

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ «Дальневосточный государственный аграрный университет»
Факультет строительства и природообустройства**

ОСНОВЫ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

**Электронное учебное пособие
(для студентов заочной формы обучения)**

**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2015**

УДК 631.672.2.001.4

Электронное учебное пособие «Основы гидрогазодинамики» составлены: к.с.-х.н., доцентом Юст Н.А., к.с.-х.н., доцентом Шелковкиной Н.С., к.т.н., доцентом Алексейко Н.Л.

В электронном учебном пособии представлены теоретические сведения, примеры расчета задач по разделам дисциплины, краткие пояснения и рекомендации по выполнению контрольных работ.

Материалы электронного учебного пособия могут быть использованы для приобретения практических навыков при изучении вопросов движения сжимаемых и несжимаемых жидкостей.

Рекомендовано студентам направления 20.03.01 «Техносферная безопасность», заочной формы обучения.

Рецензент:

кандидат с-х. наук, зав. кафедрой
«Природообустройство и водопользование»

Т.Г. Молчанова

Рекомендованы к изданию методическим советом
ФСИП ФГБОУ ВПО «Дальневосточный государственный аграрный университет».
Протокол № 6 от 24 февраля 2015 г.

Издательство ДальГАУ
2015

ВВЕДЕНИЕ

Гидрогазодинамикой называют один из разделов механики – механику жидкостей и газов. Механика жидкости и газа включает: кинематику жидкости, в которой изучают изменение формы, размеров и пространственного расположения жидких объёмов (отвлекаясь от причин их вызвавших); гидростатику, в которой изучают условия равновесия жидкости в силовом поле; динамику, в которой изучают законы движения жидкости. Динамика, в свою очередь, подразделяется на гидродинамику – динамику несжимаемой жидкости и газодинамику – динамику сжимаемой жидкости. Жидкостью в теории гидродинамики называют среду, действуя на которую малые силы могут вызывать конечные деформации. В противоположность этому твёрдыми называют тела, деформация которых мала при приложении малой силы. При этом следует отметить, что чётких и жёстких границ между твёрдыми, жидкими и газообразными телами нет. Имеется большая группа тел занимающих промежуточное положение между твёрдыми телами и жидкостями и между жидкостями и газами. Вообще говорить о состоянии вещества можно только при вполне определённых внешних условиях. В качестве стандартных условий приняты условия при температуре 20 °С и атмосферном давлении. Стандартные (нормальные) условия вполне соотносятся с понятием благоприятных внешних условий для существования человека. Понятие о состоянии вещества необходимо дополнить. Так, при увеличении кинетической энергии молекул вещества (нагрев вещества) твёрдые тела могут перейти в жидкое состояние (плавление твёрдого тела) и твёрдые тела приобретут при этом некоторые свойства жидкостей. Подобно этому увеличение кинетической энергии молекул жидкого вещества может привести жидкость в газообразное состояние (парообразование) и при этом жидкость будет иметь свойства, соответствующие газам. Аналогичным способом можно превратить расплавленное твёрдое тело в пар, если в большей степени увеличить кинетическую энергию колебательного движения молекул первоначально твёрдого вещества. Уменьшение кинетической энергии молекул (охлаждение вещества) приведёт к протеканию процесса в обратном направлении. Газ может быть превращён в жидкое, а затем и в твёрдое состояние. Кроме того, существуют среды, занимающие промежуточное положение между жидкостями и твёрдыми телами. Например, краски, которые ведут себя как твёрдые тела, если долгое время находились в покое, но если их интенсивно перемешать, то они начинают вести себя как жидкости. В некоторых полимерных растворах одновременно проявляются свойства жидкости и твёрдого тела. Гидрогазодинамика изучает движение ньютоновских жидкостей. При изучении движения жидкостей и газов последние часто рассматриваются как жидкости с присущими им некоторыми особыми свойствами. В связи с этим принято различать две категории жидкостей: капельные жидкости (практически несжимаемые тела, или собственно жидкости) и сжимаемые жидкости (газы). Газы легче деформируются, чем жидкости, и поэтому их также можно рассматривать как ньютоновские

жидкости. До тех пор пока в жидкости не происходит вскипание, а плотность газов изменяется незначительно (например, не более чем на 5\%), их движение определяется общими закономерностями, изучаемыми гидродинамикой. При значительном изменении плотности газа (особенно при больших скоростях, сравнимых со скоростью звука в конкретной среде) закономерности движения газа не только количественно, но и качественно отличаются от закономерностей движения жидкости. Закономерности движения газов при больших скоростях изучаются газодинамикой.

При изучении закономерностей движения жидкостей и газов последние рассматриваются как сплошные (непрерывные, неразрывные) среды, несмотря на то что размеры молекул (особенно газов) малы в сравнении с расстояниями между ними. Определяется это тем обстоятельством, что размеры объектов, изучаемых в газодинамике, и даже таких тонких измерительных инструментов, как нить термоанемометра, велики в сравнении с длиной свободного пробега молекул. [6,7]

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

В данном курсе «Гидрогазодинамика» принят следующий порядок: в начале каждого раздела теоретической части курса приводится перечень понятий, даются определения и краткие характеристики, значение которых студенты должны хорошо усвоить и в дальнейшем, самостоятельно использовать. Следует обратить внимание на то, что в конце каждого раздела представлены вопросы для самоконтроля (контрольные вопросы). Ответы на большинство из них потребуют от студента умения логически мыслить, сопоставлять теорию и практику (при решении задач). Поиск правильного ответа на каждый вопрос позволит получить более глубокие знания по изучаемым разделам данного курса.

По каждому разделу предложены задачи с ответами для самостоятельной работы. Такое изложение материала позволяет студентам проверить свои знания и способности в решении задач. При изучении курса, в случае необходимости студент может уточнить значение того или иного понятия с помощью основной и дополнительной литературы, рекомендованной в данном курсе или любой другой доступной научной и учебно-методической литературы по гидрогазодинамике, по возможности, изданной не ранее 2004 г., периодическими изданиями, а также всевозможными сайтами в Интернете, электронными библиотеками, содержащими материалы по дисциплине. При самостоятельной работе над курсом «Гидрогазодинамика» рекомендуется выполнить следующие указания:

1. Приступая к решению задачи, необходимо отчетливо представить исходные условия и цепь решения.

2. Обдумав схему, следует наметить четкую последовательность действий, составить уравнения, выражающие связь между величинами, найти необходимые формулы.

3. Соблюдать размерности всех входящих в формулы величин. Недостаточное внимание к размерностям является частой причиной ошибок.

4. Использовать в расчетах Международную систему единиц (СИ).

5. При выполнении ряда задач следует пользоваться справочными материалами.

Подготовка к сдаче зачета.

Положительная оценка за контрольную работу и положительные ответы на вопросы означают, что вы успешно выполнили программу изучения данного курса и получили зачет по дисциплине «Гидрогазодинамика».

В таблице 1 «Программа курса» представлены разделы дисциплины «Гидрогазодинамика», обязательные к изучению.

Таблица 1
Программа курса

№	Разделы дисциплины
1	Основные физические свойства жидкостей и газов.
2	Общие законы и уравнения статики жидкостей и газов.
3	Основы гидродинамики и кинематики.

Вопросы по курсу «Гидрогазодинамика»

1. Силы, действующие в жидкости.
2. Методы изучения движения жидкости
3. Траектория, линия тока, трубка тока, струя
4. Градиент, дивергенция, циркуляция, вихрь
5. Основная теорема кинематики (первая теорема Гельмгольца)
6. Тензор скоростей деформации
7. Уравнение сплошности
8. Нормальное и касательное напряжение, действующие в движущейся жидкости
9. Уравнение движения сплошной среды в напряжениях
10. Напряжения, действующие в идеальной жидкости
11. Уравнение движения идеальной жидкости (Эйлера)
12. Уравнение движения идеальной жидкости (Эйлера) в форме Громека
13. Теорема Бернулли
14. Основные понятия и определения потенциальных течений

15. Комплексный потенциал, комплексная скорость
16. Частные случаи плоских потенциальных течений
17. Безциркуляционное обтекание круглого цилиндра
18. Обобщенный закон Ньютона
19. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (Навье-Стокса)
20. Подобие гидродинамических явлений
21. Критериальные уравнения. Критерии и числа подобия
22. Моделирование ГГД явлений
23. Ламинарное и турбулентное движение
24. Пограничный слой и его характерные толщины
25. Переход ламинарного ПС в турбулентный
26. По какому закону происходит изменение параметров в газодинамике?
27. Какая скорость звука подразумевается в газодинамике?
28. В чем отличие уравнений Эйлера и Бернулли?
29. Когда можно исключить температуру жидкости из рассмотрения в газодинамике?
30. В чем отличие начальных условий от граничных?
31. Как изменяется энтропия при течении невязкого сжимаемого газа?
32. Как изменяются параметры потока при его торможении?
33. В каких пределах изменяется критерий Маха M и скоростной коэффициент?
34. Определение гидрогазодинамики. Разделы
35. Чем объясняется явление заклинивания сопла?
36. Как связаны максимальная и критическая скорости истечения газа?
37. Увеличивается ли расход газа через сопло при добавлении расширяющейся части?
38. Как изменяется скорость газа в цилиндрической трубе при учете сил трения?
39. Как связаны между собой гидродинамические функции $t(l)$, $p(l)$, $E(l)$?
40. Как изменяются параметры газа при прямом скачке?

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ КУРСА

1. Силы, действующие в жидкости

В жидкостях могут существовать только распределенные силы: массовые (объемные) и поверхностные.

1) Массовые силы действуют на каждую точку выделенного объема τ и пропорциональны массе частиц. Например, сила тяжести, центробежное ускорение, сила электростатического напряжения, сила Кориолиса и т.д.

Массовые силы характеризуются вектором плотности массовых сил:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m},$$

который представляет собой предел отношения главного вектора массовых сил к массе частицы при стремлении массы к нулю.

