

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Н.П. Кидяева, З.И. Каньшина

РЯДЫ

*Учебное пособие по математике
для студентов инженерно-технических и экономических
направлений подготовки бакалавров всех форм обучения*

Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014

УДК 51(075)

ББК 22.171

Кидяева, Н.П. Ряды: учебное пособие / сост.: Н.П. Кидяева З.И. Каньшина. – Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 62 с.

Учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический материал по теме «Ряды», образцы основных типовых задач, задачи для практических занятий и задания для самостоятельной работы студентов.

Предлагаемое учебно-методическое пособие разработано Учебное пособие по дисциплине «Высшая математика» для студентов инженерно-технических и экономических направлений подготовки бакалавров всех форм обучения.

Рецензент – Л.В. Козлова, канд.техн.наук, доцент, заведующая кафедрой общетехнических дисциплин

Рекомендовано к изданию методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета (Протокол №9 от 2 июня 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2014

Предисловие

Учебно-методическое пособие по теме «Ряды» предназначено для студентов инженерно-технических и экономических направлений бакалавриата как очной, так и заочной форм обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано на практических занятиях и при самостоятельном изучении материала в объёме программы по высшей математике.

Учебно-методическое пособие содержит 7 параграфов. Первый и второй параграфы рассматривают числовые знакоположительные ряды и их признаки сходимости. Третий параграф посвящён знакопеременному ряду, его признаку сходимости, абсолютной и условной сходимости рядов. В параграфах с четвёртого по шестой рассматриваются понятия степенного ряда, разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Седьмой параграф посвящён рядам Фурье.

Каждый параграф состоит из: краткой теоретической части; образцов решений типовых задач; заданий для практических занятий; заданий для самостоятельной работы студентов.

В конце даны ответы к решениям практических заданий и самостоятельной работы студентов. А также представлена история развития теории рядов.

§1. Числовые ряды

Основные понятия.

Необходимое условие сходимости ряда

Пусть дана числовая последовательность $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n, \dots$

Определение 1. Выражение вида $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n$ (1)

называется числовым рядом или просто рядом.

Числа U_1, U_2, U_3, \dots называются членами ряда, U_n – общим членом ряда.

Сумма первых n членов ряда (1) называется n – ой частичной суммой ряда и обозначается через S_n , т.е. $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.

Определение 2. Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то ряд (1) называется

сходящимся, а число S – суммой этого ряда.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд (1) называется расходящимся.

Теорема 1.(необходимое условие сходимости ряда)

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю,

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Замечание 1. Указанный признак не является достаточным, т.е. если $U_n \rightarrow 0$,

то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, ряд может быть сходящимся или расходящимся.

Замечание 2. Если же для некоторого ряда $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$ или этот предел не

существует, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

Пример 1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему

$$\text{члену } U_n = \frac{3 \cdot n - 2}{n^2 + 1}.$$

Решение

Если $n = 1$, то $U_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

Если $n=2$, то $U_2 = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

Если $n=3$, то $U_3 = \frac{3 \cdot 3 - 2}{3^2 + 1} = \frac{7}{10}$.

Если $n=4$, то $U_4 = \frac{3 \cdot 4 - 2}{4^2 + 1} = \frac{10}{17}$.

Если $n=5$, то $U_5 = \frac{3 \cdot 5 - 2}{5^2 + 1} = \frac{13}{26}$.

Ряд можно записать в виде: $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{13}{26} + \dots$

Ответ: $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{13}{26} + \dots$

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$

Решение

Числа, стоящие в числителях дробей $\frac{a_n}{b_n}$ образуют арифметическую прогрессию $1, 3, 5, 7, \dots$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ вычисляется n -й член этой прогрессии. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n - 1$.

Числа, стоящие в знаменателях дробей $\frac{a_n}{b_n}$ образуют геометрическую прогрессию, n -й член которой $b_n = 2^n$. Следовательно, общий член ряда

$$U_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

Ответ: $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Пример 3. Проверить выполняется ли необходимое условие сходимости

ряда: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$

Решение

Находим общий член ряда $U_n = \frac{1}{2n-1}$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, то необходимое условие сходимости ряда выполняется.

Пример 4. Проверить выполняется ли необходимое условие сходимости

$$\text{ряда: } \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \dots$$

Решение

Находим общий член ряда $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$.

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$, то необходимое условие сходимости ряда не

выполняется, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Практические задания

Задание 1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену.

$$1) U_n = \frac{1}{3n+2};$$

$$2) U_n = \frac{1}{(5n-2) \cdot 2^{n-1}};$$

$$3) U_n = \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n-1)};$$

$$4) U_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2+1};$$

$$5) U_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{2^n};$$

$$6) U_n = \frac{2n-1}{(3+(-1)^n)^n};$$

$$7) U_n = \frac{3^n}{n!};$$

$$8) U_n = \frac{2+(-1)^n}{(5n-2)^n}.$$

Задание 2. Найти общий член ряда.

$$1) \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{21} + \frac{25}{243} + \dots;$$

$$2) \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \dots;$$

$$3) \frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots;$$

$$4) 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots;$$

$$5) \frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \dots;$$

$$6) 2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{6} - \frac{16}{24} + \frac{32}{120} - \dots;$$

$$7) 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \dots;$$

$$8) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \frac{1}{7 \cdot 4^7} + \dots$$

Задание 3. Проверить выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

- | | |
|--|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3}{4n^3}$; | 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4 - 3}{(n^2 + 1)^2}$; |
| 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$; | 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 5}$; |
| 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2 + 2}{n^2 - 3}$; | 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n + 2}$. |

Самостоятельная работа

Задание 1. Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену.

- | | |
|--|---|
| 1) $U_n = \frac{n+1}{n}$; | 2) $U_n = \frac{-1+2^n}{2^n}$; |
| 3) $U_n = \frac{(n+1)!}{5^n}$; | 4) $U_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$; |
| 5) $U_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2n-1}{n \cdot (n+1)}$; | 6) $U_n = (-1)^n \cdot \frac{2^{n-1}}{(3n+2)!}$. |

Задание 2. Найти общий член ряда.

- | | |
|---|--|
| 1) $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \frac{5}{625} + \dots$; | 2) $\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots$; |
| 3) $-\frac{1}{11} + \frac{2}{101} - \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} - \dots$; | 4) $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{3}{45} + \frac{4}{135} + \dots$. |

Задание 3. Проверить выполняется ли необходимое условие сходимости ряда

- | | |
|---|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; | 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3n-1}{2n+3}$; |
| 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n-1}}$; | 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$. |

§ 2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Определение: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ называется знакоположительным, если его члены неотрицательные числа.

2.1 Признаки сравнения

Теорема 1. Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots \quad (1)$$

$$V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n + \dots \quad (2),$$

причём $U_n \leq V_n$.

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Теорема 2. Если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = k \neq 0$, то оба

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Для сравнения применяются ряды:

1. Гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходящийся ряд.}$$

2. Обобщенно гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ — } \begin{cases} \text{сходящийся, при } \alpha > 1, \\ \text{расходящийся, при } \alpha < 1. \end{cases}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ — $\begin{cases} \text{сходящийся, при } |q| < 1, \\ \text{расходящийся, при } |q| > 1. \end{cases}$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n+1}$.

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — расходящийся.

Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n+1}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n}{4n+1} = \text{/по правилу Лопиталья/} = \frac{3}{4} \neq 0$.

Таким образом, по теореме 1 ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^3+n-1}$.

Решение

Сравним данный ряд с обобщенно гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который яв-

ляется сходящимся, т.к. $\alpha = 2 > 1$.

Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^3+n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n) \cdot n^2}{n^3+n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n^3}{n^3+n-1} = \text{/по правилу Лопиталья/} = -1 \neq 0$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^3+n-1}$ – сходящийся.

Ответ: ряд сходящийся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{3n+1}$.

Решение

Сравним данный ряд с обобщенно-гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}$ – расходя-

щийся, т.к. $\alpha = -1$.

Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3n + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2) \cdot 3}{(3n + 1) \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 6}{3n^2 + n} =$ /по правилу Лопиталя/ $= 1 \neq 0$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{3n + 1}$ – расходящийся.

Ответ: ряд расходящийся.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$.

Решение

Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ – сходящийся, т.к. $q = \frac{1}{2} < 1$.

1 способ: для сравнения используем теорему 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{19} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Имеем $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{11} < \frac{1}{8}$; ...

Следовательно, по теореме 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$ – сходящийся.

2 способ: для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{ – сходящийся.}$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n + 3} =$ /по правилу Лопиталя/ $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{2^n \cdot \ln 2} = 1 \neq 0$.

Следовательно, по теореме 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$ – сходящийся.

Ответ: ряд сходящийся.

2.2 Признак Даламбера

Теорема 3. Если для ряда с положительными членами существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \begin{cases} \text{сходится, при } \ell < 1, \\ \text{расходится, при } \ell > 1. \end{cases}$$

Замечания: 1) Если $\ell = 1$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, требуется исследовать ряд с помощью других методов.

2) Если $\ell = \infty$, то ряд расходится.

3) Признак Даламбера удобно применять тогда когда общий член ряда содержит знак факториала (!).

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n.$$

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} + \dots + \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}} + \dots$

Решение

По условию имеем $U_n = \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$. Составим $U_{n+1} = \frac{2 \cdot (n+1) - 1}{\sqrt{2^{n+1}}}$.

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2-1) \cdot \sqrt{2^n}}{\sqrt{2^{n+1}} \cdot (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot \sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n} \cdot \sqrt{2} \cdot (2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$.

