МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНТИТУТ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**Методические рекомендации к изучению дисциплины
и задания для контрольной работы**

**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014**

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171
Линейная алгебра: Методические рекомендации к изучению дисциплины. – Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 53 с.

Составители: Каньшина З.И., Фролова Г.Н.

Пособие написано в соответствии с требованиями федеральных государственных стандартов высшего профессионального образования по направлениям бакалавриата. Оно обеспечивает высокий уровень фундаментальной математической подготовки студентов. Рассматриваются методы теории линейной алгебры. Пособие содержит необходимый теоретический и практический материал для изучения линейной алгебры. В работе даются основные понятия: определителя, свойства определителей, вычисление определителя, сведения о матрицах, операции над матрицами. Рассмотрено решение систем методом Крамера, матричным методом, методом Гаусса.

Предназначено для студентов заочной формы обучения. Может быть использовано и студентами очной формы обучения для проведения самостоятельных работ.

Рецензент – Л.В. Козлова, канд.техн.наук, завкафедрой общетехнических дисциплин факультета механизации сельского хозяйства ДальГАУ

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета ДальГАУ (Протокол №10 от 25 июня 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2014

Раздел 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к базовой (обязательной) части второго цикла ООП. Методические указания по данной дисциплине составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования, утверждённого Министерством образования и науки РФ 9 ноября 2009г по направлению подготовки «080100.62-Экономика», примерной программой по дисциплине и рабочими учебными планами, утверждёнными учёным советом ФГБОУ ВПО ДальГАУ

1.1 Цели и задачи дисциплин

Целью математического образования является развитие навыков математического мышления; навыков использования математических методов и основ математического моделирования; математической культуры у обучающегося.

Ему необходимо в достаточной степени владеть как классическими, так и современными математическими методами анализа задач, возникающих в его практической деятельности, использовать возможности вычислительной техники, уметь выбирать наиболее подходящие комбинации известных методов, знать их сравнительные характеристики.

Для выработки у современных специалистов с высшим образованием необходимой *математической культуры* необходимо *решение следующих задач:*

1. Обеспечение высокого уровня фундаментальной математической подготовки студентов.
2. Выработки у студентов умения проводить логический и качественный анализ социально-экономических задач управления на основе по-

строения математических моделей на базе различных средств информационного обеспечения.

3. Умение использовать методы современной математики, необходимые для работы по выбранной специальности.

4. Умение специалиста самостоятельно продолжить своё математическое образование.

В результате изучения дисциплины студент должен:

1)обладать следующими **общекультурными компетенциями(ОК):**

-владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);

-умением логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6)

2) обладать следующими **профессиональными компетенциями(ПК):**

- способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчёта экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов с применением методов линейной алгебры и моделирования (ПК – 1);

В результате изучения дисциплины студент **должен:**

Знать: методы теории линейной алгебры.

Уметь: использовать аппарат линейной алгебры при изучении количественных закономерностей, обработки технической и экономической информации и анализа данных.

Владеть: навыками применения современного математического инструментария для решения экономических задач;

-методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

1.2 Распределение учебного времени по модулям(разделам) и темам дисциплины

Таблица 1

Наименование модулей и тем дисциплины	Всего,ч	В том числе, ч		
		лекции	практические занятия	Самостоятельная работа
Модуль1. Элементы линейной алгебры 1)Определители 2)Матрицы 3)Система линейных алгебраических уравнений	34	4	2	28
Модуль 2. Элементы векторной алгебры, линейные векторные пространства	34	2	4	28
Модуль 3. Элементы аналитической геометрии	40	-	-	40
Модуль 4. Линейные модели в экономике	36	2	2	32

1.1 Библиографический список

Основной

1. Виленкин, И. В. Высшая математика: линейная алгебра: аналитическая геометрия: дифференциальное и интегральное исчисление [Текст] / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. – 6-е изд. –Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 415, [1] с.

2. Боревич З.П. «Определители и матрицы». 5-е изд., СПБ.: Издательство «Лань», 2009. – 192 с.

3. Хуснутдинов, Р. Ш. Экономико-математические методы и модели [Текст] : учеб.пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. – М. : ИНФРА- М, 2013. – 223, [1] с. – (Высшее образование)

Дополнительный

1. Бараненков А.И., Богомолова Е.П., Петрушко И.М. «Сборник задач и типовых расчётов по высшей математике», 1-е изд., СПБ.: Издательство «Лань», 2009. – 240 с.

2. Воеводин В.В. «Линейная алгебра» 5-е изд. СПБ.: Издательство «Лань», 2009. – 416 с.

3. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум; рек. М-вом образ. РФ / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., пер. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909, [3] с. – (Бакалавр. Углубленный курс)

4. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Производная и ее приложения [Текст]: учеб. пособие; рек. Науч.- метод. советом М-ва образ. РФ / А.И. Соловьев [и др.].-2-е изд., испр.- СПб.: Лань, 2009.- 320 с.

5. Митрохина, О. П. Прямая линия на плоскости и кривые второго порядка [Текст] : учебно-метод. пособие для направлений бакалавриата / О. П. Митрохина; ДальГАУ. ТИ. – Благовещенск : ДальГАУ, 2012. – 39, [1] с.

6. Фролова, Н.Г. Математическое моделирование [Текст] : учеб. пособие для студ. очной, заочной и сокр. форм обуч. Благовещенск : ДальГАУ, 2013. – 117, [1] с

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы, базы данных, информационно-справочные и поисковые системы.

1. Системы программирования:
http://www.mathcad.cps.ru/http://progu.ru/matlab/

2. он-лайн тренажеры **www.i-exam.ru** – единый портал интернет-тестирования

3. информационно-справочная система «В помощь студентам» **http://dit.isuct.ru**.

Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ

2.2. Модуль 1. Определители

2.1.1. Содержание модуля

Определители второго, третьего, *n*-го порядка. Свойства определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Способы вычисления определителей: разложение по строке или столбцу; метод обращения в нуль всех, кроме одного,элементов строки или столбца; метод приведения к треугольному виду.

2.1.2. Методические указания по изучению модуля 1

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примера 1.

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}$

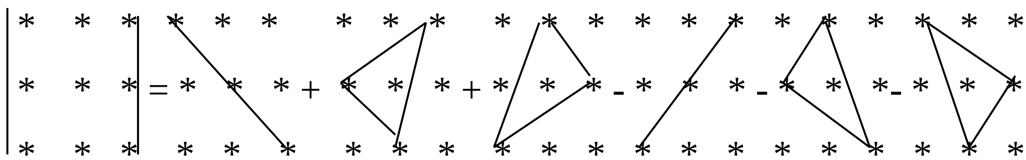
Двумя способами: а) по правилу треугольников; б) разложением по элементам первой строки.

Решение .а) *Определителем третьего порядка* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$ (1)

Числа $a_i, b_i, c_i (i=1,2,3)$ называются *элементами* определителя. Они образуют три строки и три столбца.

В выражении (1) первое слагаемое есть произведение элементов главной диагонали определителя, второе и третье- произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла определителя. Слагаемое, входящие со знаком (-), получаются подобным образом относительно вспомогательной диагонали. Такой способ вычисления определителя третьего порядка называется *правилом треугольника.* Схематично вычисление определителя третьего порядка по правилу треугольника может быть представлено в следующем виде:



Тогда $\Delta = 3*4*2+2*(-5)*1+(-2)*(-1)*3-3*4*1-2*(-2)*2-(-5)*(-1)*3=1.$

Б) *Минором* M_y элемента a_{ij}определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется определитель второго порядка, полученный из данного определителя вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (здесь i, j=1,2,3).

Алгебраическим дополнением A_y элемента a_{ij} определителя называется произведение $(-1)^{i+j}$ на минор этого элемента, то есть $Ay=(-1)^{i+j} * M_y$.

Тогда определитель третьего порядка может записан в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

Здесь определитель третьего порядка разложен по элементам первой строки. Подобным образом определитель может быть разложен по любой строке или столбцу.

Получаем:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}= 3(4\cdot2-(-5)(-1)) +$$

$$+ 2(2\cdot2-3(-1))+2(-5)-3\cdot4=1$$

2.1.3 Вопросы для самоконтроля

1.Что называется определителем второго порядка?

2.Что называется определителем третьего порядка?

3.Назовите свойства определителей.

4.Что называется минором элемента определителя?

5.Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?

6.Назовите способы вычисления определителей.

2.1.4 Задания для самостоятельной работы

В задачах 1-6 вычислить определители:

1. $\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 9 & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & -9 & 5 \\ -1 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

2.2. Модуль 1. Матрицы

2.2.1 Содержание модуля

Основные понятия теории матриц. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Обратная матрица. Базисный минор. Ранг матрицы.

2.2.2 Методические указания по изучению модуля 1

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примеров 2-6

Пример 2. Составить матрицу 4A -5B, если

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим матрицы 4A и 5B:

$$4A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 12 & -8 & 16 \end{pmatrix}, \quad 5B=\begin{pmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 0 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Тогда $4A\text{-}5B=\begin{pmatrix} -4-10 & 0-5 & 8-(-10) \\ 12-0 & -8-15 & 16-20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & -5 & 18 \\ 12 & -23 & -3 \end{pmatrix}$

Пример 3. Перемножить матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Произведением матрицы A размерности m*k на матрицу B размерности k*n называется матрица C размерности m*n, элемент c_{ij} которой вычисляется по формуле

$$C_{ij}= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{lg}.$$

Из данного определения следует, что умножение матриц A и B возможно только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. При этом каждый элемент i-й строки матрицы A умножается на соответствующий элемент j-го столбца матрицы B, эти произведения суммируются и полученное число записывается на i-й строке и j-м столбце матрицы произведения C.

Матрица A имеет размерность 3·2; B-2·3. Значит, матрица C=A·B имеет размерность 3·3.

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ & \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot4+(-3)3 & 2\cdot2+(-3)5 & 2\cdot(-1)+(-3)2 \\ 0\cdot4+1\cdot3 & 0\cdot2+1\cdot5 & 0(-1)+1\cdot2 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$4 \quad 5 \qquad\qquad 4\cdot4+5\cdot3 \qquad 4\cdot2+5\cdot5 \qquad 4(-1)+5\cdot2$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -11 & -8 \\ 3 & 5 & 2 \\ 31 & 33 & 6 \end{pmatrix}$$

Пример 4. Вычислить A^2+A+E, если $A= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. $A^2= A\cdot A= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$A^2 +A+E = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Пример 5. Найти матрицу, обратную матрице $A= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. Вычислим определитель Δ матрицы A:

$\Delta= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10\neq0.$ Значит, матрица A- невырожденная и имеет обратную матрицу A^{-1}.