В проекциях на координатные оси он может быть записан:

$$\vec{F} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}$$

X, Y, Z – проекции $\vec{F}$ на координатные оси.

$$[F] = \frac{H}{\kappa z} = \frac{\kappa z \cdot M}{c^2 \cdot \kappa z} = \frac{M}{c^2}$$

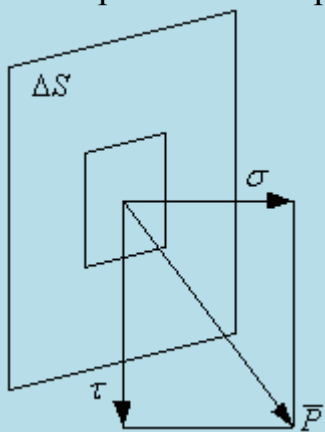
2) Поверхностные силы характеризуются напряжениями:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P'}{\Delta S}$$

- это предел отношения главного вектора поверхностной силы, приложенного к ΔS и величине этой площадки при стремлении ее к нулю. Величина напряжения зависит от выбора направления площадки.

$$[P] = \frac{H}{M^2} = Pa$$

σ - нормальное напряжение



2. Методы изучения движения жидкости

Существует два метода изучения движения жидкости: метод Эйлера и метод Лагранжа.

1. Метод Лагранжа: выделяется частица в движущейся жидкости и исследуется ее траектория в зависимости от координат и времени.

$$\begin{cases} x = f_1(a, b, c, t) \\ y = f_2(a, b, c, t) \\ z = f_3(a, b, c, t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = \frac{df_1}{dt} \\ v = \frac{dy}{dt} = \frac{df_2}{dt} \\ w = \frac{dz}{dt} = \frac{df_3}{dt} \end{cases} \quad (2)$$

a, b, c – это постоянные, которые определяют положение точки в начальный момент времени.

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

2. Метод Эйлера: задается метод распределения скорости в потоке в зависимости от координат и времени:

$$\begin{cases} u = f_1(x, y, z, t) \\ v = f_2(x, y, z, t) \\ w = f_3(x, y, z, t) \end{cases} \quad (3)$$

x, y, z – переменные Эйлера.

Чтобы определить скорости в какой-либо точке надо задать ее координаты. Поле ускорений потока можно получить если продифференцировать систему (3):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}; \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}; \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}; \end{cases}$$

Получили систему, описывающую поле ускорений.

Локальные ускорения, показывающие как изменяется скорость в какой-либо

точке потока с течением времени $(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t})$.

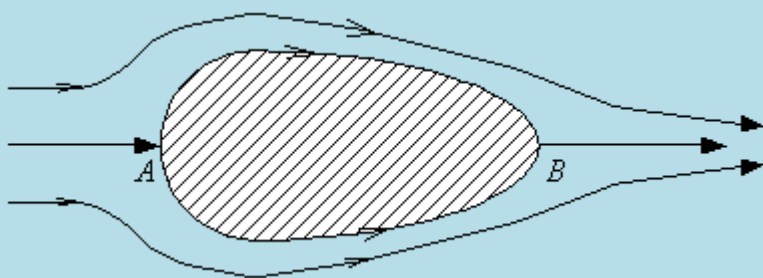
Конвективные ускорения (все остальное в правой части), связанные с перемещением точки или среды (т.е. с конвекцией). Течение может быть стационарным или нестационарным (изменяется во времени). Для стационарных задач локальные ускорения равны нулю. Самые простые течения стационарные, плоские и одномерные. Для стационарной и плоской задачи исследуется течение только по двум координатам. Если рассматривается одномерная стационар-

ная задача, тогда: $\frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} = u \frac{du}{dx}$

3. Траектория, линия тока, трубка тока, струя

Траектория – это линия, изображающая путь пройденный частицей за определенный промежуток времени.

Линия тока – это мгновенная векторная линия, в каждой точке которой в данный момент времени касательная по направлению совпадает с вектором скорости.



В стационарных задачах линии тока и траектории совпадают, т.к. нормальная составляющая скорости к линии тока равна нулю, жидкость через линию тока не перетекает. В плоских течениях коли-

чество жидкости между двумя линиями тока в любых сечениях будет одинаково. Если линии тока приближаются, то скорость потока увеличивается, и наоборот. Через каждую точку в потоке можно провести только одну линию тока, исключение составляют особые точки: критические точки. А и В – это критические точки. Поверхность непроницаемого тела – поверхность тока, а линии тока, расположенные на поверхности называется нулевыми линиями тока.

Если в жидкости провести замкнутый контур и через каждую точку провести линию тока, получим поверхность тока. Жидкость внутри поверхности называется трубкой тока. Через поверхность тока жидкость не перетекает, следова-

тельно через каждое сечение трубки тока проходит одно и то же количество жидкости. Если через каждую точку контура провести траекторию, то часть жидкости, которая ограничена поверхностью траектории называется струей. Струя совпадает с трубкой тока в стационарном течении.

4. Градиент, дивергенция, циркуляция, вихрь

1. Градиент.

Рассмотрим действие векторного оператора Гамильтона на скалярную функцию φ . Скалярная величина – это параметр, которому нельзя придать направление.

$$\nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } \varphi$$

Градиент скалярной функции – это вектор направленный по нормали к линии постоянного значения в сторону возрастания функции и модуль его равен частной производной от функции по направлению указанной нормали.

2. Дивергенция.

Рассмотрим скалярное умножение векторного оператора и двух величин скорости:

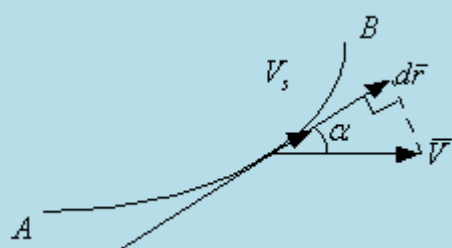
$$\nabla \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \vec{V}$$

Дивергенция является скалярной величиной, показывает расхождение вектора скорости, определяет закон относительного изменения объема. Например, если течение стационарное и жидкость несжимаемая, то при $\text{div } \vec{V} = 0$ в жидкости отсутствуют источники или стоки. При $\text{div } \vec{V} > 0$ имеется источник, при $\text{div } \vec{V} < 0$ имеется сток. Уравнение $\text{div } \vec{V} = 0$ часто используется для замыкания системы уравнений движения несжимаемой жидкости и является уравнением сплошности.

3. Циркуляция.

Характеризует интенсивность вращательного движения жидкости.

Вычисляется, например, по контуру AB:



$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{V} d\vec{r} = \int_A^B V \cos \alpha dS = \int_A^B V_s dS = \int_A^B (u dx + v dy + w dz)$$

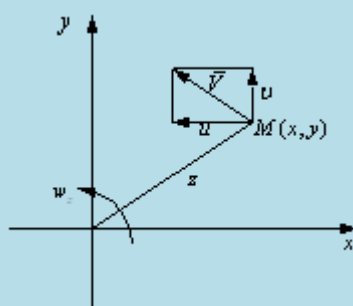
$$dS \approx dr$$

dS - элемент контура AB

4. Вихрь вектора скорости.

Рассмотрим векторное произведение оператора на вектор скорости:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \text{rot } \vec{V}$$



Рассмотрим вращение точки вокруг оси, проходящей через начало координат с угловой скоростью ω_z .

$$v = \omega_z x$$

$$u = \omega_z y$$

$$\text{rot}_z \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z$$

$$\text{rot}_x \vec{v} = 2\omega_x$$

$$\text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Если в жидкости $\text{rot} \vec{v} \neq 0$, это указывает на наличие вращающихся объемов, вихрей жидкости. Интерес представляют течения для которых $\text{rot} \vec{v} = 0$, такие течения называются безвихревыми или потенциальными. Т.к. в этом случае существует потенциал вектора скорости ϕ , который связан с составляющими вектора скорости следующими соотношениями:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w; \quad \text{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$

5. Основная теорема кинематики (первая теорема Гельмгольца)

Из теоретической механики известно, что скорость движения любой точки твердого тела складывается из поступательного вместе с некоторым полюсом и вращательного движения вокруг оси, проходящей через этот полюс: $\vec{v}_{T.T.} = \vec{v}_o + (\vec{\omega} \times \vec{r}_o)$. Для жидкой частицы основная теорема кинематики гласит, что скорость движения любой точки жидкой частицы складывается из скорости квазитвердого движения и деформационного. Квазитвердое состоит из поступательного вращательного: $\vec{v} = \vec{v}_{K.T.} + \vec{v}_{деф.}$. Для доказательства рассмотрим движение точки M с координатами x, y, z , которая находится в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и составляющая для точки M_0 скорости (u_0, v_0, w_0) , тогда раскладывая функцию скорости в ряд Тейлора и сохраняя компоненты первого порядка малости, составляющие скорости для точки M можно записать:

$$\begin{cases} u = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0(x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0(y - y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0(z - z_0) + \dots \\ v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0(x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0(y - y_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0(z - z_0) + \dots \\ w = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0(x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0(y - y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0(z - z_0) + \dots \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение. Для этого разноименные части представим следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$u = u_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) (z - z_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (y - y_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (z - z_0)$$

$$rot_x \vec{V} = -w_y - w_z \dot{S}_{xx} - \dot{S}_{yx} - \dot{S}_{zx}$$

$$u = u_0 + w_y(z - z_0) - w_z(y - y_0) + \dot{S}_{xx}(x - x_0) + \dot{S}_{yx}(y - y_0) + \dot{S}_{zx}(z - z_0)$$

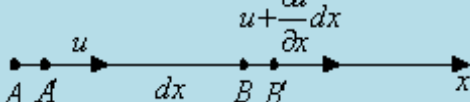
$$v = v_0 + w_x(x - x_0) - w_z(z - z_0) + \dot{S}_{xy}(x - x_0) + \dot{S}_{yy}(y - y_0) + \dot{S}_{zy}(z - z_0)$$

$$w = w_0 + w_x(y - y_0) - w_y(x - x_0) + \dot{S}_{xz}(x - x_0) + \dot{S}_{yz}(y - y_0) + \dot{S}_{zz}(z - z_0)$$

- первая теорема Гельмгольца квазитвердое движение деформационное движение

6. Тензор скоростей деформации

Компоненты $\dot{S}_{ij}$, входящие в скорость деформации, могут быть представлены в виде матрицы, которая называется тензором скоростей деформации:

$$\dot{S} = \begin{vmatrix} \dot{S}_{xx} & \dot{S}_{xy} & \dot{S}_{xz} \\ \dot{S}_{xy} & \dot{S}_{yy} & \dot{S}_{yz} \\ \dot{S}_{xz} & \dot{S}_{yz} & \dot{S}_{zz} \end{vmatrix}$$


$\dot{S}_{xx}, \dot{S}_{yy}, \dot{S}_{zz}$ - диагональные компоненты.