Решение

По условию имеем $U_n = \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$. Составим $U_{n+1} = \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 5^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot 5 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot 5^n \cdot n!} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n =$$

$$= 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{-1} = 5 \cdot e^{-1} = \frac{5}{e} > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{n!}$.

Решение

По условию имеем $U_n = \frac{5^n + 2^n}{n!}$. Составим $U_{n+1} = \frac{5^{n+1} + 2^{n+1}}{(n+1)!}$.

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^{n+1} + 2^{n+1}) \cdot n!}{(n+1)! (5^n + 2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^n \cdot 5 + 2^n \cdot 2) \cdot n!}{n! (n+1) \cdot (5^n + 2^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot \left(5 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{(n+1) \cdot 5^n \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n}{(n+1) \cdot \left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = 0, \text{ т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0, \text{ а величина } (n+1) \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку, $\ell = 0 < 1$, то ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

2.3 Признак Коши

Теорема 4. Если для ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell, \text{ то ряд } \sum_{n=1}^{\infty} U_n - \begin{cases} \text{сходится, при } \ell < 1, \\ \text{расходится, при } \ell > 1. \end{cases}$$

Замечания: 1) Если $\ell = 1$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, требуется исследовать ряд с помощью других методов.

2) Если $\ell = \infty$, то ряд расходится.

3) Признак Коши удобно применять тогда, когда из общего члена ряда легко извлекается корень n -ой степени.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}$.

Решение

$$\text{Имеем } U_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}.$$

По признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^3 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n}\right)^3 = 2^3 = 8 > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Решение

Имеем $U_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

По признаку Коши

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Ответ: ряд сходится.

2.4 Интегральный признак Коши

Теорема 5. Пусть дан ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$,

члены которого являются значениями некоторой функции $f(x)$,

положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале

$[1, +\infty)$. Тогда если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$;

если же $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ также расходится.

Пример 10. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

Решение

Имеем $U_n = \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b (3x-2)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \int_1^b (3x-2)^{-\frac{1}{2}} d(3x-2) = \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{(3x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right|_1^b =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{3x-2} \Big|_1^b = \frac{2}{3} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \sqrt{3b-2} - \lim_{b \rightarrow +\infty} 1 \right) = \infty, \text{ т.к. несобственный интеграл}$$

расходится, то и заданный ряд тоже расходится.

Пример 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \ln^3(n+1)}$.

Решение

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \cdot \ln^3(x+1)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{d \ln(x+1)}{\ln^3(x+1)} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \ln^{-3}(x+1) d \ln(x+1) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{\ln^{-2}(x+1)}{-2} \right|_1^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{1}{\ln^2(x+1)} \right|_1^b = -\frac{1}{2} \left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2(b+1)} - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^2 2} \right) = -\frac{1}{2} \left(0 - \frac{1}{\ln^2 2} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2},$$

т.к. несобственный интеграл сходится, то и заданный ряд сходится.

Практические задания

Задание 4. Исследовать на сходимость ряды по признакам сравнения:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3}{5^n + 2}$; | 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 3}{3^n}$; |
| 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2-2}$; | 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; |
| 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$; | 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$; |
| 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5} \right)^n$; | 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$; |
| 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$; | 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$. |

Задание 5. Исследовать на сходимость ряды по признаку Даламбера:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)!}$; | 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$; |
|---|---|

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{n+3}};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1};$

8) $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 3n};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-5};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!2^{n+1}}.$

Задание 6. Исследовать на сходимость ряды по признаку Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(1+2n)^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n(n-1)};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{n} \right)^n;$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{2n+1} \right)^{n+1};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{3n+1}.$

Задание 7. Исследовать на сходимость ряды по интегральному признаку:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(3n+1)};$

3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{7+n^2};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5n+1}};$

7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2};$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}.$

Самостоятельная работа**Задание 4.** Исследовать на сходимость ряды по признакам сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2n^3-n-25};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot (3^n - 4)};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{2^n - 1};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 1}{9^n + 4}.$

Задание 5. Исследовать на сходимость ряды по признаку Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3^n \cdot n!};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n \cdot (n+1)};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 \cdot 2^{3n}};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^{n+1}};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n^3}{5^{\frac{n}{2}}}.$

Задание 6. Исследовать на сходимость ряды по признаку Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+4} \right)^n;$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n^2+5} \right)^n;$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1} \right)^{-2n^2};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n+2} \right)^{3n-2};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{n+1}.$

Задание 7. Исследовать на сходимость ряды по интегральному признаку:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 + 3};$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(3n+1)};$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2};$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^4};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1};$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2};$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^2}.$

§3. Знакопеременные ряды

3.1. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница

Определение: Ряд вида $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots + (-1)^{n+1} U_n + \dots$ называется знакопеременяющимся.

Теорема 6 (Признак Лейбница):

Знакопеременяющийся ряд называется сходящимся если:

1) члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, т.е. $|U_1| > |U_2| > |U_3| > \dots > |U_n| > \dots;$

2) общий член ряда стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0.$

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $-\frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n(n-1)} + \dots$

Решение

Данный ряд является знакопеременяющимся, поэтому исследуем его на сходимость по признаку Лейбница.

1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} > \frac{1}{20} > \frac{1}{30} > \dots;$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0.$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $3,1 - 3,01 + 3,001 - 3,0001 + \dots$

Решение

Ряд знакочередующийся с общим членом $U_n = (-1)^{n+1} \left(3 + \frac{1}{10^n} \right)$.

Применим признак Лейбница:

$$1) 3,1 > 3,01 > 3,001 > 3,0001 > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{10^n} \right) = 3 \neq 0.$$

Следовательно, данный ряд расходится.

3.2. Абсолютная и условная сходимость рядов

Определение: Ряды, члены которых имеют разные знаки, называются

$$\text{знакопеременными, т.е. } U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 + U_6 + U_7 + \dots \quad (1)$$

С каждым рядом (1) связан ряд с неотрицательными членами, составленный из абсолютных величин данного ряда, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$. (2)

Определение: Если ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Ряд (1) в этом случае называется абсолютно сходящимся.

Определение: Если ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится, то ряд (1) называется условно сходящимся.

Пример 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}.$$

Решение

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Ряд имеет вид: $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \dots$

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$ и исследуем его на сходимость по признаку Даламбера.

Имеем $U_n = \frac{1}{n!}$, составим $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \text{ следовательно, ряд сходится.}$$

Таким образом, исходный ряд сходится абсолютно.

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}.$$

Ряд имеет вид: $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \dots$

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{21} + \dots$ и исследуем его на сходимость по признаку сравнения.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходящийся.

Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

Проверим на сходимость исходный ряд по признаку Лейбница.

$$1) \ 1 > \frac{1}{5} > \frac{1}{9} > \frac{1}{13} > \frac{1}{17} > \frac{1}{21} > \dots$$

$$2) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4n-3} = 0, \text{ согласно признаку ряд является сходящимся.}$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$ – условно сходящийся.

Ответ: а) ряд сходится абсолютно; б) ряд условно сходящийся.

Практические задания

Задание 8: Исследовать ряды на сходимость (по признаку Лейбница).

$$1) \ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n};$$

$$2) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+2)};$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{n^2 + 1};$$

4)
$$\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \dots;$$

5)
$$\frac{2}{3} - \frac{4}{8} + \frac{8}{15} - \dots;$$

6)
$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots;$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!};$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{2n+1}.$$

Задание 9: Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

1)
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots;$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n^2 - 1}{5 + 2n^2};$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n};$$

4)
$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \dots;$$

5)
$$\frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} - \frac{1}{8^3} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{(2n)^3} + \dots$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}};$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(2n+1)^2};$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n-2}{(2n+1)!};$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^n}{(2n+1)^n};$$

10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n \cdot (n+1)};$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!};$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{2^{4n-1}}.$$

Самостоятельная работа

Задание 8: Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость.

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(3n-1)!};$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n;$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n+1}}{2n^2 + 3};$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}}{(4n-1)!};$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2};$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt[3]{n+1}}{2n+5};$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{2^{3n-2}}{(3n-1)!};$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(3n-1)}{(4n+3) \cdot \sqrt{n+2}};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{2n^2-1};$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{(3n-1)^3}.$$

§4. Степенные ряды

Определение: Ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ (4.1)

называется **степенным рядом**.

Числа $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ называются коэффициентами степенного ряда.

Часто рассматриваются степенные ряды более общего вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (4.2)$$

частным случаем, которых при $a=0$ являются обычные степенные ряды (4.1). С другой стороны, каждый степенной ряд вида (4.2) с помощью замены переменной $y = x - a$ сводится к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ вида (4.1).

Интервалом сходимости действительного степенного ряда вида (4.1) (соответственно, вида (4.2)) называется такой интервал $(-R; R)$ (соответственно, $(a_0 - R; a_0 + R)$), что в каждой его точке ряд сходится **абсолютно**, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[-R; R]$ (соответственно, $[a_0 - R; a_0 + R]$), ряд расходится. На границах интервала сходимости, т.е. в точках $x = \pm R$ (соответственно, в точках $x = a_0 \pm R$), ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R называется **радиусом сходимости** действительного степенного ряда.

В частности, R может равняться нулю – в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно, a_0), или $+\infty$ – в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется еще **всюду сходящимся**).

Интервал сходимости ряда, как правило, определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, применённых к знакоположительному

ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ (соответственно, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|$), составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются также формулы:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad (4.3)$$

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (4.4)$$

в тех случаях, когда указанные пределы существуют.