Невырожденная матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1} a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ имеет обратную матрицу

A^{-1},вычисляемую по формуле

$$A^{-1} = 1/\Delta \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n2} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ . \ . \ . \ . & . \ . \ . \ . \ . \\ A_{1n} & A_{2n} .. A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Где Δ-определитель матрицы A; A_{ij}- алгебраические дополнения элементов a_{ij}.Вычислим алгебраические дополнения элементов данной матрицы.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5,\ A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5.$$

Подобным образом получаем

$A_{21}=3$, $A_{22}=1$, $A_{23}=-1$, $A_{31}=-1$, $A_{32}=3$,$A_{33}=7$

По формуле (1) имеем:

$$A^{-1}=1/10 \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Правильность полученного результата можно проверить умножение матриц A^{-1} и А: при таком умножении должны получить единичную матрицу Е.

$$A^{-1}*A= 1/10*\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1/10 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Пример 6. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Решение. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Применим к данной матрице систему элементарных преобразований, сведём её к ступенчатому виду.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ умножим первую строку соответственно на -2 и -3 и сложим

со второй и третьей строками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{pmatrix}$

Умножим вторую строку на -5 и сложим с третьей строкой $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 18 & 18 \end{pmatrix}$

В последней матрице три ненулевые строки, поэтому ранг данной матрицы равен трём.

2.2.3. Вопросы для самоконтроля

1.Что называется матрицей?

2.Какая матрица называется единичной?

3.Что называется определителем матрицы?

4.Какая матрица называется невырождённой?

5.Как сложить две матрицы?

6.Как умножить матрицу на число?

7.В каком случае возможно перемножить две матрицы?

8.Что называется произведением двух матриц?

9.Всегда ли для произведения двух матриц справедлив переместительный закон умножения? Приведите примеры.

10.Какая матрица называется обратной данной матрице?

11.Как находится матрица, обратная данной?

2.2.4 задания для самостоятельной работы

1.Найти A^2,если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2.Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 23 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.Вычислить 3A-22B, если

A= $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4.Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

В задачах 5-7 найти матрицы, обратные данные.

5. $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Определить ранги следующих матриц.

8. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **9**. $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

2.3 Модуль 1. Система линейных алгебраических уравнений

2.3.1. Содержание модуля

Основные понятия. Решения систем линейных уравнений методом Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Матричный метод решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Решение однородной системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Структура общего решения неоднородной линейной системы.

2.3.2. Методические указания по изучению модуля 1

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примеров 7 – 10.

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

по формуле Крамера.

Решение. Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, данная система имеет единственное решение. Вычислим определители Δx_1, Δx_2, Δx_3.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -7 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 14; \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 28; \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -42$$

По формулам Крамера имеем:

$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{14}{14} = 1$; $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{28}{14} = 2$; $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = -3$. *Ответ:* (1;2;-3).

Пример 8. Данную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

Решение: Введем следующие обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

С учетом этих обозначений эта система уравнений принимает следующую матричную форму: $A \cdot X = H$

Если матрица A – невырожденная (её определитель отличен от нуля), то она имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножим обе части уравнения (1) на A^{-1} получим: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot H$

$A^{-1} \cdot A = E$ (E – единичная матрица), а $EX=X$, поэтому $X = A^{-1} \cdot H$ (2)

Равенство (2) называется *матричной* записью решения системы линейных уравнений. Для нахождения решения системы уравнений необходимо вычислить обратную матрицу A^{-1}

Пусть имеем невырожденную матрицу А = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

, где Aij(i=1,2,3;j=1,2,3)- алгебраическое дополнение элемента аij матрицы A, равное произведению $(-1)^{i+j}$ на минор (определитель) второго порядка, полученный из определителя матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Вычислим определитель Δ (A)

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =10 \neq 0$$

Так как Δ (A) ≠0,матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$

$A_{21}=3$, $A_{22}=1$, $A_{23}=-1$, $A_{31}=-1$, $A_{32}=3$, $A_{33}=7$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} * \frac{1}{10}$$

По формуле (2) имеем:

$$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ -5 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Отсюда: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$

Пример 9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 2 \\ 5x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение. Для решения системы уравнения применим метод последовательного исключения неизвестных(метод Гаусса).

Выпишем расширенную матрицу данной системы и, применив к ней элементарные преобразования, сведем её к ступенчатой форме.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

поменяем местами первую и вторую строки

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -6 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

первую строку умножим на (-2),(-4),(-5) и прибавим соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -1 & -10 & 12 & -19 \end{array}\right)$$

Вторую строку умножим на 6 и на 1 и прибавим соответственно к третьей и четвертой строкам.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -28 & 38 & -56 \\ 0 & 0 & -13 & 17 & -26 \end{array}\right)$$

Третью строку делим на (-28)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-19}{14} & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 17 & -2 \end{array}\right)$$

Третью строку умножим на13 и прибавим к четвертой

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-19}{14} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-9}{14} & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-19}{14} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Полученная матрица есть расширенная матрица следующей системы уравнений, равносильной данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -7 \\ x_3 - \dfrac{-19}{14} x_4 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

так как $x_4 = 0$,то $x_3 = 2$,$x_2 = -1$,$x_1 = 3$. Ответ: (3; -1; 2; 0)

Пример 10. Исследовать совместимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

и в случае ее совместимости найти общее решение и одно из частных решений.