Тензор симметричен относительно главной диагонали $\dot{S}_{xy} = \dot{S}_{yx}$

Рассмотрим диагональные компоненты. В жидкости выделим отрезок АВ длиной dx (отрезок на оси x). Рассмотрим перемещение отрезка вдоль оси x . Скорости в точках А и В не равны. Через время dt отрезок займет положение $A'B'$. Произошла линейная деформация отрезка АВ на величину:

$$A'B' - AB = BB' - AA' = \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dt - u dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt$$

Если разделим линейную деформацию на длину отрезка:

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt, \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dt}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{S}_{xx}$$

скорость линейной деформации – скорость растяжения или сжатия линейного отрезка расположенного на оси x в направлении оси x . Аналогично:

$$\dot{S}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \dot{S}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

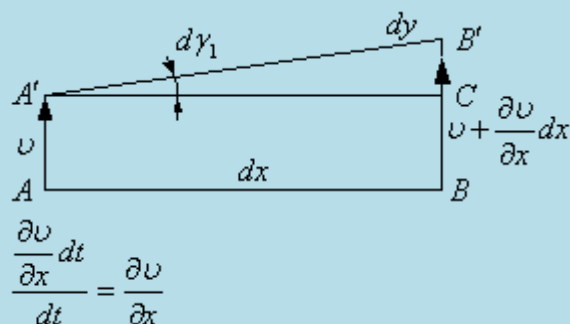
скорости относительных линейных деформаций вдоль соответствующих осей. Сумма диагональных компонент определяет дивергенцию вектора скорости, т.е.

$$\dot{S}_{xx} + \dot{S}_{yy} + \dot{S}_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div} \vec{V}$$

закон относительного изменения объема.

Рассмотрим перемещение отрезка АВ расположенного на оси x и длиной dx в направлении оси dy .

Ввиду малости угла



$$d\gamma_1 \approx \tan d\gamma_1 = \frac{B'C}{A'C} = \frac{B'B - A'A}{A'C} = \frac{(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)dt - vdt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

угловая деформация линейного отрезка в направлении оси y .

скорость угловой деформации или скорость скашивания в направлении оси y .

Если отрезок расположить на оси y , то $\frac{\partial u}{\partial y}$ - скорость скашивания в направлении оси x . $\frac{1}{2}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) = \dot{\epsilon}_{xy}$ - средняя скорость угловой деформации в плоскости xy .

Таким образом недиагональные компоненты характеризуют скорости скашивания или угловых деформаций в соответствующих плоскостях.

7. Уравнение сплошности

Уравнение сплошности – это уравнение закона сохранения массы:

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

Выделим в жидкости элементарный объем $\Delta \tau$ с плотностью ρ .

Следовательно:

$$\frac{d}{dt}(\rho \delta \tau) = 0$$

$$\delta \tau \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d\delta \tau}{dt} = 0 \quad / : (\rho \cdot \delta \tau)$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta \tau} \frac{d\delta \tau}{dt} = 0$$

Второй член полученного уравнения выражает закон относительного изменения объема, т.е. дивергенцию. [6,7,8]

Плотность в общем случае зависит от координат и времени: $\rho = f(x, y, z, t)$

Поэтому:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

уравнение сплошности (неразрывности).

Если течение стационарное, то уравнение упрощается: $\text{div}(\rho \vec{V}) = 0$

Если жидкость несжимаемая, т.е. $\rho = \text{const}$, то $\text{div} \vec{V} = 0$

8. Нормальное и касательное напряжение, действующие в движущейся жидкости

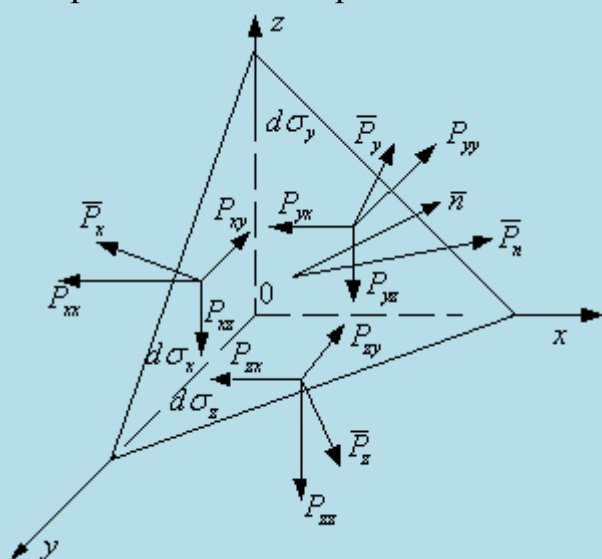
Закон сохранения количества движения для неизолированной системы может быть записан в виде:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}$$

где $\vec{K}$ - главный вектор количества движения системы

$\vec{R}$ - главный вектор внешних сил, действующих на систему

В жидкости выделим элементарный тетраэдр с гранями $d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\sigma_n$. Индекс показывает перпендикулярно какой оси расположены грани, $d\sigma_n$ - наклонная грань. К граням приложены соответствующие напряжения $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z, \vec{P}_n$ (не перпендикулярные граням). Масса тетраэдра dm . На тетраэдр действуют массовые и поверхностные силы. Массовые характеризуются вектором плотности $\vec{F}$, поверхностные – напряжениями.



$$\frac{d}{dt}(\vec{V}_c \cdot dm) = \vec{F}' + \vec{P}'$$

$\vec{V}_c$ - скорость центра инерции тетраэдра

$$dm \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}dm + \vec{P}_n d\sigma_n - \vec{P}_x d\sigma_x - \vec{P}_y d\sigma_y - \vec{P}_z d\sigma_z$$

$dm \sim dx dy dz$ - третий порядок малости

$d\sigma_x \sim dy dz$ - второй порядок малости

Членами третьего порядка малости пренебрегаем.

$$\vec{P}_n d\sigma_n - \vec{P}_x d\sigma_x + \vec{P}_y d\sigma_y + \vec{P}_z d\sigma_z \parallel d\sigma_n$$

$$\underbrace{\quad}_{n_x} d\sigma_x = d\sigma_n \cos(\angle x \wedge n) \text{ и т.д.}$$

n_x

Получим связь напряжений, действующих на грани выделенного тетраэдра:

$$\vec{P}_n = n_x \vec{P}_x + n_y \vec{P}_y + n_z \vec{P}_z$$

В проекциях на координатные оси это уравнение может быть переписано:

$$\begin{cases} P_{nx} = n_x P_{xx} + n_y P_{yx} + n_z P_{zx} \\ P_{ny} = n_x P_{xy} + n_y P_{yy} + n_z P_{zy} \\ P_{nz} = n_x P_{xz} + n_y P_{yz} + n_z P_{zz} \end{cases}$$

В записанной системе P_{xx}, P_{yy}, P_{zz} называются нормальными напряжениями, а P_{xy}, P_{yx} и т.д. называются касательными напряжениями. Все напряжения могут быть записаны в матричной форме в виде симметричного тензора напряжений:

$$P = \begin{vmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{vmatrix}$$

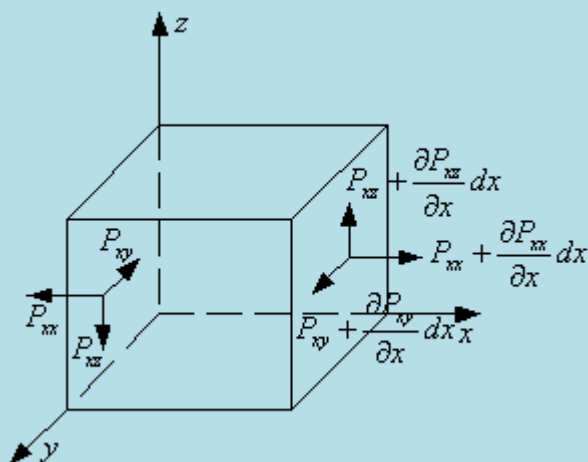
Первый индекс определяет ось, относительно которой расположена грань, второй – ось на которую проецируется напряжение.

9. Уравнение движения сплошной среды в напряжениях

Рассмотрим элементарный параллелепипед с ребрами dx, dy, dz . Объем его $d\tau = dx dy dz$. На него действуют массовые и поверхностные силы определяемые главным вектором внешних сил $\bar{K} = \bar{F} + \bar{P}'$. К параллелепипеду применим закон сохранения количества движения:

$$\frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{K}$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{V} \cdot \rho d\tau) = \bar{F} \rho d\tau + \bar{P}'$$



Для определения главного вектора поверхностных сил рассмотрим все силы, дающие проекцию на ось x . Для граней перпендикулярных x проекцию дают только силы, создаваемые нормальными напряжениями. Поэтому равнодействующая этих сил равна:

$$-P_{xx} dy dz + (P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx) dy dz = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} d\tau$$

Аналогично для граней перпендикулярных z получим равнодействующую равную:

$$\frac{\partial P_{zx}}{\partial z} d\tau$$

Равнодействующая поверхностных сил в проекции на ось x равна:

$$(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}) d\tau$$

Тогда закон сохранения количества движения в проекции на x можно записать:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho d\tau \frac{du}{dt} &= \rho d\tau X + (\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z}) d\tau \end{aligned} \right.$$

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho Y + \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right)$$

$$\rho \frac{dW}{dt} = \rho Z + \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right)$$