Нахождение области сходимости степенного ряда

1. Найдем радиус сходимости степенного ряда по формулам (4.3) или признаку Даламбера. Определяем интервал сходимости.
2. Если $R \neq 0$ и $R \neq \infty$, проверяем поведение ряда на концах интервала.
3. Записываем ответ.

Пример 1: Найти область сходимости рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n!};$$

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)! (x+7)^n;$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^n}{3^n \sqrt[4]{n}};$$

$$\text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

Решение

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n!}$$

Найдем радиус сходимости.

$$\text{Имеем: } a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}.$$

$$\text{Составим: } a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{(-1)^n \cdot (-1)}{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}{2^n \cdot n! \cdot (-1)^n \cdot (-1)} \right| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Т.к. $R = \infty$, то областью сходимости ряда является вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

$$\text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)!(x+7)^n$$

Решаем аналогично примеру а)

Пусть $x+7=t$, получили ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)! \cdot t^n$.

Найдем радиус сходимости.

Имеем: $a_n = (2n+3)!$.

Составим: $a_{n+1} = (2n+5)!$.

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+5)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+3)!(2n+4) \cdot (2n+5)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+4) \cdot (2n+5)} = 0.$$

Т.к. $R=0$, то $t=0$.

Отсюда $x+7=0 \Rightarrow x=-7$.

Ответ: $x=-7$ — точка сходимости ряда.

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot x^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}}$$

1) Найдем радиус сходимости.

$$\text{Имеем: } a_n = \frac{9^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \frac{3^n}{\sqrt[4]{n}}.$$

$$\text{Составим: } a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt[4]{n+1}} = \frac{9^n \cdot 9}{3^n \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n} \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n} \cdot 3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{3}.$$

Получили интервал сходимости $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

2) Проверяем поведение ряда на концах интервала.

При $x = -\frac{1}{3}$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot (-1)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} = -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots$$

Получили знакочередующийся ряд.

Иследуем его на сходимость по теореме Лейбница

$$\text{а) } 1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4}} > \dots$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$$

Т.к. оба условия выполняются, ряд в точке $x = -\frac{1}{3}$ сходится.

При $x = \frac{1}{3}$ ряд принимает вид:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ - обобщенно-гармонический ряд. Т.к. $\alpha = \frac{1}{4} < 1$, то ряд - расходящийся.

Отсюда следует, что в точке $x = \frac{1}{3}$ - ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Ответ: $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

$$\text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}$$

Для решения применим признак Даламбера.

$$\text{Имеем } U_n(x) = \frac{(-1)^n \cdot (x-4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}.$$

$$\text{Составим: } U_{n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (x-4)^{n+1}}{(2n+3) \cdot 3^{n+1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot (-1) \cdot (x-4)^n \cdot (x-4) \cdot (2n+1) \cdot 3^n}{(2n+3) \cdot 3^n \cdot 3 \cdot (-1)^n \cdot (x-4)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-4) \cdot (2n+1)}{3 \cdot (2n+3)} \right| =$$

$$= \left| \frac{x-4}{3} \right| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \left| \frac{x-4}{3} \right| < 1.$$

$$|x-4| < 3 \Rightarrow -3 < x-4 < 3 \Rightarrow 1 < x < 7.$$

Исследуем ряд на сходимость на концах интервала

При $x=1$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (1-4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-3)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots$$

Получили знакочередующийся ряд.

Исследуем его на сходимость по теореме Лейбница.

$$a) 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \dots$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Т.к. оба условия выполняются, ряд в точке $x=1$ сходится.

При $x=7$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (7-4)^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^n}{(2n+1) \cdot 3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots - \text{знакочередующийся}$$

ряд.

Исследуем ряд по теореме Лейбница

$$a) 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \frac{1}{9} > \dots$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Оба условия выполняются ряд в точке $x=7$ – сходится.

Итак, область сходимости ряда $[1; 7]$.

Ответ: $[1; 7]$

Практическое задание

Задание 10: Найти область сходимости рядов:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n+1}};$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^{2n+1} \cdot \sqrt[3]{4n+3}};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} 10^n \cdot x^n;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n;$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^{2n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1) \cdot 2^n};$$

7)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (x+1)^n}{4n^2 + 3};$$

8)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(3n+2) \cdot \sqrt{n+1}};$$

9)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^2}{9^{2n+1}};$$

10)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+2) \cdot 5^n};$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{3^{n^2}} \cdot (x-1)^n;$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}};$$

13)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1} (x+2)^n}{3^{3n+1}};$$

14)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-5)^n}{\sqrt[4]{3n+2}};$$

15)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(2n+1)!};$$

16)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{2n+3}}.$$

Самостоятельная работа

Задание 9. Найти область сходимости рядов:

1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2n-1}};$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n};$$

3)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)!};$$

4)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1) \cdot (x-4)^n}{5^{n+1}};$$

5)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{(3n+2)! \cdot (n+1)};$$

6)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{3n+1}};$$

7)
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n+1} \cdot (x+2)^n;$$

8)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n-1)^2};$$

9)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)!};$$

10)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot \sqrt{3n+1}}.$$

§5. Разложение функций в степенные ряды

Определение: Степенной ряд вида:

$$\varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!} \cdot (x-x_0) + \frac{\varphi''(x_0)}{2!} \cdot (x-x_0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \dots \quad (1)$$

где $x \neq 0$ - некоторое постоянное число, называется рядом Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ в окрестности точки x_0 .

Замечание 1: Если в ряде (1) $x_0 = 0$, то полученный ряд:

$$\varphi(x_0) + \frac{\varphi'(x_0)}{1!}x + \frac{\varphi''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{\varphi'''(0)}{3!}x^3 \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (2)$$

называется рядом Маклорена для бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора нужно:

- а) найти производные $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$;
- б) вычислить значения производных в точке x_0 ;
- в) написать ряд Тейлора для заданной функции и найти его интервал сходимости;
- г) найти интервал $(-R; R)$, в котором остаточный член ряда Тейлора $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Тейлора совпадают.

Замечание 2: В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Остаточный член имеет вид:

– для ряда Тейлора:

$$R_n(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } x_0 < c < x;$$

– для ряда Маклорена:

$$R_n(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}, \text{ где } 0 < c < x.$$

Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in \begin{cases} [-1;1], \text{ если } \alpha \geq 0, \\ (-1;1], \text{ если } -1 < \alpha < 0, \\ (-1;1), \text{ если } \alpha \leq -1; \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \in (-1;1);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1;1];$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1;1];$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, \quad x \in [-1;1];$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty);$$

$$\operatorname{ch} x = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Пример 1: Разложить функцию $\varphi(x) = e^{3x}$ в ряд по степеням $x+2$.

Решение

Из условия имеем: $x_0 = -2$.

1. Найдем производные данной функции

$$\varphi(x) = e^{3x}; \quad \varphi'(x) = 3e^{3x}; \quad \varphi''(x) = 3^2 e^{3x}; \quad \varphi'''(x) = 3^3 e^{3x}; \quad \varphi^{(4)}(x) = 3^4 e^{3x}; \dots; \quad \varphi^{(n)}(x) = 3^n e^{3x};$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = 3^{n+1} e^{3x}; \dots$$

2. Вычислим значение производных при $x_0 = -2$, т.е. найдем коэффициенты ряда Тейлора

$$\varphi(-2) = e^{-6}; \quad \varphi'(-2) = 3e^{-6}; \quad \varphi''(-2) = 3^2 e^{-6}; \quad \varphi'''(-2) = 3^3 e^{-6}; \quad \varphi^{(4)}(-2) = 3^4 e^{-6}; \dots;$$

$$\varphi^{(n)}(-2) = 3^n e^{-6}; \dots$$

3. Подставляя найденные коэффициенты в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ получим ряд:}$$

$$e^{3x} = e^{-6} + \frac{3e^{-6}}{1!} \cdot (x+2) + \frac{3^2 e^{-6}}{2!} \cdot (x+2)^2 + \dots + \frac{3^n e^{-6}}{n!} \cdot (x+2)^n + \dots$$

4. Докажем, что полученный ряд сходится и его суммой является функция

$$\varphi(x) = e^{3x}.$$

Для этого покажем, что $R_n(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Составим остаточный член полученного ряда

$$R_n(x) = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \frac{3^{n+1} e^{3c}}{(n+1)!} \cdot (x+2)^{n+1}.$$

$$\text{Отсюда: } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot e^{3c}}{(n+1)!} \cdot (x+2)^{n+1} = e^{3c} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3(x+2))^{n+1}}{(n+1)!} = e^{3c} \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, по теореме о сходимости ряда Тейлора при любом значении x делаем вывод, что составленный ряд является рядом Тейлора для функции $\varphi(x) = e^{3x}$, т.е. имеем:

$$e^{3x} = e^{-6} + 3e^{-6} \cdot (x+2) + \frac{3^2 e^{-6}}{2!} \cdot (x+2)^2 + \dots + \frac{3^n e^{-6}}{n!} \cdot (x+2)^n + \dots$$

Пример 2. Написать ряд Тейлора для функции $f(x) = \ln(7+3x)$ в окрестности точки $x_0 = -2$ и исследовать его сходимость.