Решение: Как и в примере 9, применим метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Выпишем расширенную матрицу данной системы и, применением к ней элементарных преобразований, сведем ее к ступенчатой форме. Элементарными преобразованиями матрицы являются:

1. Перестановка местами двух строк.
2. Исключение строки, состоящей из нулей.
3. Умножение всех элементов строки на одно и то же от нуля отличное число.
4. Прибавление к элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умножение на одно и то же число.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 7 & 11 & 3 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & 6 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

сложим 1-ю строку со 2-ой и 3-ей строками;

умножим 1-ую строку на 2 и сложим с 4-ой строкой

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 16 & 10 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

умножим 2-ую строку на (-2) и сложим с 3-ей и 4-ой строками.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 8 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

умножим 2-ую строку на $\frac{1}{5}$ а 4-ую на $\frac{-1}{7}$;

удалим 3-ю строку как нулевую

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} & 1 & & \frac{4}{5}\,\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 \end{array}\right)$$

умножим 2-ую строку на (-3) и сложим ее со 2-ой строкой

Умножим на 3-ю строку на $\frac{-4}{5}$ и сложим ее со второй строкой

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 4 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{8}{5} & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Следовательно, данная система уравнений равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_3 + 4x_4 = \frac{2}{5} \\ x_2 + \frac{8}{5}x_3 + x_4 = \frac{1}{5} \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Ранг r=3 матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы; число неизвестных h=5. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений. Число свободных неизвестных равно h-r =2. Прием за базисные неизвестные x_1,x_2,x_5,а x_3, x_4—свободные неизвестные. Получаем общее решение системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_3 - 4x_4 \\ x_2 = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}x_3 - x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Фиксируя значения свободных неизвестных, например, x_3 =2,x_4 =1,получаем частное решение (-4;-4; 2;1;0)

2.3.3.Вопросы для самоконтроля

1. Какое уравнение называется линейным?

2. Что называется системой линейных уравнений?

3. Что называется решением системы линейных уравнений?

4. Что называется матрицей системы линейных уравнений?

5. что называется расширенной матрицей системы линейных уравнений?

6. Назовите правило Крамера решения системы n линейных уравнений с n неизвестными. В каком случае оно применимо?

7. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

8. При какой условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

9. В чем сущность матричного метода решения системы линейных уравнений?

10. При каких преобразованиях система линейных уравнений переходит в эквивалентную?

11.В чем сущность метода Гаусса для решения систем линейных уравнений?

12.Какие неизвестные в системе линейных уравнений называются базистыми? Свободными?

2.3.4.задачи для самостоятельной работы

В задачах 1-3 системы уравнений решить:1) по формулам Крамера; 2)с помощью обратной матрицы; 3)метод Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_3 + 6x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

4.установить совместимость системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \\ 9x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}$$

5.установить совместимость системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

6. Определить, при каком значении параметра a система $\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

7. Определить, при каких pиq система $\begin{cases} px_1 + 19x_2 - x_3 = 8 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = q \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решений.

2.4. Модуль 2. Элементы векторной алгебры. Линейные векторные пространства

2.4.1. Содержание модуля

Пространство R^n.Понятие линейного (векторного) пространства. Вектор как элемент линейного пространства. Линейные операторы. Линейные операторы над векторами. Различные норма в R^n. Скалярное произведение в R^n. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность линейного пространства. Преобразование координат. Евклидово пространство. Ортогональная система векторов. Процесс ортогонализации. Разложение вектора по ортогональному базису. Линейные операторы и действия над ними. Преобразование переменных.

2.4.2.Методические указания по изучению модуля 2

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примеров 11,12.

Пример 11. Даны векторы a_1 =(4;1;4), a_2=(-2;-1;1),a_3=(3;1;5),

b= (-3;-2;1). Показать что векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис и найти координаты вектора b в этом базисе.

Решение: Вычислим определитель Δ, составленный из координат векторов a_1,a_2,a_3:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

Так как $\Delta \neq 0$ то векторы a1,a2,a3 некомпланарные и, следовательно, образуют базис.

Тогда:

$\mathbf{b}=\boldsymbol{\lambda_1 a_1}+\boldsymbol{\lambda_2 a_2}+\boldsymbol{\lambda_3 a_1}$, (*)

где λ1,λ2, λ3- координаты вектора b в базисе a_1,a_2,a_3.

Запишем равенство

$$\begin{pmatrix}-3\\-2\\1\end{pmatrix} = \lambda_1\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases}4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = -3\\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = -2\\ 4\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 1\end{cases},$$

которую решим по формулам Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\1 & -1 & 1\\4 & 1 & 5\end{vmatrix} = -7,\quad \Delta1=\begin{vmatrix}-3 & -2 & 3\\-2 & -1 & 1\\1 & 1 & 5\end{vmatrix} = -7,\quad \Delta2=\begin{vmatrix}4 & -3 & 3\\1 & -2 & 1\\4 & 1 & 5\end{vmatrix} = -14,$$

$$\Delta3=\begin{vmatrix}4 & -2 & 3\\1 & -1 & 1\\4 & 1 & 5\end{vmatrix} = -7$$

Тогда $\lambda_1 = \frac{-7}{-7}$ =1, $\lambda_2= \frac{-14}{-7}$ =2, $\lambda_3= \frac{-7}{-7}$ =1 и b= a1+a2+a3

Пример 12. Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = 4y_1 - 3y_2 + 5y_3 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 - 2y_3 \\ x_3 = 2y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 - 4z_3 \\ y_2 = -z_1 + 3z_2 + 2z_3 \\ y_3 = 2z_1 - 4z_2 + z_3 \end{cases}$$

Найти преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

Решение. Обозначим через A – матрицу первого преобразования; B- второго; X,Y,Z – матрицы – столбцы соответственно переменных x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2, z_3:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях данные преобразования принимают следующую матричную форму : X= A·Y, Y= B·Z. Отсюда X= A·(B·Z) = (A·B)·Z.

Найдем произведение матриц Аи B:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -21 & -17 \\ -5 & 16 & -2 \\ 11 & -15 & -6 \end{pmatrix}$$

Тогда $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 & -21 & -17 \\ -5 & 16 & -2 \\ 11 & -15 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17z_1 - 21z_2 - 17z_3 \\ -5z_1 + 16z_2 - 2z_3 \\ 11z_1 - 15z_2 - 6z_3 \end{pmatrix}$$

Итак, $\begin{cases} x_1 = 17z_1 - 21z_2 - 17z_3 \\ x_2 = -5z_1 + 16z_2 - 2z_3 \\ x_3 = 11z_1 - 15z_2 - 6z_3 \end{cases}$ - искомое линейное преобразование.