Полученная система называется системой уравнений движения сплошной среды в напряжениях. В левой части стоит полная производная от скоростей, которые могут быть расписаны через локальные и конвективные составляющие ускорения. При определенных условиях левая часть значительно упрощается (стационарное, двухмерное или одномерное течение).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Т.к. } \bar{P}_x = P_{xx}\bar{i} + P_{xy}\bar{j} + P_{xz}\bar{k} \\ \bar{P}_y = P_{yx}\bar{i} + P_{yy}\bar{j} + P_{yz}\bar{k} \\ \bar{P}_z = P_{zx}\bar{i} + P_{zy}\bar{j} + P_{zz}\bar{k} \end{array} \right.$$

систему можно записать в виде одного уравнения в векторной форме записи:

$$\rho \frac{d\bar{V}}{dt} = \rho \bar{F} + \frac{\partial \bar{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{P}_z}{\partial z}$$

10. Напряжения, действующие в идеальной жидкости

В идеальной жидкости отсутствуют силы трения, следовательно касательные напряжения равны нулю. Применительно к элементарному тетраэдру проекция напряжения, приложенного к произвольной наклонной грани на ось x равна:

$$P_{xx} = P_{xx} \cdot n_x + P_{yx} \cdot n_y + P_{zx} \cdot n_z$$

С другой стороны:

$$P_{xx} = P_x n_x \Rightarrow P_{xx} n_x = P_x n_x \Rightarrow P_{xx} = P_x$$

Аналогично для проекций на y :

$$P_{xy} = P_{xy} \cdot n_x + P_{yy} \cdot n_y + P_{zy} \cdot n_z$$

$$P_{xy} = P_x n_y \Rightarrow P_{xy} = P_x \text{ и } P_{yz} = P_x$$

$$P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P_x = -P$$

Таким образом в идеальной жидкости величина нормального напряжения в любой точке не зависит от направления площадки к которой напряжение приложено. В идеальной жидкости величина нормального напряжения в точке называется гидродинамическим давлением в этой точке. Модель идеальной жидкости упростила постановку и решение многих задач, в которых влиянием сил трения можно пренебречь.

Знак «минус» ставится, т.к. жидкость оказывает давление на выделенный объем в направлении противоположном внешней нормали.

11. Уравнение движения идеальной жидкости (Эйлера)

Для вывода воспользуемся уравнениями движения в напряжениях:

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho X + \frac{\partial P_m}{\partial x} + \frac{\partial P_{ym}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zm}}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho Y - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \rho \frac{dw}{dt} = \rho Z - \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

- система уравнения Эйлера для идеальной жидкости.

Справедлива, как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости. Если жидкость сжимаемая, то необходимо ввести функцию координаты от времени: $\rho = f(x, y, z, t)$

Если жидкость несжимаемая, то $\rho = const$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P$$

12. Уравнение движения идеальной жидкости (Эйлера) в форме Громека

Все преобразования выполним на первом уравнении:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \pm (v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + w(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2) + \text{rot } \vec{V} \cdot w - \text{rot } \vec{V} \cdot u$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \text{rot}_z \vec{V} - \text{rot}_y \vec{V} - V^2 + (\text{rot } \vec{V} \times \vec{V})_x$$

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{V^2}{2}) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\frac{V^2}{2}) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (\frac{V^2}{2}) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

- система уравнений движения для и.ж. в форме Громека

Рассмотрим далее движение, предполагая, что массовая сила имеет потенциал и течение баротропное.

Первое предположение утверждает, что у массовых сил имеется потенциал, связанный соотношениями с массовыми силами:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

U - потенциал массовых сил.

Второе: баротропным считается течение, у которого ρ считается только функцией давления.

Например, баротропными течением является:

1) $\rho = \text{const}$ – газ или жидкость несжимаемы

$$\frac{P}{\rho} = \text{const}$$

2) движение среды изотермическое -

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{const}$$

3) движение среды адиабатное -

Условие баротропности предполагает, что существует некоторая функция P , зависящая от давления, которая определяется выражением:

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$$

Функция P связана с p и ρ соотношениями:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Подставим в систему уравнений Громека потенциал массовых сил и функцию P :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_x = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_y = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) + \text{rot}(\vec{V} \times \vec{V})_z = 0 \end{cases}$$

- система уравнений Эйлера в форме Громека

Достоинство системы заключается в том, что отдельно выделен ротор, который при определенных условиях может быть равен нулю и система значительно упрощается. Последний член равен нулю, если: 1) $\vec{V} = 0$ - статическая задача; 2) $\text{rot} \vec{V} = 0$ - течение безвихревое или потенциальное.

Сумма, стоящая во второй компоненте, имеет определенный физический смысл. В векторной форме система может быть записана в виде одного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + U + P \right) + \text{rot} \vec{V} \times \vec{V} = 0$$

13. Теорема Бернулли

Рассмотрим стационарное баротропное течение под действием массовых сил, т.е. можно записать:

$$\text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + U + P\right) + \text{rot}\vec{V} \times \vec{V} = 0 \quad | \cdot \vec{V}$$

умножим уравнение скалярно на вектор скорости, тогда последний член равен нулю, т.к. идет скалярное перемножение перпендикулярных векторов.

$$\vec{V} \cdot \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + U + P\right) = 0 \quad | \cdot \frac{\vec{V}}{V}$$

$$V \cdot \left[\frac{\vec{V}}{V} \cdot \text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + U + P\right) \right] = 0$$

$$\frac{\vec{V}}{V}$$

$\frac{\vec{V}}{V}$ - единичный вектор в направлении вектора скорости. Вектор скорости направлен по касательной к линии тока или к траектории, т.к. течение стационарное, следовательно:

$$\frac{d}{dS}\left(\frac{V^2}{2} + U + P\right) = 0 \quad - \text{производная по направлению.}$$

$$\frac{V^2}{2} + U + P = E = \text{const}$$

выражение отражает теорему Бернулли: при стационарном баротропном течении идеальной жидкости под действием потенциальных массовых сил сумма кинетической энергии единицы объема, функции давления приведенного к единице массы потенциала массовых сил сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока.

Если бы скалярно умножили исходное уравнение на вектор угловой скорости, то получили бы аналогичный результат вдоль вихревой линии.

Если течение потенциальное, то $\text{rot}\vec{V} = 0$ и сразу же получается:

$$\text{grad}\left(\frac{V^2}{2} + U + P\right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{V^2}{2} + U + P = \text{const}$$

во всем потоке, т.е. трехчлен Бернулли сохраняет постоянное значение во всей области потенциального потока.

Рассмотрим потенциальное течение несжимаемой жидкости под действием сил тяжести. Т.к. жидкость несжимаема то $\rho = \text{const}$:

$$P = \int_{P_0}^P \frac{dp}{\rho} = \frac{P - P_0}{\rho} = \frac{P}{\rho} + \text{const}$$

У сил тяжести потенциал равен: $U = g \cdot z$, z - координата.

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = \text{const} \quad | \cdot \rho \Rightarrow \frac{\rho V^2}{2} + p + \gamma z = p_0 = \text{const} \quad (1), \quad \gamma = g\rho -$$

удельный вес

Все эти составляющие имеют размерность давления и называются напорами: $\frac{\rho V^2}{2}$ – скоростной или динамический напор; p – пьезометрический напор; γz – геометрический напор; p_o – полный напор

При стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости полный напор, равный сумме $\frac{\rho V^2}{2} + p + \gamma z$, сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока, а при потенциальном течении во всей области потока.

В задачах, в которых можно пренебречь влиянием геометрического напора,

уравнение Бернулли упрощается и приобретает вид: $p_o = \frac{\rho V^2}{2} + p$

Уравнение (1) разделим на γ , тогда:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = H = \text{const}$$

все компоненты измеряются в метрах и называются высотами: $\frac{V^2}{2g}$ – скоростная

высота, $\frac{p}{\gamma}$ – пьезометрическая высота, z – нивелирная высота, H – гидравлическая высота. При стационарном движении идеальной несжимаемой жидкости высота

$$H = \sum \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right)$$

сохраняет постоянное значение вдоль любой линии тока (или вихревой линии), а при потенциальном течении во всем токе.

14. Основные понятия и определения потенциальных течений

Потенциальные течения – это течения, у которых $\text{rot} \vec{V} = 0$ во всем потоке, следовательно существует функция ϕ , называемая потенциалом, зависит $\phi(x, y, z, t)$ и связана с составляющими U соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right. \quad \vec{V} = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + w \cdot \vec{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

то есть

Записанные соотношения могут быть записаны и для любой другой функции, которая отличается от ϕ на константу: $\phi' = \phi + c$. Таким образом, уравнение по-

тенциала определяется с точностью до константы. Геометрическое место точек с одинаковым значением φ образуют эквипотенциальные поверхности, уравнения которых: $\varphi(x, y, z, t) = const$. Так как $\vec{V} = grad \varphi$, следовательно вектор U расположен по перпендикулярам в любой точке эквипотенциальной поверхности. Так как вектор U касателен к линии тока, то линии тока перпендикулярны эквипотенциальной поверхности.

Рассмотрим стационарное плоское течение, то есть $\varphi = \varphi(x, y)$, тогда

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{и} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Уравнение сплошности имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Таким образом, потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно является гармонической функцией.

Введем в рассмотрение функцию ψ , связанную с составляющими U уравнениями:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{и} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению сплошности, т.к.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

ψ – функция тока, она также определяется с точностью до постоянной.

Уравнение $\psi(x, y) = const$ называется уравнением линии тока.

В плоских течениях эквипотенциальные поверхности дают проекции на плоскость (x, y) в виде линии, поэтому часто в задачах рассматриваются эквипотенциальные линии которые перпендикулярны линии тока.

В потенциальном потоке $rot \vec{V} = 0$, в плоском течении $rot \vec{V}_z = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} rot \vec{V} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ rot \vec{V}_z = 0 \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{функция тока } \psi \text{ гармоническая}$$

Сравнение потенциала φ и ψ позволяет записать:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

условие Коши-Римана.

15. Комплексный потенциал, комплексная скорость

Из теории комплексной переменной известно, что если две функции φ и ψ , зависящие от x и y , удовлетворяют условиям Коши-Римана, то комплексная величина $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ будет не просто зависеть, а являться функцией от комплексной переменной $z = x + iy = re^{i\theta}$, то есть существует некоторая функция $w(z)$, действительной частью которой является φ , а мнимой ψ . $w(z) = \varphi + i\psi$.