Решение

Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x_0) + \frac{f'(x)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - x_0)^n + \dots$$

Найдем производные данной функции и выведем выражение для n -ой производной:

$$f(x) = \ln(7+3x), \quad f'(x) = \frac{3}{7+3x} = 3 \cdot (7+3x)^{-1}, \quad f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot 3^2 \cdot (7+3x)^{-3}, \dots,$$

$$f^n(x) = (-1) \cdot (-2) \dots [-(n-1)] \cdot 3^n \cdot (7+3x)^{-n} = (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)! \cdot (7+3x)^{-n}.$$

Вычислим значения данной функции и ее производных в точке $x_0 = -2$ и напишем коэффициенты ряда Тейлора:

$$f(-2) = \ln 1 = 0, \quad f'(-2) = 3, \quad f''(-2) = -3^2 \cdot 1!, \quad f^{(n)}(-2) = (-1)^{n-1} \cdot 3^n \cdot (n-1)!, \dots$$

Подставляя найденные коэффициенты в ряд Маклорена

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \text{ получим ряд}$$

$$\begin{aligned} \ln(7+3x) &= 0 + \frac{3}{1!} \cdot (x+2) - \frac{3^2 \cdot 1!}{2!} \cdot (x+2)^2 + \frac{3^3 \cdot 2!}{3!} \cdot (x+2)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^n \cdot (n-1)!}{n!} \cdot (x+2)^n + \dots = \\ &= 0 + 3(x+2) - \frac{3^2}{2} \cdot (x+2)^2 + \frac{3^3}{3} \cdot (x+2)^3 - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{3^n}{n} \cdot (x+2)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{n} \cdot (x+2)^n \end{aligned}$$

Интервал сходимости найдем, применяя признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 3^{n+1} (x+2)^{n+1}}{n+1} : \frac{(-1)^{n-1} 3^n (x+2)^n}{n} \right| = 3|x+2| < 1.$$

$$\text{Имеем } |x+2| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}.$$

При $x = -\frac{7}{3}$ получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $x = -\frac{5}{3}$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Область сходимости данного ряда $\left(-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right]$.

Пример 3. Разложить данные функции в ряд Маклорена:

а) $f(x) = \ln(5+x)$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение

а) $f(x) = \ln(5+x)$

Данную функцию запишем в виде

$$\ln(5+x) = \ln 5 \cdot \left(1 + \frac{x}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1 + \frac{x}{5}\right).$$

Используем известное разложение

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1.$$

В этом разложении заменим x на $\frac{x}{5}$. Получим

$$\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right) = \frac{x}{5} - \frac{x^2}{5^2 \cdot 2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{5^n \cdot n} + \dots, \quad -1 < \frac{x}{5} \leq 1 \quad \text{или} \quad -5 < x \leq 5.$$

Следовательно, ряд Маклорена для данной функции

$$\ln(5+x) = \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{5^n \cdot n}, \quad -5 < x \leq 5.$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

Решение

Используем разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

где при $-1 < \alpha < 0$ ряд сходится в промежутке $-1 < x \leq 1$.

В этом разложении вместо x подставим x^3 , а вместо α подставим $-\frac{1}{2}$

Получим искомое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^9 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{3n} + \dots, \quad -1 < x^3 \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} x^{3n}, \quad -1 < x^3 \leq 1.$$

Практические задания

Задание 11. Разложить в ряд Тейлора функции:

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$,

по степеням $x+4$;

2) $f(x) = \frac{1}{x}$,

по степеням $x-1$;

3) $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$,

по степеням $x+1$;

4) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$,

по степеням $x+3$;

5) $f(x) = \sqrt{x^3}$,

по степеням $x-1$;

б) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$,

по степеням $x-2$;

7) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$,

по степеням $x+1$;

8) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

по степеням $x-2$;

9) $f(x) = 10^{2x}$,

по степеням $x+3$;

10) $f(x) = \ln(2x-1)$,

по степеням $x-3$.

Задание 12. Разложить в ряд Маклорена функции:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos \frac{x}{2};$

2) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+2x}};$

3) $f(x) = \frac{x - \arctg 2x}{2};$

4) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-4x};$

5) $f(x) = x \cdot \ln(1+x^2);$

6) $f(x) = \sin^2 x;$

7) $f(x) = \frac{1}{x^3+1};$

8) $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x};$

9) $f(x) = \frac{3}{4-x};$

10) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}.$

Самостоятельная работа

Задание 10. Разложить в ряд Тейлора функции:

1) $f(x) = \sqrt{x},$

2) $f(x) = \ln(1+5x),$

по степеням $x-4;$ по степеням $x-1;$

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 3,$

4) $f(x) = \frac{1}{x-4},$

по степеням $x+2;$ по степеням $x+2;$

5) $f(x) = 5^{2x+1},$

6) $f(x) = (3+e^{-x})^2,$

по степеням $x+2;$ по степеням $x-0.$

Задание 11. Разложить в ряд Маклорена функции:

1) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1-5x};$

2) $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x};$

3) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2};$

4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

5) $f(x) = \ln(1+2x^2);$

6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}.$

§6. Применение рядов в приближенных вычислениях

Степенные ряды могут быть использованы для приближенного вычисления значений различных функций, определенных интегралов и т.п.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Заменим в подынтегральном выражении e^x его разложением в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx &= \int_0^{0,1} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - 1}{x} dx = \int_0^{0,1} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x} dx = \\ &= \int_0^{0,1} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \dots \right) dx = \left(x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \dots \right) \Big|_0^{0,1} = 0,1 + \frac{0,1^2}{4} + \frac{0,1^3}{18} + \dots = \\ &= 0,1 + \frac{0,01}{4} + \frac{0,001}{18} + \frac{0,0001}{96} + \dots = 0,1 + 0,003 + 0,00006 + \dots \end{aligned}$$

Т.к. $0,00006 < 0,001$, то $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx \approx 0,1 + 0,003 = 0,103$.

Ответ: $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx \approx 0,103$.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Заменим подынтегральное выражение его разложением в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \\ \cos \frac{x^2}{4} &= 1 - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^8}{8!} - \dots \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^4}{4^2 \cdot 2!} + \frac{x^8}{4^4 \cdot 4!} - \frac{x^{12}}{4^6 \cdot 6!} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^5}{4^2 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{4^4 \cdot 9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{4^6 \cdot 13 \cdot 6!} + \dots \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{1}{2^9 \cdot 4^4 \cdot 9 \cdot 4!} - \dots = 0,5 - \frac{1}{2^{10} \cdot 5} + \frac{1}{2^{13} \cdot 3^3} - \dots = 0,5 - 0,0002 + 0,000005 - \dots \end{aligned}$$

Т.к. $0,0002 < 0,001$, то $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx \approx 0,5$.

Ответ: $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx \approx 0,5$

Пример 3. Вычислить $\sqrt[3]{500}$ с точностью до 0,001.

Решение

Представим $\sqrt[3]{500}$ в виде $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{512-12} = \sqrt[3]{512 \cdot \left(1 - \frac{12}{512}\right)} = 8 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{3}{128}} =$

$= 8 \cdot \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \left(1 + \frac{-3}{128}\right)^{\frac{1}{3}}$. Т.к. после проведенного преобразования $x = -\frac{3}{128}$

входит в область сходимости $(-1;1)$ биномиального ряда, то при $x = -\frac{3}{128}$,

$m = \frac{1}{3}$ получим

$$\sqrt[3]{500} = 8 \left(1 + \frac{-3}{128}\right)^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right) + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!} \left(-\frac{3}{128}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)^3 + \dots\right) =$$

$$= 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{128} - \frac{2 \cdot 3^2}{9 \cdot 2! \cdot 128^2} - \frac{10 \cdot 3^3}{27 \cdot 3! \cdot 128^3} + \dots\right) = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{128} - \frac{1}{128^2} - \frac{5}{3 \cdot 128^3} + \dots\right) =$$

$$= 8 \cdot (1 - 0,008 - 0,00006 - 0,0000008 + \dots)$$

Т.к. $0,00006 < 0,001$, то $\sqrt[3]{500} \approx 8 \cdot (1 - 0,008) = 7,936$.

Ответ: $\sqrt[3]{500} \approx 7,936$

Пример 4. Вычислить $\ln 1,8$ с точностью до 0,01.

Решение

Запишем ряд Маклорена для функции:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Т.к. $\ln 1,8 = \ln(1+0,8)$, то $x = 0,8$ входит в область сходимости ряда $(-1;1]$.

Подставляя значение $x = 0,8$ в ряд, получим:

$$\ln 1,8 = \ln(1+0,8) = 0,8 - \frac{0,8^2}{2} + \frac{0,8^3}{3} - \frac{0,8^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{0,8^{n+1}}{n+1} + \dots = 0,8 - 0,32 + 0,171 -$$

$$- 0,1024 + 0,0655 - 0,0437 + 0,02996 - 0,0209 + 0,0149 - 0,0107 + 0,0078 - \dots$$

Т.к. $0,0078 < 0,01$, то $\ln 1,8 \approx 0,58$.

Ответ: $\ln 1,8 \approx 0,58$.

Практические задания

Задание 13. Вычислить с точностью до δ .

1) $\int_0^{0,2} e^{-2x^3} dx$, $\delta = 0,001$;

2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, $\delta = 0,01$;

3) $\int_0^1 x \sin \frac{x^3}{2} dx$, $\delta = 0,001$;

4) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, $\delta = 0,001$;

5) $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x}) dx$, $\delta = 0,001$;

6) $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$, $\delta = 0,001$;

7) $\sqrt[6]{68}$, $\delta = 0,001$;

8) $\sqrt[10]{1027}$, $\delta = 0,0001$;

9) $\sqrt[3]{30}$, $\delta = 0,0001$;

10) $\sqrt[3]{0,98}$, $\delta = 0,0001$;

11) $\sqrt[8]{516}$, $\delta = 0,0001$;

12) $\sqrt[6]{10}$, $\delta = 0,0001$;

13) $\sin 9^\circ$, $\delta = 0,0001$;

14) $\cos 50^\circ$, $\delta = 0,001$;

15) $\operatorname{ctg} 35^\circ$, $\delta = 0,001$;

16) $\operatorname{tg} 14^\circ$, $\delta = 0,001$;

17) $\ln 0,6$, $\delta = 0,0001$;

18) $\ln 1,3$, $\delta = 0,001$.