2. 4. 3. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется линейным пространством?

2. Какие векторы линейного пространства называются линейно независимыми?

3. Что называется базисом линейного пространства?

4. Что называется размерностью линейного пространства?

5. Что называется евклидовым пространством?

6. Что называется нормой вектора?

7. Какие векторы в евклидовом пространстве называются ортогональными?

8. Что называется преобразованием пространства? Какие преобразования называются линейными?

2. 4. 4. Задания для самостоятельной работы

1. Даны по два линейных преобразований. Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_2, y_2, z_2через x, y, z.

$$\begin{cases} x_1 = 2x - y + 4z \\ y_1 = x + 3y - z \\ z_1 = 4x - y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_2 = x_1 + 2y_1 - z_1 \\ y_2 = 3x_1 - y_1 + 2z_1 \\ z_2 = y_1 + z_1 \end{cases}.$$

2. Дано линейное преобразование. Средствами матричного исчисления найти обратное преобразование.

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = \mathrm{x} + \mathrm{y} - 3\mathrm{z} \\ \mathrm{y}_1 = 3\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 2\mathrm{z} \\ \mathrm{z}_1 = \mathrm{x} - \mathrm{y} + 5\mathrm{z} \end{cases}.$$

2.5. Модуль 4. Линейные модели в экономике. Собственные векторы и собственные значения матриц. Квадратичные формы.

2.5.1. Содержание модуля

Собственные векторы и собственные значения матриц.

Характеристическое уравнение. Случаи простого собственного значения; комплексно-сопряженных собственных значений; кратного собственного значения.

2.5.2 Методические указания по изучению модуля 4

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примера 13.

Пример 13. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения матрицы A, то есть те числа λ , для которых определитель матрицы A -$\lambda\cdot E$, где E- единичная матрица, равен нулю.

$$|A-\lambda\cdot E| = \begin{vmatrix}4-\lambda & -1 & -1\\ 1 & 2-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix} =$$

$$= (4 - \lambda)(2 - \lambda)^2 +1+1+(2 - \lambda) - (4 - \lambda) = (2 - \lambda)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Это характеристическое уравнение имеет корни λ_1=2 кратности $к_1$=1;

λ_2= 3 кратности $к_2$= 2.

Числа λ_1=2 и λ_2=3 являются собственными значениями матрицы А.

Найдем линейно независимый собственный вектор $\overline{h_1}$ (он единственный, так как $к_1$=1), соответствующий числу λ_1=2. Для этого рассмотрим в матричном виде линейную однородную систему (A - $\lambda\cdot E$) $\bar{0}$ = $\bar{0}$. Отсюда имеем

$$(A-\lambda_1\cdot E)\,\bar{0} = \left(\begin{array}{ccc|c}2 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Отсюда видно, что координаты a_1, a_2, a_3 собственного вектора $\bar{h}$ удовлетворяют равенствам $a_1 = a_3$, $a_2 = a_3$. Тогда:

$$\bar{h}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overline{h_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Найдем два линейно независимых собственных векторов $\overline{h_2}$и$\overline{h_3}$, соответствующих числу λ_2=3 кратности 2.

Имеем

$$(\text{ A- } \lambda_2 \cdot \text{E}\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Отсюда координаты a_1, a_2, a_3искомых собственных векторов $\bar{h}$удовлетворяют равенству $a_1 = a_2 + a_3$. Тогда:

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Собственными векторами, соответствующими числу λ_2=3, являются

$$\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, собственными векторами являются $\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1, \\ 1 \end{pmatrix}$ $\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\bar{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.5.3 Вопросы для самоконтроля

1. Что называется собственными значениями линейного преобразования?

2. Что называется собственными векторами линейного преобразования?

3. Как найти собственные векторы для случая простого собственного значения?

4. Как найти собственные векторы для случая кратного собственного значения?

2.5.4 Задания для самостоятельной работы

В задачах 1-5 найти собственные значения и собственные векторы указанных матриц.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 4. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.6. Модуль 4. Квадратичные формы

2.6.1. Содержание модуля

Основные определения. Матрица квадратичной формы. Ранг квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Метод Лагранжа. Метод собственных векторов.

2.6.2. Методические указания по изучению модуля 4

После изучения по учебникам теоретического материала разберите решение примеров 14, 15.

Пример 14. Привести к каноническому виду уравнение линии

$17x^2+12xy+8y^2=20$

Решение. Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2,\ldots,x_n$ называется многочлен второй степени от этих переменных, не содержащий членов первой степени и свободного члена. В случае n=2 квадратичная форма имеет вид

$$a_{11}{x_1}^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}{x_2}^2 \qquad (1)$$

Матрицей квадратичной формы (1) называется квадратная матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Матрица A квадратичной формы $17x^2$+12xy +8y^2имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения матрицы A.

$\begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}$=0, (17-λ)(8-λ)-36=0, λ^2-25λ+100=0, λ_1=5, λ_2=20.

Тогда квадратичная форма $17x^2$ +12xy +8y^2преобразуется к каноническому виду 5$(x_1)^2$ +20$(y_1)^2$ и уравнений линии имеет вид 5$(x_1)^2$ +20$(y_1)^2$ =20 или$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{1}$=1. Это уравнение представляет эллипс в системе координат x_1Oy_1с центром в точке (0;0) с полуосями a=2, b=1.

Укажем базис , в котором уравнение эллипса принимает канонический вид. Для этого найдем собственные векторы линейного преобразования с матрицей A (см. пример 13).