Функция $w(z) = \varphi + i\psi$ имеет большое значение при изучении плоских потенциальных течений и называется комплексным потенциалом или характеристической функцией течения.

Так как w является аналитической функцией от z , то ее производная не зависит от направления дифференцирования, а зависит только от положения точки в пространстве, то есть

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial iy}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i v$$

по условию Коши-Римана:

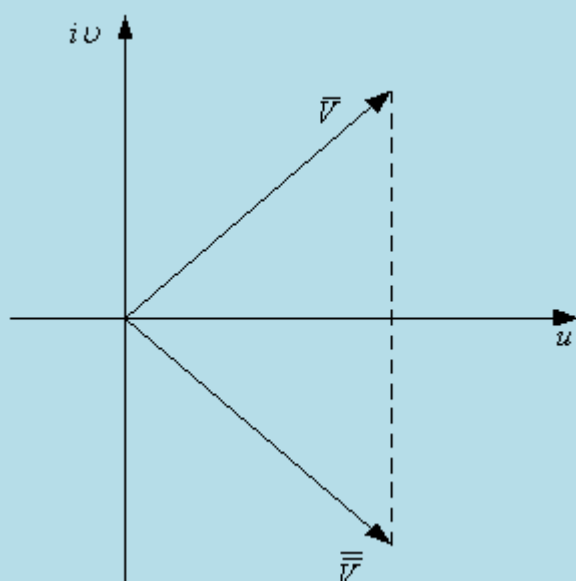
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial (iy)} = -i \frac{\partial w}{\partial y} = -i \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = u - i v$$

Если вектор U разложить в комплексной плоскости годографа U , то $\bar{V} = u + iv$.

Производная от комплексного потенциала дает зеркальное изображение комплексной U относительно действительной оси. Обозначим ее как

$$\bar{V} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$



В теории комплексной переменной числа $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называют сопряженными, назовем $\bar{V}$ как сопряженную U . Таким образом, производная от комплексного потенциала определяет $\bar{V}$. Таким образом, если изменяется какое-то плоское потенциальное течение, то для него можно подобрать уравнение комплексного потенциала, проанализировать его и просчитать составляющие U в любой точке. С другой стороны для любого потенциала можно определить вид течения.

16. Частные случаи плоских потенци-

альных течений

1. Плоско параллельный поток:

Рассмотрим комплексный потенциал - $w(z) = az$, где a – действительное число
 $w(z) = a(z + iy) = ax + iay$ и $w(z) = \varphi + i\psi$

$\varphi = ax$ - семейство прямых, параллельных оси y . $\psi = ay$ - уравнение функции тока.

Линии тока $ay = \text{const}$ - семейство прямых, параллельных оси x . $ax = \text{const}$ - уравнение эквипотенциальных поверхностей.

Для построения поля скоростей возьмем производные

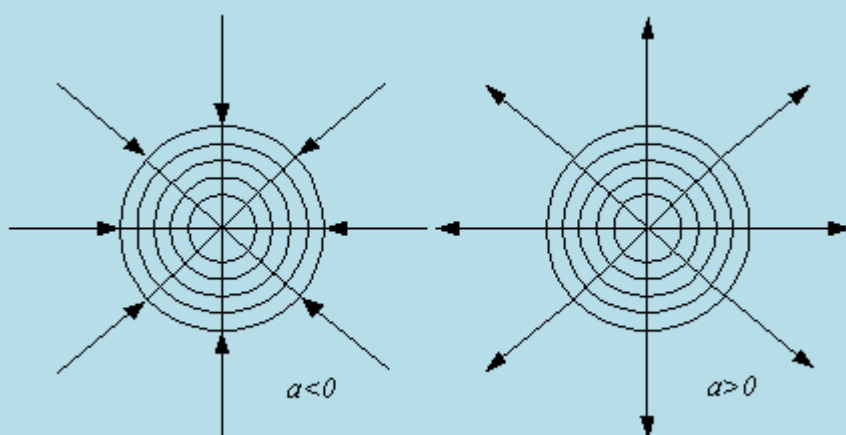
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = a \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v = 0$$

Таким образом, рассмотренный потенциал описывает плоское течение потока вдоль оси x . Величину a можно рассматривать как скорость внешнего (набегающего) потока, $a = V_\infty$. $w(z) = V_\infty z$

2. Источник и сток.

Рассмотрим комплексный потенциал $w(z) = a \ln z$, a – действительное число ($a \in \mathbb{R}$), тогда

$$w(z) = a \ln(r \cdot e^{i\theta}) = a \ln r + a \ln e^{i\theta} = a \ln r + ia\theta$$



Уравнение для потенциала: $\varphi = a \ln r$, $a \ln r = \text{const}$ - эквипотенциальные линии, семейство окружностей с центром в точке $(0,0)$.

$\psi = a\theta$ - уравнение функций тока. $a\theta = \text{const}$ - семейство прямых, проходящих через точку $(0,0)$.

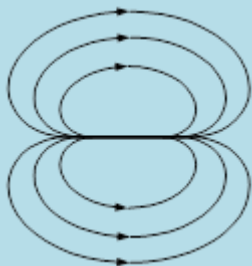
Характер (вид) течения определяет знак при a . Если $a > 0$, то это источник, если $a < 0$, то это – сток.

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = \frac{a}{r}$$

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = 0$$

$dQ = 1 \cdot V_r r d\theta$ - объемный расход;

$$Q = \int_0^{2\pi} V_r r dQ = \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} r dQ = 2\pi a \Rightarrow a = \frac{Q}{2\pi} \rightarrow w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z; \quad V_r = \frac{Q}{2\pi}$$



Если разместить источник и сток рядом то получится следующая картина.

Если их свести вместе, то получится диполь.

3. Рассмотрим комплексный потенциал:

$$w(z) = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2+y^2}$$

Уравнение эквипотенциальных линий $x^2 + y^2 = cx$ - семейство окружностей, проходящих через точку $(0,0)$ с центрами на оси x .

Уравнение для линий тока $x^2 + y^2 = cy$ - семейство окружностей, проходящих через точку $(0,0)$ с центрами на оси y .

4. Рассмотрим комплексный потенциал вида:

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(re^{i\theta}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} i \theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

Γ – циркуляция вектора скорости – круговое течение потока.

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta = \text{const} \quad - \text{семейство прямых, проходящих через точку } (0,0).$$

Это уравнение эквипотенциальных линий.

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad - \text{функция тока};$$

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \text{const} \quad - \text{линии тока – семейство окружностей с центром в } (0,0).$$

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad - \text{радиальная скорость};$$

$$V_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

Исследованный потенциал определяет течение, которое называется потенциальным вихрем.

Окружная скорость изменяется по гиперболе.

17. Безциркуляционное обтекание круглого цилиндра

Рассмотрим комплексный потенциал, представленный в виде суммы двух, один из которых – поток плоскопараллельного течения, другой – диполя.

$$w(z) = w(z)_1 + w(z)_2 = V_\infty z + \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} = V_\infty(x+iy) + \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{1}{x+iy} = V_\infty(x+iy) + \frac{m}{2\pi} \cdot \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= V_\infty x \left(1 + \frac{m}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\right) + i V_\infty y \left(1 - \frac{m}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\right); \quad V_\infty x \left(1 + \frac{m}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\right) = \varphi, \quad V_\infty y \left(1 - \frac{m}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\right) = \psi$$

Если приравнять φ к константе получим уравнение эквипотенциальной линии. $\psi = \text{const}$ - линии тока, $\psi = 0$ - уравнение для нулевой линии тока. Если принять $\psi = 0$, то получим уравнение для нулевой линии тока:

$$V_\infty y \left(1 - \frac{m}{2\pi V_\infty} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

Оно разделится на два: 1) $y=0$;

$$x^2 + y^2 = \frac{m}{2\pi V_\infty} = r_0^2$$

2) - окружность с радиусом

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{m}{2\pi V_\infty}}$$

В идеальной жидкости трения нет, поэтому можно заменять любую линию тока, и характер течения не изменится, следовательно, если заменить нулевую линию тока твердой поверхностью, то получится задача обтекания цилиндра $r = r_0$ плоским потоком. Представим функцию тока и потенциал в полярной системе координат:

$$\varphi = V_\infty r \cos \theta \left(1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right)$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2; \quad r_0^2 = \frac{m}{2\pi V_\infty}; \quad \psi = V_\infty r \sin \theta \left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) \end{aligned}$$

Рассмотрим составляющие скорости:

$$V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

$$V_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -V_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2}\right)$$

Значит: $V_r = 0$, $V_\theta = -2V_\infty \sin \theta$ то есть окружная составляющая скорости изменяется по синусоиде (при $\theta = 0$, $\theta = 180^\circ$ - $V_\theta = 0$). Точки А и В передняя и задняя критические точки соответственно.

Максимальные значения окружной скорости $V_\theta^{\max} = 2V_\infty$ при 90° и 270° - точки С и Д.

Нулевая линии тока проходит из $(-\infty)$ в передней критической точке А, раздваивается огибает цилиндр, соединяется в задней критической точке В и уходит в $(+\infty)$.

Для определения распределения давления по поверхности воспользуемся уравнением Бернулли:

$$p_\infty + \frac{\rho V_\infty^2}{2} = p + \frac{\rho V^2}{2}$$

Введем в рассмотрение коэффициент давления $\bar{P}$, показывающий безразмерное избыточное давление на поверхности:

$$\bar{P} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} = 1 - \frac{V^2}{V_\infty^2}$$

На поверхности существует только окружная скорость, следовательно, для поверхности:

$$\bar{P} = 1 - \frac{V_\theta^2}{V_\infty^2} = 1 - \frac{(-2V_\infty \sin \theta)^2}{V_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

Из полученной формулы следует, что давление на поверхности максимально в критических точках А и В ($\bar{P} = 1$) и минимально в точках С и Д ($\bar{P} = -3$).

Таким образом, распределение давлений симметрично относительно осей x и y . Результирующая сил давления на цилиндр равна нулю. Цилиндр не сносится потоком, его $R=0$.