Самостоятельная работа

Задание 12. Вычислить с точностью до δ .

1) $\cos 18^\circ$, $\delta = 0,0001$;

2) $\sin 27^\circ$, $\delta = 0,001$;

3) $\sqrt[4]{19}$, $\delta = 0,001$;

4) $\sqrt{2000}$, $\delta = 0,0001$;

5) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$, $\delta = 0,001$;

6) $\int_0^{0,5} \left(1 - \frac{\sin 2x}{x}\right) dx$, $\delta = 0,01$;

7) $\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x} \cos^2 x dx$, $\delta = 0,001$;

8) $\ln 1,4$, $\delta = 0,001$.

§7. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx \quad (n=1;2;\dots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx \quad (n=1;2;\dots).$$

Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье

Функцию $f(x)$ в каком-либо замкнутом интервале $[a, b]$ длины 2π можно представить в виде ряда Фурье, если:

- 1) во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$ заданная функция ограничена;
- 2) в замкнутом интервале $[a, b]$ заданная функция $f(x)$ изменяется монотонно или имеет конечное число максимумов и минимумов;
- 3) функция $f(x)$ непрерывна во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$, кроме, может быть, конечного числа его точек.

Эти условия носят название **условий Дирихле**.

Если x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то сумма ряда Фурье определит функцию, совпадающую в точках непрерывности с функцией $f(x)$ и равную $\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ в указанной точке разрыва первого рода.

Если функция $f(x)$ задана в сегменте $[-l, l]$, где l – произвольное число, то при выполнении на сегменте $[-l, l]$ условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Если $f(x)$ – **четная функция**, то её ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

причём

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = 0.$$

Если $f(x)$ – **нечётная функция**, то её ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где

$$a_0 = a_n = 0;$$

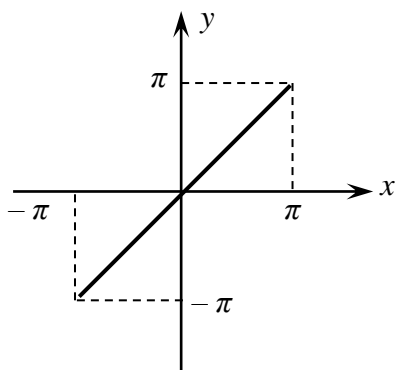
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Если функция $f(x)$ задана в сегменте $[0, l]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно её доопределить в сегменте $[0, l]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая её заданной в сегменте $[-l, l]$. Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы её значения в точках $[-l, 0]$ находились из условия $f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. В первом случае функ-

ция $f(x)$ в сегменте $[-l, l]$ будет четной, а во втором случае – нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции (a_n – в первом случае и b_n – во втором) можно определять по вышеприведенным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(-\pi; \pi)$ уравнением $f(x) = x$.

Решение



Функция $f(x) = x$ кусочно-монотонная и ограничена на интервале $(-\pi; \pi)$, т.е. может быть разложена в ряд Фурье. В силу нечетности функции $f(x) = x$ на интервале $(-\pi; \pi)$ ($f(x) = -f(x)$) коэффициенты ряда Фурье находим по формулам:

$$a_0 = a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx,$$

а ряд Фурье запишем в виде $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Итак,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} U = x \\ dV = \sin nx dx \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dU = dx \\ V = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right| = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{n} \cos n\pi + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n} (-1)^n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n},$$

$$b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}.$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид

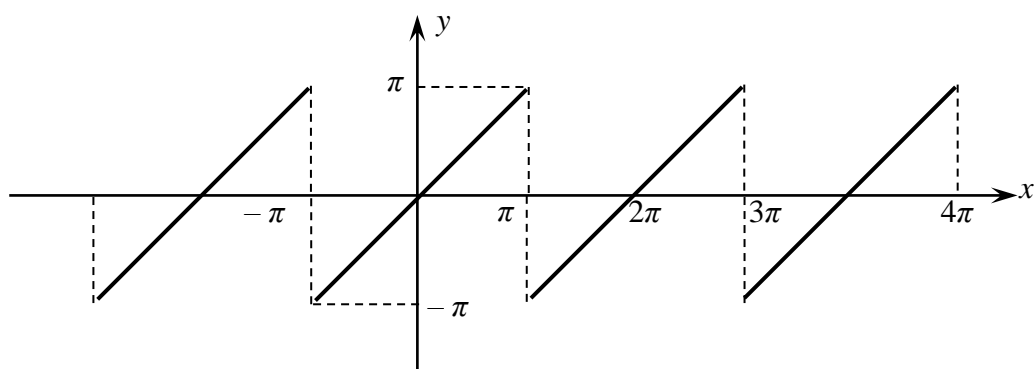
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \cdot \sin nx \quad \text{или}$$

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{2}{2} \sin 2x + \frac{2}{3} \sin 3x - \frac{2}{4} \sin 4x + \dots \quad \text{или}$$

$$f(x) = 2 \cdot \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right].$$

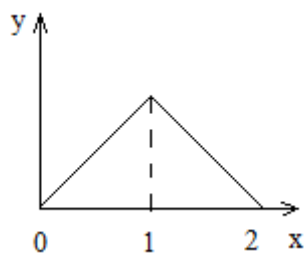
Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье 2π – периодическая функция, которая совпадает с функцией $f(x)=x$ в точках непрерывности интервала $(-\pi;\pi)$, а затем периодически продолжает функцию $f(x)=x$ на всю числовую ось; на концах интервала $(-\pi;\pi)$ и в точках разрыва функция $S(x)$ принимает значение $S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{-\pi+\pi}{2}=0$.

Ответ: $f(x)=2\cdot\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\dots\right]$.



Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$

Решение



Функция $f(x)$ является $2l$ – периодической ($l=1$) функцией, она кусочно – монотонна и ограничена на интервале $(0;2)$, т.е. допускает разложение в ряд Фурье. Коэффициенты ряда Фурье находим по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx;$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx,$$

а ряд Фурье будет иметь вид: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$.

$$\text{Итак, } a_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 x dx + \frac{1}{1} \int_1^2 (2-x) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \frac{(2-x)^2}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 x \cos n\pi x dx + \int_1^2 (2-x) \cos n\pi x dx = \frac{x}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{(2-x)}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_1^2 - \\ &- \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_1^2 = \frac{1}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) - \frac{1}{n^2 \pi^2} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ -\frac{4}{n^2 \pi^2} & \text{при } n = 2k - 1; \end{cases} \end{aligned}$$

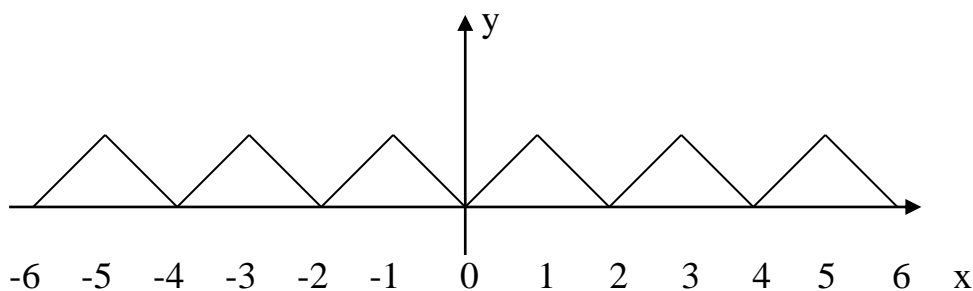
$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 x \sin n\pi x dx + \int_1^2 (2-x) \sin n\pi x dx = -\frac{x}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{(2-x)}{n\pi} \cos n\pi x \Big|_1^2 - \\ &- \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \Big|_1^2 = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi + \frac{1}{n\pi} \cos n\pi = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\cos \pi x}{1} + \frac{\cos 3\pi x}{9} + \frac{\cos 5\pi x}{25} + \dots \right) \quad \text{или}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье непрерывна и 2ℓ – периодична ($\ell=1$), во всех точках числовой оси совпадает с функцией $f(x)$.



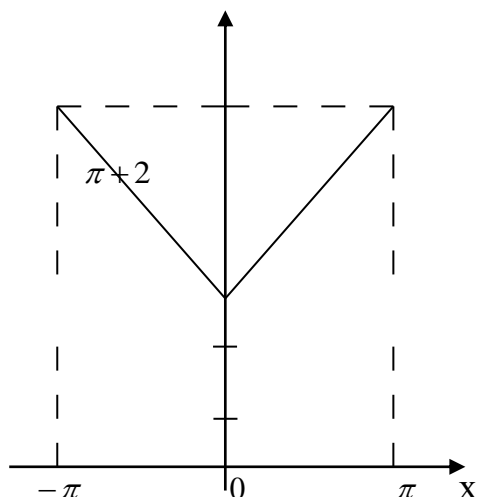
$$\text{Ответ: } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

Пример 3. Разложить функцию, заданную на отрезке $[0, \pi]$, уравнением

$$f(x) = x + 2, \text{ в ряд Фурье по косинусам.}$$

Решение

Продолжим функцию $f(x)$ четным образом на промежуток $[-\pi; 0)$, т.е.



выберем $f(x) = -x + 2$ на промежутке $[-\pi; 0)$, тогда

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x + 2 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

или $f(x) = |x| + 2$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$.