$(A$ - $\lambda_1 E0)$= $\left(\begin{array}{c|c} 12 & 60 \\ 6 & 30 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 2 & 10 \\ 2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 2 & 1\,0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$

Отсюда координаты a_1; a_2собственного вектора удовлетворяют равенству a_2= -2a_1и тогда $\bar{h}_2$= (2;1).

Предположим, что исходный базис – ортонормирован. Нормируем векторы $\bar{h}_1$ и$\bar{h}_2$, получаем искомый ортонормированный базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, где

$\bar{e}_1=\frac{\overline{h_1}}{\overline{h_1}|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}.\ \overline{h_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ .\ \overline{h_1}=\ \frac{1}{\sqrt{5}};\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\ ;\ \right)$

$\bar{e}_2=\frac{\overline{h_2}}{|\overline{h_2}\,|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ .\ \bar{h}_2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

Следовательно, уравнение представляет эллипс $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{1}$=1 в базисе векторов $\bar{e}_1$и $\bar{e}_2$.

Пример 15. Квадратичную форму $5{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+4x_1x_2+4x_2x_3$ привести к каноническому виду.

Решение. Применим метод Лагранжа. В данной квадратичной форме сгруппируем слагаемые, содержащие переменную x_1, и в полученном в скобках выражении выделим полный квадрат:

$$5{x_1}^2+3{x_2}^2+4{x_3}^2+4x_1x_2+4x_2x_3=5\left({x_1}^2+\frac{4}{5}x_1x_2\right)+3{x_2}^2+4x_2x_3+4{x_3}^2=$$

$$=5\left({x_1}^2+2x_1\cdot\frac{2}{5}x_2+\frac{4}{25}{x_2}^2\right)-\frac{4}{5}{x_2}^2+3{x_2}^2+4x_2x_3+4{x_3}^2=$$

$$=5\left(x_1+\frac{2}{5}x_2\right)^2+\frac{11}{5}{x_2}^2+4x_2x_3+4{x_3}^2=$$

(затем в выражении, стоящем вне круглых скобок, группируем слагаемые, содержащие x_2, и выделяем в этом выражении полный квадрат)

$$=5\left(x_1+\frac{2}{5}x_2\right)^2+\frac{11}{5}{x_2}^2+4x_2x_3+4{x_3}^2=$$

$$=5\left(x_1+\frac{2}{5}{x_2}^2\right)+\frac{11}{5}{x_2}^2\left(+2x_2\cdot\frac{10}{11}x_3+\frac{100}{121}{x_3}^2-\frac{20}{11}\right){x_3}^2+4{x_3}^2=$$

$$=5\left(x_1+\frac{2}{5}{x_2}^2\right)+\frac{11}{5}\left(x_2+\frac{10}{11}{x_3}^2\right)+\frac{24}{11}{x_3}^2$$

Сделаем замену:

$$\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{2}{5}x_2 \\ y_2=x_2+\dfrac{10}{11}x_3. \\ y_3=x_3 \end{cases}$$

После такой замены данная квадратичная форма принимает следующий канонический вид:

$$5{y_1}^2+\frac{11}{5}{y_2}^2+\frac{24}{11}{y_3}^2$$

2.6.3. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется квадратичной формой?
2. Что называется матрицей квадратичной формы?
3. Как проводят квадратичную форму к каноническому виду?
4. В чем заключается метод Лагранжа при сведении квадратичной формы к каноническому виду?

2.6.4. Задания для самостоятельной работы

В задачах 1-3 привести квадратичные формы к каноническому виду.

1. $3x_1{}^2 + 3x_2{}^2 + 3x_3{}^2 - 2x_1x_2$
2. $2x_1{}^2 + 5x_2{}^2 + 5x_3{}^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_2 - 8x_2x_3$
3. $3x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + 5x_3{}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

В задачах 4, 5 написать канонические уравнения кривых второго порядка и определить их тип.

4. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$
5. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$

Раздел 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ

3.1.Методические указания по выполнению контрольной работы

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа, состоящая из изучения материала, чтения учебника, решения задач, выполнения контрольной работы. В период лабораторно-экзаменационной сессии для студентов проводятся лекции и практические занятия, носящие обзорный характер.

При изучении учебника следует воспроизводить на бумаге в форме конспекта основные моменты рассматриваемого вопроса программы, обращая особое внимание на определение основных понятий курса линейной алгебры, формулировки теорем, формулы.

Работа над учебником должна сопровождаться решением задач.

В соответствии с действующим учебным планом студенты изучают курс линейной алгебры в течение одного года обучения.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1. Контрольная работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть написаны фамилия и инициалы студента, его шифр, дата отсылки работы в институт, домашний адрес.
2. Задачи контрольной работы следует располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи нужно полностью переписать ее условие. На каждой странице тетради нужно оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.
3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых теорем и формул. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами (желательно на миллиметровой бумаге). Объяснения к решению должны соответствовать обозначениям, приведенным на чертежах.
4. Контрольная работа должна выполняться ***самостоятельно***, противном случае студент лишается возможности проверить степень своей подготовленности по изучаемой дисциплине.
5. Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить отмеченные преподавателем ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, то в кратчайший срок следует выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом и первоначально выполненную работу.