Этот парадокс называется парадоксом Эйлера-Даламбера и присущ только для идеальной жидкости. Для реальных жидкостей обтекание цилиндра будет только при очень низких скоростях ($Re \leq 5$).

Обычно обтекание цилиндра происходит с отрывами в задней части цилиндра, в результате, давление в лобовой зоне всегда больше, чем в кормовой.

Распределение давления описывается экспериментальными линиями, которые отличаются от теоретических. С увеличением скорости распределение давления стремится как бы к теоретическому, и $V_\infty^I < V_\infty^{II}$

18. Обобщенный закон Ньютона

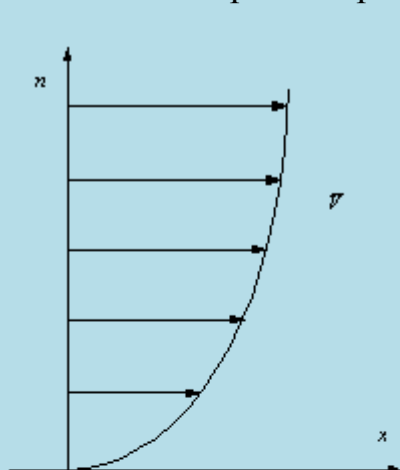
Ньютон установил связь напряжения трения между слоями движущейся жидкости с поперечным градиентом скорости

$$\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}; \quad \mu = \left[\frac{H \cdot c}{M^2} \right]$$

μ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом динамической вязкости.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \left[\frac{M^2}{c} \right] \quad - \text{коэффициент кинематической вязкости.}$$

Касательное трение при движении потока вдоль оси x может быть записано в



$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

виде:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

При движении потока вдоль оси y :

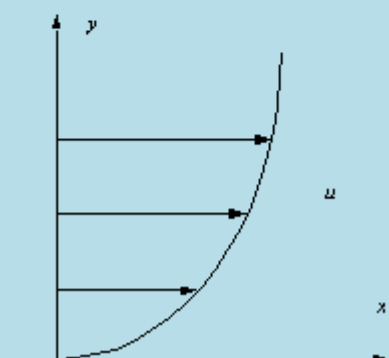
При движении потока в плоскости xu в произвольном направлении:

$$P_{xy} = P_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$P_{xz} = P_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$P_{yz} = P_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Записанные уравнения выражают обобщенный закон Ньютона для касательных напряжений. В скобках стоят величины, связанные с недиагональными ком-



понентами тензора скоростей деформации. Они выражают скорости скашивания углов в соответствующих плоскостях. Таким образом касательные напряжения являются линейными функциями от скоростей скашивания углов в соответствующих плоскостях.

Определим нормальное напряжение вязкой жидкости. Если вязкость отсутствует, то нормальное напряжение не зависит от выбора направления площадки.

Нормальные напряжения вязкой жидкости выразим в виде суммы:

$$P_{xx} = A + \tau_{xx}$$

$$P_{yy} = A + \tau_{yy}$$

$$P_{zz} = A + \tau_{zz}$$

Компоненты, учитывающие вязкость связаны с диагональными компонентами тензора скоростей деформации соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad P_{xx} = A + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow P_{yy} = A + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad P_{zz} = A + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = A + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

складываем

Среднее арифметическое нормальных напряжений, приложенных в точке в трех взаимно перпендикулярных направлениях, есть давление потока в этой точке:

$$A = -P - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} \\ P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} \\ P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} \end{array} \right.$$

обобщенный закон Ньютона для нормальных напряжений

$$P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V}$$

Жидкости, которые подчиняются записанным уравнениям называются ньютоновскими жидкостями. Вязкие растворы, не подчиняющиеся уравнениям называются неньютоновскими, а раздел их изучающий – реология.

19. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости (Навье-Стокса)

Рассмотрим изотермическое движение вязкой несжимаемой жидкости:

$$\mu = \text{const}, \quad \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

В этом случае нормальные напряжения примут вид:

$$\begin{cases} P_{xx} = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ P_{yy} = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ P_{zz} = -P + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Уравнения движения получим из уравнения движения среды в напряжениях:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \rho X + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x}(-P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \mu \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}) + \mu \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}) = \\ &= \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial v}{\partial y}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial w}{\partial x}) = \\ &= \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) + \mu \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}) = \rho X - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \\ \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \nabla^2 w \end{cases} \quad \text{— система уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости}$$

Отличается от уравнений Эйлера тем, что в правой части появляется дополнительный член, который учитывает влияние сил вязкости.

Полученная система содержит 4 неизвестных u, v, w, P . Для ее замыкания обычно используется уравнение сплошности. Полученная система может быть использована для решения бесконечного количества задач. Для перехода к конкретной задаче и ее решения, задачу необходимо описать с помощью условий однозначности. Условия однозначности состоят из четырех видов:

1) геометрические условия – задается геометрия изучаемой системы (канала и т.д.)

2) физические условия однозначности – задается вид движения жидкости и значения ее основных параметров ρ, μ, ν .

3) граничные условия – определяют условия течения на границе рассматриваемой системы. Часто в качестве граничных условий используют условия прилипания потока, т.е. скорость потока на поверхности равна 0. Скорость набегающего потока задается V_∞ или среднемассовая скорость u_m или скорость на границе пограничного слоя.

4) Временные или начальные граничные условия задаются только для нестационарных задач и определяют особенности течения потока в начальный момент времени.

20. Подобие гидродинамических явлений

Решение системы Навье-Стокса даже для простых задач представляет значительную сложность, поэтому большое значение приобретает гидродинамический эксперимент, вопросы моделирования процесса. При моделировании необходимо учитывать влияние большого количества факторов на протекание процесса, чтобы полученные результаты на моделях можно было переносить на действующие образцы. Эту сложность в значительной степени позволяет устранить теория подобия, которая утверждает, что влияние отдельных факторов можно рассматривать в совокупности объединяя их в безразмерные комплексы – критерии подобия. Эти критерии получаются путем перевода размерных уравнений движения в безразмерные. Все критерии имеют определенный физический смысл. Анализ задачи приобретает следующие особенности: 1) уменьшается число переменных, т.к. количество критериев всегда меньше количества образующих их величин; 2) ярче выделяются физические особенности рассматриваемой задачи; 3) анализ приобретает обобщенный характер, т.к. одно и то же значение комплекса может быть получено путем бесконечного варьирования образующих величин.

Гидродинамические явления будут подобными если течения протекают в геометрически подобных системах. Наблюдается подобие полей скоростей и других важных физических характеристик. Константы пропорциональности называются константами подобия.

Выясним условия, при которых течения описываемые системой Навье-Стокса будут подобными. По геометрическим условиям однозначности должен быть задан какой-то характерный линейный размер:

1) l_0 ; 2) по физическим условиям однозначности должны быть определены ρ, ν ; 3) по граничным условиям должна быть определена V_0 ; 4) по начальным условиям задано характерное время t_0 , например период определяющий темп внешних воздействий

Таким образом в уравнениях зависимые переменные определяются как функции независимых переменных x, y, z, t и параметров задающих условие однозначности l_0, ρ, ν, V_0, t_0

$$u, v, w, P = f(x, y, z, t, l_0, \rho, \nu, V_0, t_0)$$

Приведем уравнение движения к безразмерному виду методом масштабных преобразований. Будем относить физические величины к одномерным параметрам

$$\bar{u} = \frac{u}{x_0}; \quad \bar{v} = \frac{v}{y_0}; \quad \bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

В качестве масштаба для массовых сил примем ускорение свободного падения.

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}; \quad \bar{y} = \frac{y}{l_0}; \quad \bar{X} = \frac{X}{g}; \quad \bar{Y} = \frac{Y}{g}$$

Выразим размерные величины через их масштабы в Уравнении Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{V_0}{t_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{V_0^2}{l_0} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) &= g \bar{X} - \frac{1}{\rho l_0} \frac{\partial P}{\partial \bar{x}} + \nu \frac{V_0}{l_0^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad | \cdot \frac{l_0}{V_0^2} \\ \frac{l_0}{V_0 t_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= \frac{g l_0}{V_0^2} \bar{X} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{P}{\rho V_0^2} \right) + \frac{\nu}{V_0 l_0} \nabla^2 \bar{u} \\ \frac{1}{H_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{Fr} \bar{X} - \frac{\partial}{\partial \bar{x}} (Eu) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u} \end{aligned}$$

Аналогично могут быть получены составляющие системы уравнений вдоль оси y и z .

$$\frac{V_0}{l_0} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

Уравнение сплошности после приведения к безразмерному виду не изменится. После приведения уравнения движения к безразмерному виду появились безразмерные комплексы.

$$H_0 = \frac{V_0 t_0}{l_0} \quad - \text{критерий динамической гомохронности};$$

$$Fr = \frac{V_0^2}{g l_0} \quad - \text{критерий Фруда};$$

$$Eu = \frac{P}{\rho V_0^2} \quad - \text{число Эйлера}; \quad Re = \frac{V_0 l_0}{\nu} \quad - \text{критерий Рейнольдса}.$$

После приведения уравнений к безразмерному виду изменился их физический смысл, т.к. один и тот же вид уравнений с подобными условиями будут соответствовать не единственному условию, а целой группе подобных явлений. В соответствии с теоремой подобия Кирпичева-Гухмана гидродинамические явления будут подобными если они: 1) описываются одной системой дифуравнений; 2) имеют подобные условия однозначности; 3) имеют численно равные критерии подобия

21. Критериальные уравнения. Критерии и числа подобия

После приведения уравнения Навье-Стокса к следующему виду они стали содержать следующие типы переменных: 1) безразмерные независимые переменные $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$; 2) безразмерные зависимые переменные $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, Eu$; 3) безразмерные критерии – комплексы, состоящие из величин заданных по условиям однозначности Re, H_0, Fr .