Полученная продолжением функция $f(x)$ является четной кусочно-монотонной, ограниченной функцией, т.е. допускает

разложение в ряд Фурье. Коэффициенты находим по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx,$$

$$b_n = 0,$$

ряд Фурье имеет вид $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Итак,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+2) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(x+2)^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi + 4;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x+2) \cos nx dx = \left[\begin{array}{l} U = x+2 \\ dV = \cos nx dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dU = dx \\ V = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x+2}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right] =$$

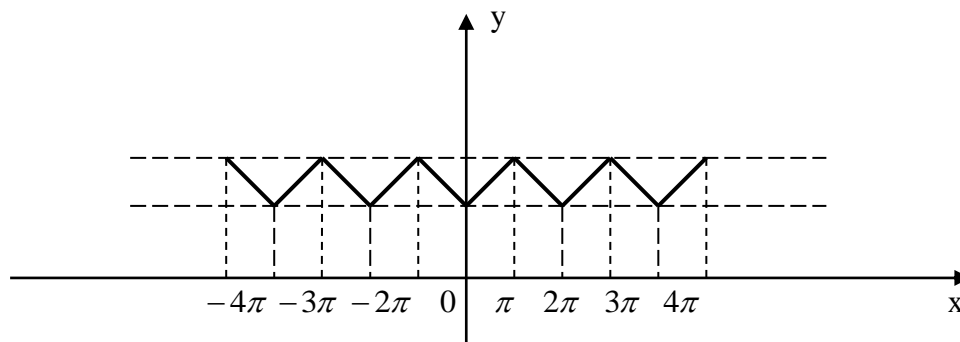
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{n^2 \pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k, \\ -\frac{4}{n^2 \pi} & \text{при } n = 2k-1; \end{cases}$$

$$b_n = 0.$$

Тогда $f(x) = \frac{\pi+4}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$ или

$$f(x) = \frac{\pi+4}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье является непрерывной 2π – периодической функцией, которая во всех точках отрезка $[0, \pi]$ совпадает с функцией $f(x)$.



Ответ: $f(x) = \frac{\pi + 4}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

Практические задания

Задание 14. Разложить в ряд Фурье функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi \leq x \leq 0, \\ x+1 & \text{при } 0 < x \leq \pi; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -2 < x < 0, \\ 3 & \text{при } 0 < x < 2; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -1 \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 4 & \text{при } \pi < x < 2\pi; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi; \end{cases}$

7) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, на сегменте $[-3; 3]$;

8) $f(x) = 2x$, на сегменте $(0, 1)$;

9) $f(x) = 10 - x$, на сегменте $(5, 15)$;

10) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 < x < 2, \\ 3 - x & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$

Задание 15. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на сегменте $[0; \pi]$

уравнением $f(x) = \pi - 2x$:

а) продолжив её на $[-\pi; 0]$ чётным образом;

б) продолжив её на $[-\pi; 0]$ нечётным образом.

Самостоятельная работа

Задание 13. Разложить в ряд Фурье функции:

1) $f(x) = x$, на сегменте $[-\pi; \pi]$;

2) $f(x) = x^2$, на сегменте $[-1; 1]$;

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x < \pi; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) & \text{при } -\pi < x < 0, \\ \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) & \text{при } 0 \leq x < \pi; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & \text{при } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$

6) $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{e} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{e}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{e}{2} < x < e; \end{cases}$

7) $f(x) = 1 - 2x$, на сегменте $(-\pi; \pi)$;

8) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$, на сегменте $(-\pi; \pi)$.

ИЗ ИСТОРИИ РЯДОВ

Установить, когда впервые в математике появились **ряды**, очевидно, невозможно. Уже вавилонские математики (VII век до н.э.) умели суммировать арифметическую и геометрическую прогрессии. Великий древнегреческий ученый Архимед (III век до н.э.) в «Квадрате параболы» приводит бесконечный ряд. Ряды Грегори (по имени шотландского математика и астронома Джеймса Грегори (1638-1675)) и Лейбница (по имени великого немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646-1716)) для $\frac{\pi}{4}$ были найдены в Индии примерно в 1550 году. Важные результаты по теории рядов получили итальянские ученые Пьетро Менголи (1625-1686) и Эванжелиста Торричелли (1608-1647), а также голландец Николаус Меркатор (настоящая фамилия Кремер) (1512-1594) и англичанин Джон Валлис (1616-1703).

В 1664 году принципиальный шаг в создании теории сделал знаменитый английский ученый Исаак Ньютон (1643-1727). Его мемуары «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669) посвящен квадратурам различных кривых; все они сводятся к интегралам (в современ-

ном обозначении) $\int ax^{\frac{m}{n}} dx = \frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$, для чего Ньютон указал приемы разложения дробей и корней в степенные ряды (опубликован мемуары в 1711 году). Другие ряды и интегралы Ньютону не понадобились. В самом деле, тригонометрические функции были введены только великим Леонардом Эйлером (1707-1783), аналитического задания показательной функции не существовало до XVIII века; поэтому понятно, что Ньютон считал основным способом задания функции ее разложение в степенной ряд. Например, имея в распоряжении только биномиальный ряд и интеграл от степенной функции, Ньютон мог найти ряд для $\arcsin x$; обращение этого ряда дает ряд для $\sin x$; интегрируя последний ряд почленно, можно легко получить разложение $\cos x$. Подобным образом Ньютон получил ряды для $\arcsin x$, $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(1+x)$. Разложение в ряд с помощью метода флюксий излагается в изданной после смерти Ньютона книге «Метод флюксий и бесконечные ряды» (1736).

Примерно к тому же времени относятся открытия Меркатора (1667), Валлиса (1668), Грегори (1670). Результат Меркатора в современной записи выглядит так: $\int_x^x \ln(1+b) db = \frac{1}{1 \cdot 2} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \dots$ Валлис заметил, что это разложение справедливо при $0 \leq x < 1$. Грегори знал биномиальный ряд раньше Ньютона; получив некоторые сведения о методе Ньютона, он сумел найти разложения для $\arctg x$; $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ и некоторых других функции.

В XX веке вскрылось, что Грегори использовал «ряд Тейлора» (1672). Все его результаты были использованы в переписке и не могли быть известны, например, шотландскому математику Колину Маклорену (1698-1746), который переоткрыл многие из них, и опубликовал через 70 лет.

Первые открытия Лейбница в теории рядов – разложение для $\arctg x$ и вычисление $\frac{\pi}{4}$ относятся к 1673 году. Они были опубликованы в 1682 году. Название его статьи «Дополнение практической геометрии, распространяю-

щееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов» (1686) показывает, что он также высоко ценил метод, как и Ньютон.

Ряд Тейлора был опубликован в 1715 году в книге «Метода прираще-ния, прямая и обратная» английского математика и философа Брука Тейлора (1685-1731).

Ряд Маклорена встречается впервые в 1717 году у шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692-1770), а в 1742 году - в работе другого шотландского математика Колина Маклорена (1698-1746) с указанием, что это частный случай ряда Тейлора. Вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора до XVIII века даже не ставился. Французский математик Огюстен Луи Коши (1789-1857) впервые установил условия сходимости ряда Тейлора и условия сходимости его к данной функции.

Первые **тригонометрические** ряды встречаются у Ньютона в 1676 году. Интерес к тригонометрическим рядам повысился в XVIII веке в связи с решением задачи о колебании струны.

Большой вклад в развитие теории тригонометрических рядов внесли французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830), русский ученый Николай Иванович Лобачевский (1742-1856), немецкие математики Петер Густав Лежен Дирихле (1805-1859) и Георг Фридрих Бернхард Риман (1826-1866).

В 1811 году Фурье сформулировал теорему о том, что произвольно заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом.

Название «**Ряды Фурье**» предложил Риман в 1857 году. Оно стало общепринятым к 80-м годам XIX века и является знаком признания трудов великого математика.

Самостоятельная работа № 1

<p style="text-align: center;">ВАРИАНТ 1.</p> <p>Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n</p> $a_n = \frac{2n!}{\sqrt{2^n + 3}}.$ <p>Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 2}.$ <p>Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}.$ <p>Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n^2}.$ <p>Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + 2}.$	<p style="text-align: center;">ВАРИАНТ 2.</p> <p>Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n</p> $a_n = \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}.$ <p>Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 1}.$ <p>Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость</p> $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$ <p>Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{5n+2}\right)^n.$ <p>Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+9n^2}.$
<p style="text-align: center;">ВАРИАНТ 3.</p> <p>Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n</p> $a_n = \frac{n+1}{2^n \cdot (n^2 + 1)}.$ <p>Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n + 1}.$ <p>Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}.$ <p>Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{7}{n}\right)^{n^2}.$ <p>Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+n^2}.$	<p style="text-align: center;">ВАРИАНТ 4.</p> <p>Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n</p> $a_n = \frac{3n+2}{10^n \cdot n^2}.$ <p>Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{7^n + 2}.$ <p>Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(n+2)}.$ <p>Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n^2}.$ <p>Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши</p> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+5}.$

ВАРИАНТ 5.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n-1}{(\sqrt{3})^n}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5n+1}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1) \cdot 5^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 5}.$$

ВАРИАНТ 6.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)^2}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2 + 9}.$$

ВАРИАНТ 7.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 3^n}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(5n-1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

ВАРИАНТ 8.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln 5}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{1+n^2}.$$

ВАРИАНТ 9.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{(\sqrt{4})^n}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n \ln 7}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{5^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n-1}}.$$

ВАРИАНТ 10.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{(\sqrt{2})^n}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln 4}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n (3n+1)}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{8n+1}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2 + 3}.$$

ВАРИАНТ 11.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n!}{2^{n^2}}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n \ln 7}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3n^2 + 2}.$$

ВАРИАНТ 12.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n+1}{n!}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \ln 3}.$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{5}{n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}.$$

ВАРИАНТ 13.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$1 + \frac{1}{\sqrt[5]{2}} + \frac{1}{\sqrt[5]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[5]{n}} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(2n+1)}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2 + 3}.$$

ВАРИАНТ 14.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}.$$

ВАРИАНТ 15.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n^n}{n!}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+3)}{3^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{9n+2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

ВАРИАНТ 16.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

ВАРИАНТ 17.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{1}{n \ln(n+1)}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 6^2} + \frac{1}{3 \cdot 6^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 6^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 2n + 1} \right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \ln(n+3)}.$$

ВАРИАНТ 18.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \ln \frac{n^3}{n^3 + 1}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 9^2} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 9^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n (2n+1)}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2n + 1}{5n^2 + 2n + 1} \right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

ВАРИАНТ 19.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^3(n+1)}.$$

ВАРИАНТ 20.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 + 1} \right)^n.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) [\ln(n+2)]}.$$

ВАРИАНТ 21.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 7^2} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 7^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n (n+1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}.$$

ВАРИАНТ 22.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{1}{n^2 - \ln n}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \frac{1}{2 \cdot 3^4} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 3}}.$$

ВАРИАНТ 23.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{n!}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 4^n} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n(2n+1)}.$$

ВАРИАНТ 24.