6. В межсессионный период или во время лабораторно- экзаменационной сессии студент должен пройти на кафедре высшей математики собеседование по зачтенной контрольной работе.
7. Студент выполняет вариант контрольной работы, совпадающий с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1,3,5,7,9), то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 3. Если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное (2,4,6,8) или ноль, то номера задач даны в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	Номер задач							
1	1	21	41	61	81	91	101	121
2	2	22	42	62	82	92	102	122
4	3	23	43	63	83	93	103	123
5	4	24	44	64	84	94	104	124
5	5	25	45	65	85	95	105	125
6	6	26	46	66	86	96	106	126
7	7	27	47	67	87	97	107	127
8	8	28	48	68	88	98	108	128
9	9	29	49	69	89	99	109	129
0	10	30	50	70	90	100	110	130

Таблица 3

Номер варианта	Номер задач							
1	11	31	51	71	81	91	111	121
2	12	32	52	72	82	92	112	122
3	13	33	53	73	83	93	113	123
4	14	34	54	74	84	94	114	124
5	15	35	55	75	85	95	115	125
6	16	36	56	76	86	96	116	126
7	17	37	57	77	87	97	117	127
8	18	38	58	78	88	98	118	128
9	19	39	59	79	89	99	119	129
0	20	40	60	80	90	100	120	130

3.2.Задачи для контрольной работы

В задачах 1-20 вычислить определитель третьего порядка:

а) по правилу треугольников; б) разложением по элементам строки или столбца.

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 2 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ 3 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

В задачах 21-40 для данных матриц A и B выполнить следующие действия:

а) $2A-3B$; б) A^3

21. A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

22. A= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

23. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -3 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ 3 & 2 & 0\\ 1 & -4 & 5\end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 4\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\\ -2 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 4\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\ -1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$

30. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 2\\ -3 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 2 & 4\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

31. $A=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

32. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 5\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & 4 & 6\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$

33. A= $\begin{matrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{matrix}$, B= $\begin{matrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{matrix}$

34. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

35. A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

36. A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

37. A= $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

38. A= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

39. A= $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

40. A= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

В задачах 41-60 решить систему уравнений: 1) при помощи определителей (по формулам Крамера); 2) с помощью обратной матрицы; 3) методом Гаусса.

41. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$

42. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

46. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -5 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

49. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

50. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$

51. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

52. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -9 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

53. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

54. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

55. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$

56. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$

57. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases}$

58. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

59. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$

60. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -5 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

В задачах 61-80 исследовать совместность системы уравнений и в случае ее совместимости найти общее решение и одно из частных решений.

61. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \end{cases}$

62. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 \end{cases}$

63. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

64. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 4 \\ 3x_1 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

65. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$

66. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$

67. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

68. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

70. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$

71. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2 \end{cases}$

72. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18 \end{cases}$

73. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3 \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

74. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$

75. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

76. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$

77. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$

78. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$

79. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22 \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

В задачах 81- 90 даны два линейных преобразования. Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_2, y_2, z_2 через x, y, z.

81. $\begin{cases} x_1 = 2\text{x} - y + 4z \\ y_1 = x + 3y - z \\ z_1 = 4x - y \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = x_1 + 2y_1 - z_1 \\ y_2 = 3x_1 - y_1 + 2z_1 \\ z_2 = y_1 + z_1 \end{cases}$

82. $\begin{cases} x_1 = x + 2y - z \\ y_1 = 2x - y + 3z \\ z_1 = 4x + y + z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 2x_1 - y_1 + z_1 \\ y_2 = x_1 + 3y_1 - 2z_1 \\ z_2 = x_1 - 2y_1 + 2z_1 \end{cases}$

83. $\begin{cases} x_1 = 2y - z \\ y_1 = x + 2y + z \\ z_1 = -x + 3y + 2z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 3y_1 + 2z_1 \\ y_2 = x_1 - 2y_1 + z_1 \\ z_2 = 2x_1 + y_1 + 3z_1 \end{cases}$

84. $\begin{cases} x_1 = 4x - 3y + 5z \\ y_1 = x + 2y - 2z \\ z_1 = 2x - y + 4z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = x_1 + 2y_1 - 4z_1 \\ y_2 = -x_1 + 3y_1 + 2z_1 \\ z_2 = 2x_1 - 4y_1 + z_1 \end{cases}$

85. $\begin{cases} x_1 = x + 2y - z \\ y_1 = 3x - 4y + 2z \\ z_1 = 2x + 3y - z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 4x_1 - 3y_1 + z_1 \\ y_2 = 2y_1 - z_1 \\ z_2 = x_1 + 4y_1 \end{cases}$

86. $\begin{cases} x_1 = 2x - 4y + 3z \\ y_1 = x + y - 2z \\ z_1 = 4x - 5y + z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 5x_1 + y_1 - z_1 \\ y_2 = 2x_1 - 3y_1 + 2z_1. \\ z_2 = 3y_1 + z_1 \end{cases}$

87. $\begin{cases} x_1 = 2y - 4z \\ y_1 = x + 3y + z \\ z_1 = 3x - 2y + 2z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 2z_1 \\ y_2 = x_1 - 2y_1 + z_1 \\ z_2 = 4x_1 + y_1 - 3z_1 \end{cases}$

88. $\begin{cases} x_1 = 5x + 4y - 2z \\ y_1 = x + 3z \\ z_1 = 2x - y + z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = x_1 - 2y_1 + z_1 \\ y_2 = 2x_1 + 3y_1 - z_1 \\ z_2 = 4x_1 + y_1 + 2z_1 \end{cases}$

89. $\begin{cases} x_1 = -x + 4z \\ y_1 = 2x - 3y + 5z \\ z_1 = x + 2y - 3z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 4x_1 + y_1 - 3z_1 \\ y_2 = 2y_1 + z_1 \\ z_2 = 5x_1 - y_1 + 2z_1 \end{cases}$

90. $\begin{cases} x_1 = 2x - 4y + z \\ y_1 = x + 3z \\ z_1 = 4x - y + 2z \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 5y_1 - z_1 \\ y_2 = 2x_1 - 3y_1 + 4z_1 \\ z_2 = x_1 + y_1 - 2z_1 \end{cases}$

В задачах 91- 100 даны векторы$\bar{a}_1$,$\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\bar{b}$. Показать, что векторы $\bar{a}_1$,$\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\bar{b}$ в этом базисе.