После приведения к безразмерному уравнению изменился характер уравнений. Уравнения приобрели обобщенный вид, т.к. одно и то же значение любого критерия может быть получено путем бесконечного варьирования входящих величин. Уравнения могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \bar{u} = f_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, Re, H_0, Fr) \\ \bar{v} = f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, Re, H_0, Fr) \\ \bar{w} = f_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, Re, H_0, Fr) \\ Eu = f_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t}, Re, H_0, Fr) \end{cases}$$

- система обобщенных или критериальных уравнений

Критерии подобия могут быть двух видов: 1) состоящие из разноименных параметров; 2) имеющие периодический вид, т.к. представляют собой отношение одноименных параметров. Пример: для труб:

$$\frac{l}{d}.$$

Относительные переменные также могут быть двух видов:

1) отношение переменной к одноименной величине, заданной по условию однозначности:

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}; \bar{u} = \frac{u}{V_0}$$

2) если по условию однозначности нельзя задать одноименную величину, то строится комплекс приводящий величину к безразмерному виду – число подобия:

$$Eu = \frac{P}{\rho V_0^2}$$

В числа подобия входят определяемая величина. Критерий подобия состоит из заранее известных величин, заданных по условиям однозначности..

$$Re = \frac{V_0 l_0}{\nu}$$

1) Критерий Рейнольдса $Re = \frac{V_0 l_0}{\nu}$ - определяет соотношение сил инерции и вязкости в однородном потоке. Это важнейший гидродинамический критерий для вынужденного движения. При движении потока в нем возникают возмущения, которые исходят от стенок канала или вносятся в поток извне. Влияние возмущений зависит от соотношения сил. Если преобладают силы вязкости возмущения гаснут и поток не меняет своей структуры. Если преобладают силы инерции возмущения развиваются дальше, поток меняет течение, изменяется его структура. Граница соотношения сил определяется по значению $Re_{кр}$. Если $Re < Re_{кр}$ преобладают вязкие силы, $Re > Re_{кр}$ – силы инерции. Re характеризует движение при соизмеримости инерции и

вязкости. Если в потоке преобладает какой-то один вид сил характер перестает зависеть от величины Re . В этом случае говорят, что течение автомодельно относительно критерия Re .

$$H_0 = \frac{V_0 t_0}{l_0}$$

2) Критерий гидродинамической гомохронности H_0 - определяет соотношение между периодом темпа внешних воздействий на поток и периодом перестройки скоростного поля. Используют только для нестационарных задач.

$H_0 = \frac{t_0}{l_0 / V_0}$ - время, за которое проходит частица, движущаяся со скоростью V_0 , путь l_0 . Если в задаче время подлежит определению, то рассматривается не критерий, а число Струхала:

$$Sh = \frac{V_0 t}{l_0}$$

3) Критерий Фруда $Fr = \frac{V_0^2}{gl_0}$ - определяет соотношение между силами инерции и тяжести в потоке. Используется только в задачах, в которых гравитационные эффекты имеют важное значение. Однако в таких задачах часто сложно задать характерную скорость (при естественной конвекции), поэтому строится критерий, в котором исключается скорость:

$$\frac{Re^2}{Fr} = \frac{V_0^2 l_0^2 gl_0}{\nu^2 V_0^2} = \frac{gl_0^3}{\nu^2} = Ga$$

- критерий Галилея.

При гравитационном движении важное значение имеет параметрический критерий:

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

Причем ρ и ρ_0 – плотности не только в разных точках, но и в различных фазах.

$Ga \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{gl_0^3 \Delta \rho}{\rho \nu^2} = Ar$ - критерий Архимеда.

При гравитационном течении однофазной жидкости движение возникает в результате расширения:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta T}{T} = \beta \Delta T$$

β - коэффициент объемного расширения.

$\beta \frac{gl_0^3}{\nu^2} \Delta T = Gr$ - критерий Гросгофа.

$$Eu = \frac{P}{\rho V_0^2}$$

4) Число Эйлера Eu - определяет соотношение сил давления и сил инерции; определяемая величина; т.к. часто давление в потоке неизвестно, то больший интерес представляет определение перепада давления на рассматриваемом участке ΔP .

$$Eu = \frac{\Delta P}{\rho V_0^2}$$

ΔP - безразмерный коэффициент сопротивления при очень низких скоростях, когда течение ламинарное $Eu \rightarrow \infty$, $Re \rightarrow 0$, в этих случаях рассматривают число Лагранжа, которое принимает постоянное значение:

$$La = Eu \cdot Re = \frac{\Delta P}{\rho V_0^2} \cdot \frac{V_0 l_0}{\nu} = \frac{\Delta P l_0}{\mu V_0}$$

22. Моделирование ГГД явлений

Одним из средств исследования потока является аэродинамический эксперимент. Достаточно сложно, дорого, а порой и невозможно выполнить эксперимент на действующем оборудовании. Для того, чтобы результаты полученные на моделях могли быть перенесены и использованы в действующих расчетах необходимо соблюдать условия подобия Кирпичева-Гухмана, т.е. течение в модели и образце должны иметь одинаковую физическую природу и описываться одними и теми же безразмерными уравнениями. Течения должны происходить в геометрически подобных каналах и должны быть подобраны все условия однозначности. Безразмерные критерии подобия должны иметь одинаковую величину. Рассмотрим условия моделирования вынужденного течения в цилиндрической трубе с прямой осью. Для соблюдения подобия необходимо, чтобы:

$$Re_{mod} = Re_{обр}$$

$$\frac{V_{mod} l_{mod}}{\nu_{mod}} = \frac{V_{обр} l_{обр}}{\nu_{обр}}$$

Свяжем одноименные величины с помощью констант подобия:

$$V_{mod} = K_v V_{обр}$$

$$l_{mod} = K_l l_{обр} \Rightarrow \frac{K_v K_l}{K_\nu} = 1$$

- условие, определяющее выбор констант подобия

$$\nu_{mod} = K_\nu \nu_{обр}$$

Например, если в модели и образце используется одинаковая жидкость с одинаковой температурой, то $\nu_{mod} = \nu_{обр} \Rightarrow K_\nu = 1 \Rightarrow K_v K_l = 1$. Это значит если размер модели в n раз меньше, чем размер образца, то для соблюдения подобия необходимо чтобы скорость в модели была в n раз больше. При моделировании часто возникает необходимость соблюдения подобия по нескольким критериям. В этом случае часто прибегают к приближенному моделированию, т.е. когда исследуется зависимость течения от одного критерия при условии, что от других критериев при этом же течение не зависит, т.е. автомодельно.

23. Ламинарное и турбулентное движение

При низких скоростях потока отмечается, что отдельные частицы или струйки жидкости движутся по плавным непересекающимся траекториям. Такое тече-

ние называется ламинарным, что означает слоистое. При увеличении скорости потока траектории отдельных струек приобретают волнообразный характер и через некоторое время струйка исчезает, перемешиваясь с жидкостью. Характер течения при этом изменился. Траектории отдельных частиц приобретают хаотичный неустановившийся характер. Такое течение называется турбулентным – хаотичным, вихревым. Рейнольдс установил, что смена режима происходит при значении $Re_{кр} = 2300$. Причина перехода обусловлена влиянием возмущений, исходящих от стенок или вносимых в поток извне. Установлено, что если ликвидировать возмущение, т.е. отполировать трубу, сделать плавный вход потока в канал, то границу перехода можно значительно переместить в область более высоких $Re_{кр}$. При $Re_{кр} < 2000$ любые возмущения гаснут, следовательно $Re_{кр} = 2000$ – нижняя граница значения области перехода. Смена режима происходит не сразу: сначала в потоке возникают отдельные очаги турбулентного движения, которые появляются и исчезают. Такое явление называют перемежаемостью:

$$\gamma = \frac{\tau_{турб}}{\tau_{общ}}$$

$\tau_{общ}$ – общее время наблюдения за какой-то точкой

$\tau_{турб}$ – время существования режима в этой точке

При $\gamma = 0$ – ламинарное

При $\gamma = 1$ – турбулентное

$0 < \gamma < 1$ – переход

Переход ламинарного движения в турбулентное имеет очень большое практическое значение, т.к. определяет условия теплообмена, сопротивления потока, перемешивания жидкостей.

24. Пограничный слой и его характерные толщины

При обтекании любого тела потоком реальной жидкости поток как бы «прилипает» к поверхности. По мере удаления от поверхности скорость возрастает и, начиная с некоторого расстояния, скорость равна скорости набегающего или невозмущенного потока. В этом состоит проявление вязкости жидкости. Прандтль определил, что толщина слоя в котором проявляется вязкость увеличивается по мере продвижения потока. Чем меньше скорость набегающего потока, тем больше толщина слоя, в котором проявляется вязкость. Прандтль назвал эту часть жидкости у поверхности гидродинамическим пограничным слоем. Все течение он разбил на 3 части: 1 – гидродинамический пограничный слой – область, где сосредоточено влияние вязкости, 2 – след, 3 – невозмущенный поток. Во внешнем потоке вязкость можно не учитывать и считать жидкость идеальной, то есть без трения. Таким образом общая задача обтекания разбивается на 2 части: 1) течение жидкости в пограничном слое; 2) течение

идеальной жидкости. Результаты решений должны совпадать на внешней границе пограничного слоя. Поскольку скорость в пограничном нарастает от 0 до скорости внешнего течения постепенно - асимптотически, поэтому δ определяется достаточно условно. Принято считать за δ такое значение y поперечной координаты, при котором скорость u отличается от U не более чем на 1-2%. $u/U=0,98..0,99$. Теория погранслоя использует и другие более точно определяемые толщины. Рассмотрим как влияет вязкость на кинематику (положение линий тока) и динамику (потерю количества движения).

Из-за торможения жидкости линия тока отклоняется от поверхности на расстояние δ . Расход жидкости между поверхностью и линией тока в плоском течении

$$Q_p = \int_0^y u dy$$

будет равен:

Если бы жидкость была идеальной, то та же линия тока располагалась бы ближе к поверхности на величину δ : $Q_{ид} = U(y - \delta)$

$$Q_p = Q_{ид}$$

$$\int_0^y u dy = U(y - \delta)$$

$$\int_0^y u dy = \int_0^y U dy - U\delta$$

$$\delta = \frac{1}{U} \int_0^y (U - u) dy$$

$$\delta = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

Максимальное значение δ будет равняться: $\delta = \delta_{\max} = \delta^*$

$$\delta^* = \int_0^y \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

- толщина вытеснения.