Задание 1. Написать 5 членов ряда по заданному общему члену

$$a_n = \frac{n}{3n-1}.$$

Задание 2. Исследовать сходимость ряда, применяя признаки сравнения

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots$$

Задание 3. С помощью признака Даламбера исследовать ряд на сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Задание 4. Исследовать ряд на сходимость с помощью признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Задание 5. Исследовать ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)\ln^2(n+7)}.$$

Самостоятельная работа № 2

<p style="text-align: center;">Вариант 1</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ по $(x + 1)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^1 x \cos \sqrt{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x^2 + y^2 - \ell^x, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 2</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ по $(x - 1)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = 2x - 3 \ln y + y, y(0) = 1.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 3</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = x^3 - 3x$ по $(x + 1)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x^2 y + \ell^y + x, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 4</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ по $(x + 2)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = -\ell^{-2x} + y^2, y(0) = 0.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 5</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ по $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x^2} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x \ell^x + y^2 + 1, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 6</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \ln x$ по $(x - 1)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} x \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = 2x^3 - y^2 - 2x, y(0) = 1.$</p>

<p style="text-align: center;">Вариант 7</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = 3^x$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x^2 + \sin y + 1, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 8</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = e^{-x}$ по $(x - 2)$;</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} x e^{-\sqrt{x}} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 9</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = x^3 - 3x$ по $(x - 1)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} x \cos \sqrt{2x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = e^{-2x} + 3y^2, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 10</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \cos 2x$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = 2x^2 + 3y \cos x + 2, y(0) = 0.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 11</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = x^4 - 4x^2$ по $(x + 2)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x^3 + y^2 - e^x, y(0) = 1.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 12</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = e^{-2x}$ по $(x - 3)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = \sin 2x + xy, y(0) = 1.$</p>

<p style="text-align: center;">Вариант 13</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sin 3x \text{ по } \left(x + \frac{\pi}{3}\right).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = \cos x + \ell^y + x, \quad y(0) = 0.$	<p style="text-align: center;">Вариант 14</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sqrt{x} \text{ по } (x - 1).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^1 \ell^{-0,1x^3} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = tgx + xy^2 - \ell^x, \quad y(0) = 1.$
<p style="text-align: center;">Вариант 15</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \frac{1}{x} \text{ по } (x - 1).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^1 x^2 \cos \sqrt{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = \ln(x+1) + \ell^y, \quad y(0) = 0.$	<p style="text-align: center;">Вариант 16</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \text{ по } (x - 1).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = x\ell^{-x} + \ln y, \quad y(0) = 1.$
<p style="text-align: center;">Вариант 17</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \frac{1}{x^2} \text{ по } (x + 1).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{0,5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = x^2 + y \ln y - y, \quad y(0) = 1.$	<p style="text-align: center;">Вариант 18</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = 4^x \text{ по } (x + 1);$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{0,1} \frac{\sin 2x}{x^2} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = \cos 2x - x - y^2, \quad y(0) = 0.$

<p style="text-align: center;">Вариант 19</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sin \frac{x}{2} \text{ по } \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = x^3 - tgy + 1, \quad y(0) = 0.$	<p style="text-align: center;">Вариант 20</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sqrt{x} \text{ по } (x - 4).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin 5x}{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = x^2 + y^2 + \ell^x, \quad y(0) = 0.$
<p style="text-align: center;">Вариант 21</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \ell^{-2x} \text{ по } (x - 1).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{0,1} \frac{1 - \cos x}{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = x^2 y + y^2, \quad y(0) = 1.$	<p style="text-align: center;">Вариант 22</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sin \frac{x}{3} \text{ по } \left(x + \frac{3\pi}{2}\right).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1 - \sin x}{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y'' = (2x - 1) \cdot y - 1, \quad y(0) = 0.$
<p style="text-align: center;">Вариант 23</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \ln(1 - x + x^2) \text{ по } x.$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^1 x\sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = \ell^{xy} + y, \quad y(0) = 1.$	<p style="text-align: center;">Вариант 24</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$:</p> $f(x) = \sqrt{x} \text{ по } (x - 4).$ <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001:</p> $\int_0^{0,1} \frac{\ln(x+1)}{x} dx.$ <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:</p> $y' = xy + y^3, \quad y(0) = 1.$

<p style="text-align: center;">Вариант 25</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = y^2 + x, y(0) = 1.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 26</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = e^{-x^2}$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x^2} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = xy + y^2, y(0) = 1.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 27</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = e^{-3x}$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x + 2y^2, y(0) = 0.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 28</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ по x.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin 3x}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y' = x^2 y + y^3, y(0) = 1.$</p>
<p style="text-align: center;">Вариант 29</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = e^{6x}$ по степеням $(x + 2)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y'' - xy^2 = 0, y(0) = 1; y'(0) = 1.$</p>	<p style="text-align: center;">Вариант 30</p> <p>1. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - a)$: $f(x) = \sin \frac{3x}{2}$ по $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.</p> <p>2. Вычислить определенный интеграл с точностью до 0,001: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^2}{x} dx.$</p> <p>3. При указанных начальных условиях найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения: $y'' = x + y^2, y(0) = 0; y'(0) = 1.$</p>

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1985.–384с.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике для ВУЗов и ВТУЗов / М.Я. Выгодский 14-е изд., испр. – М.: «Джангар», 2000 – 864с.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2. Учебное пособие / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: «Высшая школа», 1999 – 416с.
4. Демидович Б.П. Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / Б.И. Демидович. – М.; «Наука», 1978 – 479с.
5. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике. Типовые расчёты: Учебное пособие / Л.А. Кузнецов. 3 – е изд., испр. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 240с.
6. Лунгу К.Н., Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А Шевченко, С.Н. Федин. – М.: Айрис – пресс. 2004. – 592с.
7. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов / В.П. Минорский – 14-е изд., испр. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2000. – 336с.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть / Д.Т. Письменный – 2-е изд., испр. – М.: Айрис – пресс, 2002. – 256с.
9. Щипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Щипачев – М.: «Высшая школа» 2000. – 304с.
10. Щипачев В.С. Высшая математика / В.С. Щипачев – М.: «Высшая школа» 2002. – 479с.

Ответы:**Практические задания****§1.**

Задание 2: 1) $U_n = \frac{n^2}{3^n}$; 2) $U_n = \frac{1}{3^n}$; 3) $U_n = \frac{n+2}{(n+1)^2}$; 4) $U_n = \frac{2n}{2n+1}$; 5) $U_n = \frac{2n}{3n+2}$;

6) $U_n = \frac{1}{2n-1}$; 7) $U_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot 4^{2n-1}}$; 8) $U_n = \frac{n}{n^2+1}$; 9) $U_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n}{n!}$; 10) $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Задание 3: 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) нет; 6) нет.

§2.

Задание 4: 1) сходится; 2) – 4) расходится; 5) сходится; 6) сходится

(указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$); 7) сходится; 8) расходится (указание: сравнить

с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/3}}$); 9) расходится (указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$); 10) расходится

(указание: сравнить с $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Задание 5: 1) – 2) сходится; 3) – 4) расходится; 5) – 6) сходится;

7) расходится; 8) сходится; 9) дополнительные исследования, т.к. $\ell = 1$;

10) сходится.

Задание 6: 1) – 8) сходится; 9) расходится; 10) сходится.

Задание 7: 1) расходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) сходится;

5) сходится; 6) расходится; 7) сходится; 8) расходится; 9) расходится;

10) сходится.

§3.

Задание 8: 1) – 3) сходится; 4) расходится; 5) – 7) сходится; 8) расходится.

Задание 9: 1) условно сходящийся; 2) расходящийся; 3) – 5) абсолютно сходящийся; 6) условно сходящийся; 7) условно сходящийся; 8) абсолютно сходящийся; 9) абсолютно сходящийся; 10) условно сходящийся; 11) расходящийся; 12) абсолютно сходящийся.

§4.