91. $\bar{a}_1$ = (3; 1; 6), $\bar{a}_2$= (-2; 2; -3), $\bar{a}_3$ = (-4; 5; -1), $\bar{b}$ = (3; 0; 1)

92. $\bar{a}_1$ = (4; 1; 4), $\bar{a}_2$= (-2; -1; 1), $\bar{a}_3$ = (3; 1; 5), $\bar{b}$ = (-3;-2; 1)

93. $\bar{a}_1$ = (1; 2; 5), $\bar{a}_2$= (2; -3; 4), $\bar{a}_3$ = (1;-1;-2), $\bar{b}$ = (3; 0; 1)

94. $\bar{a}_1$ = (5; 1; 2), $\bar{a}_2$= (3; 4; -1), $\bar{a}_3$ = (-4; 2; 1), $\bar{b}$ = (-3; 5; 4)

95. $\bar{a}_1$ = (2; 1; 5), $\bar{a}_2$= (-4; 3; 5), $\bar{a}_3$ = (1; -1; -4), $\bar{b}$ = (4;-1; -3)

96. $\bar{a}_1 = (3; 1; 4)$, $\bar{a}_2 = (-4; 2; 3)$, $\bar{a}_3 = (2; -1; -2)$, $\bar{b} = (7;-1; 0)$

97. $\bar{a}_1 = (1; 4; 2)$, $\bar{a}_2 = (5; -2; -3)$, $\bar{a}_3 = (-2; -1; 1)$, $\bar{b} = (-3;2; 4)$

98. $\bar{a}_1 = (2; 1; 3)$, $\bar{a}_2 = (3; -2; 1)$, $\bar{a}_3 = (1; -3; -4)$, $\bar{b} = (7; 0; 7)$

99. $\bar{a}_1 = (5; 3; 1)$, $\bar{a}_2 = (-2; 1; 2)$, $\bar{a}_3 = (-2; 1; 4)$, $\bar{b} = (3; 0; 1)$

100. $\bar{a}_1 = (1; 3; 5)$, $\bar{a}_2 = (-2; -1; -1)$, $\bar{a}_3 = (4; -2; 4)$, $\bar{b} = (-7; 3; -1)$

В задачах 101- 120 найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

101. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 102. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 103. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 105. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ 106. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

107. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$ 108. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 109. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

110. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 15 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ 111. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 112. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

113. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 114. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 115. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

116. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 117. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 118. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

119. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 120. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

В задачах 121- 130 привести к каноническому виду уравнение линии второго порядка, используя теорию квадратичных форм и определить ее вид.

121. $3x^2 + 2\sqrt{14}xy + 8y^2 = 10$

122. $4x^2 + 4\sqrt{3}xy + 5y^2 = 40$

123. $4x^2 + 2\sqrt{6}xy + 3y^2 = 24$

124. $6x^2 + 2\sqrt{10}xy + 3y^2 = 16$

125. $6x^2 + 2\sqrt{5}xy + 2y^2 = 21$

126. $5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$

127. $9x^2 + 4\sqrt{2}xy + 2y^2 = 20$

128. $5x^2 + 4\sqrt{2}xy + 3y^2 = 14$

129. $7x^2 + 6\sqrt{2}xy + 4y^2 = 15$

130. $7x^2 + 2\sqrt{6}xy + 2y^2 = 24$

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ 3

1.1 Цели и задачи дисциплин 3

1.2 Распределение учебного времени по модулям(разделам) и темам дисциплины 5

Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ 7

2.1.1. Содержание модуля 7

2.1.2. Методические указания по изучению модуля 1 8

2.1.3 Вопросы для самоконтроля 9

2.1.4 Задания для самостоятельной работы 10

2.2. Модуль 1. Матрицы 10

2.2.1 Содержание модуля 10

2.2.2 Методические указания по изучению модуля 1 10

2.2.4 задания для самостоятельной работы 15

2.3 Модуль 1. Система линейных алгебраических уравнений 17

2.3.1. Содержание модуля 17

2.3.2. Методические указания по изучению модуля 1 18

2.3.3.Вопросы для самоконтроля 27

2.3.4.задачи для самостоятельной работы 27

2.4. Модуль 2. Элементы векторной алгебры.
Линейные векторные пространства 29

2.4.1. Содержание модуля 29

2.4.2.Методические указания по изучению модуля 2 29

2. 4. 3. Вопросы для самоконтроля 31

2. 4. 4. Задания для самостоятельной работы 32

2.5. Модуль 4. Линейные модели в экономике.
Собственные векторы и собственные значения матриц.
Квадратичные формы. 32

2.5.1. Содержание модуля 32

2.5.2 Методические указания по изучению модуля 4 33
2.5.3 Вопросы для самоконтроля 34
2.5.4 Задания для самостоятельной работы 35
2.6. Модуль 4. Квадратичные формы 35
2.6.1. Содержание модуля 35
2.6.2. Методические указания по изучению модуля 4 35
2.6.3. Вопросы для самоконтроля 38
Раздел 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ЕЕ ВЫПОЛНЕНИЮ 38
3.1.Методические указания по выполнению контрольной работы 38
3.2.Задачи для контрольной работы 41

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Методические рекомендации к изучению дисциплины
и задания для контрольной работы

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 30.06.2014 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 2,4. Усл.-п.л. – 3,5.
Тираж 150 экз. Заказ 202.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86