \mu - \frac{\mu}{N} Z.$$

Температура на стенке цилиндра двигателя в камере сгорания во время горения топлива будет наивысшей. В приведенном выше графике это, очевидно, будет около точки В, затем температура падает по линейному закону.

В наших расчетах мы должны исходить из наивысшей температуры на внутренней поверхности цилиндра двигателя:  $f(z) = M$ . Внося в выражение  $W(r, z, t)$  полученное значение определенного интеграла (от 0 до  $t$ ) и значение  $f(z)$ , получаем:

$$W(r, z, t) = \frac{r_1(r-r_1)}{2a\sqrt{\pi r r_1}} \cdot \frac{4a}{r-r_1} \mu \left[ \frac{V\pi}{2} - b + \frac{b^3}{1 \cdot 3} - \frac{b^5}{2 \cdot 5} + \dots \right] =$$

$$= 1,13 \mu \sqrt{\frac{r_1}{r}} \left[ \frac{V\pi}{2} - \frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}} + \frac{\left(\frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}\right)^3}{1 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}\right)^5}{2 \cdot 5} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left(\frac{r-r_1}{2a\sqrt{t}}\right)^7}{3 \cdot 7} - \dots \right].$$

В написанном выше выражении знакпеременного ряда общий вид  $n^{\text{го}}$  члена:

$$\frac{b^{2n-1}}{(n-1)!(2n-1)},$$

общий вид  $(n+1)^{\text{го}}$  члена:

$$\frac{b^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

А отношение  $(n+1)^{\text{го}}$  члена к  $n^{\text{му}}$  равно:

$$\frac{b^{2n+1}}{n!(2n+1)} \cdot \frac{(n-1)!(2n-1)}{b^{2n-1}} = \frac{(2n-1)b^2}{(2n+1)n}.$$

Ряд будет сходящийся, так как:

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2(n-1)b^2}{(2n+1)n} < \frac{b^2}{n}$$

стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  для всех конечных значений „ $b$ “.