Задание 10: 1) $(-9;9)$; 2) $[-25;25)$; 3) $(-0,1;0,1)$; 4) $\{0\}$; 5) $(-1;1)$; 6) $(-2;2)$;

- 7) $(-2;0]$; 8) $[-4;-2]$; 9) $(-5;13)$; 10) $[-2;8)$; 11) $\{0\}$; 12) $\left(-\frac{e^3}{2}; \frac{e^3}{2}\right)$; 13) $\left(-\frac{37}{5}; \frac{17}{5}\right)$; 14) $(4;6]$; 15) $(-\infty;\infty)$; 16) $(-11;7)$.

§5.

Задание 11: 1) $-78+59(x+4)-14(x+4)^2+(x+4)^3$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$;

3) $1+\frac{1}{3}(x+1)-\frac{2}{3^2 \cdot 2!}(x+1)^2+\frac{2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!}(x+1)^3-\dots$; 4) $\ln 2-\frac{x+3}{2 \cdot 3}-\frac{(x+3)^2}{3^2 \cdot 2^3}-\frac{(x+3)^3}{3^4 \cdot 2^3}-\dots$;

5) $1+\frac{3}{2}\left((x-1)+\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^2}{2!}-\frac{1}{4} \cdot \frac{(x-1)^3}{3!}+\dots\right)$; 6) $1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{(x-2)^2}{2!}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \frac{(x-2)^4}{4!}-\dots$;

7) $(x+1)^4-6(x+1)^3+15(x+1)^2-12(x+1)-3$; 8) $-1+(x-2)-(x-2)^2+\dots$;

9) $10^{-6}\left(1+\frac{2 \ln 10}{1!} \cdot (x+3)+\frac{2^2 \ln 10}{2!} \cdot (x+3)^2+\dots\right)$;

10) $\ln 5+\frac{2}{5}(x-3)-\frac{2^2}{5^2 \cdot 2!} \cdot (x-3)^2+\frac{1 \cdot 2 \cdot 2^3}{5^3 \cdot 3!} \cdot (x-3)^3+\dots$

Задание 12: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{\frac{6n+1}{3}}}{2^{2n} \cdot (2n)!}$; 2) $x^2-x^3+\frac{1 \cdot 3}{2!}x^4-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^5+\dots$;

3) $-\frac{1}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$; 4) $\sum_{n+0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 4^n \cdot x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$; 5) $x^3-\frac{x^5}{2}+\frac{x^7}{3}-\dots$;

6) $\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3 x^4}{4!}+\frac{2^5 x^6}{6!}-\dots$; 7) $1-x^3+x^6-\dots$; 8) $\ln(1+x)-\ln(1-x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+$

$+\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\dots\right)$; 9) $3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^{4n}$.

§6.

- Задание 13:** 1) 0,199; 2) 0,50; 3) 0,098; 4) 0,098; 5) 0,072; 6) 0,764; 7) 2,0203; 8) 2,0006; 9) 3,1072; 10) 0,9933; 11) 2,1831; 12) 1,4678; 13) 0,1564; 14) 0,643; 15) 1,428; 16) 0,243; 17) 0,509781; 18) 0,262.

§7.

Задание 14: 1) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{\cos 3x}{9}+\frac{\cos 5x}{25}+\dots\right)+3\left(\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\dots\right)$;

$$2) f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right) + \frac{\pi+2}{\pi} \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\pi+2}{3\pi} \sin 3x - \dots;$$

$$3) f(x) = 2 + \frac{4}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{2} + \frac{\sin \frac{3\pi x}{2}}{3} + \frac{\sin \frac{5\pi x}{2}}{5} + \dots \right); \quad 4) f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x + \frac{\cos 3\pi x}{9} + \dots \right) -$$

$$-\frac{1}{\pi} \left(\sin \pi x + \frac{\cos 2\pi x}{2} + \dots \right); \quad 5) f(x) = 1 - \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \quad 6) f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right);$$

$$7) f(x) = \frac{3}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{2\pi x}{3} + \frac{1}{3} \cdot \sin \frac{3\pi x}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{3} + \dots \right); \quad 8) f(x) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n};$$

$$9) f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}; \quad 10) f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi}{3}}{n^2} \cdot \cos \frac{2n\pi x}{3}.$$

$$\text{Задание 15: а) } f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1) \cdot x}{(2n+1)^2}; \quad \text{б) } f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{n}.$$

Самостоятельная работа

§1.

$$\text{Задание 2: } 1) U_n = \frac{n}{5^{n-1}}; \quad 2) U_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right); \quad 3) U_n = \frac{2n-1}{n}; \quad 4) U_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+2)}{(n+1)^2};$$

$$5) U_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{10^n + 1}; \quad 6) U_n = \frac{n}{5 \cdot 3^{n-1}}.$$

Задание 3: 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) нет.

§2.

Задание 4: 1) сходится; 2) сходится; 3) расходится; 4) расходится;

5) сходится; 6) расходится; 7) расходится; 8) сходится.

Задание 5: .1) сходится; 2) расходится; 3) расходится; 4) расходится;

5) сходится; 6) расходится; 7) сходится; 8) расходится.

Задание 6: 1) – 7) сходится; 8) расходится.

Задание 7: 1) – 3) расходится; 4) сходится; 5) расходится; 6) – 8) сходится.

§3.

Задание 8: 1) абсолютно сходящийся; 2) расходящийся; 3) – 4) абсолютно сходящийся; 5) расходящийся; 6) условно сходящийся; 7) абсолютно сходящийся; 8) – 9) условно сходящийся; 10) абсолютно сходящийся.

§4.

Задание 9: 1) $[-1;1]$; 2) $(-10;10)$; 3) $(-\infty;\infty)$; 4) $(-1;9)$; 5) $(-\infty;\infty)$; 6) $(-3;13)$;
7) $\left(-\frac{19}{9};-\frac{17}{9}\right)$; 8) $[2;4]$; 9) $(-\infty;\infty)$; 10) $[0;2]$.

§5.

Задание 10: 1) $2 + \frac{x-4}{2^2} - \frac{(x-4)^2}{4 \cdot 2^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot (x-4)^3}{4 \cdot 6 \cdot 2^6} - \dots$; 2) $\ln 6 + \frac{5}{6}(x-1) - \frac{5^2}{6^2 \cdot 2!}(x-1)^2 +$
 $+\frac{2 \cdot 5^3}{6^3 \cdot 3!}(x-1)^3 - \dots$; 3) $-11 + 17(x+2) - 9(x+2)^2 + 2(x+2)^3$; 4) $-\frac{1}{6} - \frac{(x+2)}{6^2} - \frac{(x+2)^2}{6^3} -$
 $-\frac{(x+2)^3}{6^4} - \dots$; 5) $5^{-3} \left(1 + \frac{2 \ln 5}{1!} \cdot (x+2) + \frac{2^2 \ln^2 5}{2!} \cdot (x+2)^2 + \frac{2^3 \ln^3 5}{3!} \cdot (x+2)^3 + \dots \right)$;
6) $16 - 8x + \frac{10}{2!}x^2 - \frac{14}{3!}x^3 + \dots$.

Задание 11: 1) $x - \frac{5}{3}x^2 - \frac{2 \cdot 5^2}{3^2 \cdot 2!}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 5^3}{3^3 \cdot 3!}x^4 + \dots$; 2) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n+1}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^{2n}}{2^{n+1}}$;
4) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} \cdot x^{2n}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n} \cdot x^{2n}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n!}$.

§6.

Задание 12: 1) 0,3093; 2) 0,454; 3) 2,087; 4) 1,9957; 5) 0,946; 6) -0,44;
7) 0,047; 8) 0,336.

§7.

Задание 13: 1) $f(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$; 2) $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$;

3) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1) \cdot x}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$; 4) $\frac{8a}{\pi^2} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right)$;

5) $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{9} \cdot \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \cdot \sin \frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{49} \cdot \sin \frac{7\pi x}{2} + \dots \right)$;

6) $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{e} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cdot \cos \frac{2\pi n x}{e}$; 7) $f(x) = 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \sin nx}{n}$;

8) $f(x) = -3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sin nx}{n}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
§1. Числовые ряды	4
Основные понятия.....	4
<i>Практические задания</i>	6
<i>Самостоятельная работа</i>	7
§2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов	8
2.1 Признаки сравнения.....	8
2.2 Признак Даламбера	11
2.3. Признак Коши.....	12
2.4. Интегральный признак Коши	13
<i>Практические задания</i>	14
<i>Самостоятельная работа</i>	16
§3. Знакопеременные ряды	17
3.1. Знакопеременяющиеся ряды. Признак Лейбница.....	17
3.2. Абсолютная и условная сходимость рядов	18
<i>Практические задания</i>	19
<i>Самостоятельная работа</i>	20
§4. Степенные ряды	21
<i>Практические задания</i>	25
<i>Самостоятельная работа</i>	26
§5. Разложение функций в степенные ряды	26
<i>Практические задания</i>	31
<i>Самостоятельная работа</i>	32
§6. Применение рядов в приближенных вычислениях	33
<i>Практические задания</i>	35
<i>Самостоятельная работа</i>	35
§7. Ряды Фурье	36
<i>Практические задания</i>	42
<i>Самостоятельная работа</i>	43
Из истории рядов.....	43
Самостоятельная работа № 1	46
Самостоятельная работа № 2	52
Список литературы	57
Ответы	58
<i>Практические задания</i>	58
<i>Самостоятельная работа</i>	60
Содержание	62

Кидяева Наталья Петровна, Каньшина Зоя Ивановна

РЯДЫ

*Учебное пособие по математике
для студентов инженерно-технических и экономических направлений подго-
товки бакалавров всех форм обучения*

В редакции составителей

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 16.06.2014 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 2,9. Усл.-п.л. – 4,0.
Тираж 100 экз. Заказ 185.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86