Это более точно вычисляемая величина чем δ .

$$U\delta^* = \int_0^y (U - u) dy$$

δ^* может быть представлена, как линейный отрезок через который проходит секундный объемный расход идеальной жидкости, равный потере расхода через сечение погранслоя из-за торможения в реальном течении. Из-за торможения снижается и количество движения жидкости в погранслое. С количеством движения связана толщина потери импульса:

$$\delta^{**} = \int_0^y \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

$$\rho U^2 \delta^{**} = \int_0^y \rho u (U - u) dy$$

Толщина потери импульса может быть представлена как линейный отрезок, через который проходит количество движения жидкости равный потере количества движения через сечение в пограничном слое из-за торможения в реальном течении.

25. Переход ламинарного ПС в турбулентный

При обтекании поверхности потоком вязкой жидкости, начиная от критической точки образуется погранслои. Причем сначала слой является ламинарным, толщина его δ увеличивается, течение теряет устойчивость и происходит смена течения погранслоя. Смена происходит в некоторой области. Часто для упрощения считают, что переход происходит в точке.

Т.к. коэффициент сопротивления поверхности при ламинарном и турбулентном погранслоях значительно отличаются по величине, меняются условия теплообмена. Определение границ перехода имеет большое практическое значение. Для определения границы перехода существуют теоретические и экспериментальные методы. В теоретических методах исследуется устойчивость течения ламинарного погранслоя и за границу перехода принимают точку потери устойчивости. Экспериментальные методы основаны на измерении распределений скорости или напряжения поверхностного трения. В точке перехода трение потока о стенку резко возрастает.

Если перемещать микротрубку вдоль обтекаемой поверхности на одинаковом расстоянии от нее, то по мере погружения микротрубки в ламинарный погранслой значение скорости, которое она будет показывать с увеличением x будет убывать. Вначале перехода ламинарного погранслоя в турбулентный ($x_{кр1}$) профиль скорости начинает перестраиваться – становится более заполненным – прижимается к пластине, поэтому скорость возрастает. При $x > x_{кр2}$ микротрубка погружается уже в турбулентный погранслой и поэтому скорость будет уменьшаться. За точку перехода принимают значение x , в которой скорость достигает минимума. Для определения границы перехода используют:

$$Re_{x_{кр}} = \left(\frac{U_{x_{кр}}}{\nu} \right) = (3 \div 5) \cdot 10^5$$

На положение $x_{кр}$ значительное влияние может оказать скорость изменения внешнего потока $U = f(x)$.

В конфузорной области, т.е. при разгоне внешнего потока переход затягивается, т.е. ламинарная зона увеличивается.

В диффузорной области ламинарный погранслой раньше теряет устойчивость, поэтому $x_{кр}$ уменьшается. Причины, вызывающие смену режима следующие:

- возмущения, которые вносятся в погранслой из внешнего потока (внешний поток турбулизирован)

- возмущения, исходящие от поверхности (шероховатости, стыки поверхностей)

Рассмотрим влияние турбулентности внешнего потока. Если степень турбулентности внешнего потока меньше 0,1%, то возмущение не влияет:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{u'^2}}{U} \cdot 100\% < 0,1\%$$

Если $\varepsilon > 0,1\%$, то с увеличением ε $x_{кр1}$ и $x_{кр2}$ уменьшаются. Влияние шероховатости приводит к более ранней смене режимов.

Рассмотрим влияние величины U . Чем больше U , тем меньше $x_{кр}$.

При турбулентном режиме течение у поверхности всегда существует область ламинарно текущей жидкости – вязкий подслой, толщина которого $\approx 0,5 - 1,5\%$ от δ . Распределение скорости в вязком подслое линейное и описывается уравнением:

$$\frac{u}{V_*} = \frac{V_* y}{\nu} \quad (1)$$

В турбулентном ядре распределение скорости может быть описано универсальным логарифмическим профилем распределения:

$$\frac{u}{V_*} = 2,4 \ln \frac{V_* y}{\nu} + 4,9 \quad (2)$$

Между подслоем и ядром часто выделяют буферную область в которой физическая и критическая вязкость одного порядка. Поэтому уравнение (2) дает расхождение с экспериментальными данными в буферной области и на внешней границе пограничного слоя, где поток взаимодействует с нетурбулизированным потоком.

Т.к. при турбулентном погранслое коэффициент сопротивления значительно больше, то для снижения общего сопротивления хорошо обтекаемых тел (крыло, пластина, судно) необходимо затягивать переход, т.е. увеличивать протяженность ламинарного участка погранслоя. Для плохо обтекаемых тел (цилиндр, сфера) сопротивление определяется в первую очередь сопротивлением формы (давления). Сопротивление трения имеет малое значение. Сопротивление формы зависит от области отрыва потока. Чем больше область отрыва, тем больше сопротивление. При малых скоростях набега ($Re < Re_{кр}$) с поверхности цилиндра срывается ламинарный пограничный слой, который далее становится турбулентным (82°).

При $Re > Re_{кр}$ на цилиндре сначала образуется ламинарный погранслой, который преобразуется в турбулентный, который срывается при угле 140° .

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**РАЗДЕЛ 1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ****1.1 Модель сплошной среды**

Жидкостью называется сплошная среда, обладающая способностью легко изменять свою форму под действием внешних сил.

Понятие «жидкость» определяется в зависимости от назначения такого определения.

В физике жидкость трактуется как физическое тело, обладающее свойством текучести.

Легкотекучесть частиц жидкости обусловлена неспособностью ее воспринимать касательные напряжения в состоянии покоя.

По своим механическим свойствам жидкости разделяют на два класса:

1. Малосжимаемые (капельные).

2. Сжимаемые (газообразные).

В механике жидкости и газа законы, справедливые для капельных жидкостей, применимы и к газам, когда сжимаемостью газа можно пренебречь.

Для удобства введены термины «капельная жидкость» (малосжимаемая), «сжимаемая жидкость» (газ) и «жидкость» (охватывающая как капельную жидкость, так и газ).

Таким образом, под жидкостью в механике жидкости и газа подразумевается всякая среда, обладающая текучестью.

При изучении законов равновесия и движения жидкости в прикладной механике жидкостей и газов движение молекул не изучается и жидкость рассматривается в виде сплошной среды, способной деформироваться под действием внешних сил.

Жидкость как всякое физическое тело имеет молекулярное строение.

Расстояние между молекулами во много раз превосходит размеры самих молекул и соответствует от 10^{-7} до 10^{-8} см, а длина свободного пробега молекул газа при атмосферном давлении равна 10^{-5} см.

Поэтому жидкости и газы воспринимаются как сплошные среды, имея прерывистую структуру.

Это обстоятельство позволяет ввести гипотезу сплошности, то есть применить модель, обладающую свойством непрерывности. Гипотеза о непрерывности или сплошности среды упрощает исследование, так как позволяет рассматривать механические характеристики жидкой среды (скорость, плотность, давление и т.д.) как функции координат точки в пространстве и во времени.

Согласно гипотезе сплошности масса среды распределена в объеме непрерывно и в общем неравномерно. [2,3,6,7]

1.2 Плотность жидкости

Основной динамической характеристикой среды является плотность распределения массы по объему или просто плотность среды, которая в произвольной точке А определяется соотношением:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}, \quad (1.1)$$

где ΔM – масса, заключенная в малом объеме ΔW , включая точку А.

Размерность плотности

$$[\rho] = \frac{M}{L^3},$$

где М – размерность массы;

L – размерность длины.

Единицами измерения плотности являются кг/м³ в системе СИ и кгс·с²/м⁴ в технической системе.

Наряду с плотностью в технических расчетах применяется удельный вес.

Вес жидкости G, приходящийся на единицу объема W, называется удельным весом:

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (1.2)$$

Размерность удельного веса $[\gamma] = \frac{M}{L^2 T^2}$.

Единица измерения удельного веса в системе СИ Н/м³.

Удельный вес – векторная величина. Он не является параметром вещества, его значение зависит от ускорения свободного падения в пункте определения.

Удельный вес и плотность жидкости связаны следующим соотношением:

$$\gamma = \frac{G}{W} = \frac{Mg}{W} = \rho g, \quad (1.3)$$

где g – ускорение свободного падения, принимаемое обычно равным 9,81 м/с².

Наряду с удельным весом в расчетах используется относительный удельный вес δ :

$$\delta = \frac{\gamma_{ж}}{\gamma_{в}}, \quad (1.4)$$

где $\gamma_{ж}$ – удельный вес жидкости;

$\gamma_{в}$ – удельный вес воды при $t = 4$ °С, равный 9810 Н/м³ (1000 кгс/м³).

Так, для пресной воды при температуре 4 °С $\delta_{в} = 1$. Плотность и удельный вес жидкостей зависят от давления и температуры. [2,3,6,7]

1.3 Сжимаемость каплевой жидкости

Под действием давления сжимаемость жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия β_v , $\frac{1}{\text{Па}}$, представляющим собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления:

$$\beta_v = \frac{1}{W} \frac{dW}{dp}, \quad (1.5)$$

где W – первоначальный объем жидкости;
 dW – изменение этого объема при изменении давления на величину dp .

Знак “минус” в формуле (1.5) обусловлен тем, что положительному приращению давления p соответствует отрицательное приращение объема W .

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости $E_{\text{ж}}$, Па:

$$E_c = \frac{1}{\beta_v}. \quad (1.6)$$

Плотность каплевой жидкости мало изменяется при изменении давления. Это вытекает из зависимости

$$\frac{d\rho}{\rho} = \beta_v dp = \frac{dp}{E_c}. \quad (1.7)$$

Так, для воды среднее значение $\beta_v = 5 \cdot 10^{-6} \text{ см}^2/\text{Н} = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{кПа}}$,

а $E_{\text{ж}} = 2 \cdot 10^6 \text{ кПа}$.

Например, при повышении давления на $9,81 \cdot 10^4 \text{ Па}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{9,81 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^9} = \frac{9,81}{2 \cdot 10^5} = 4,9 \cdot 10^{-5}.$$

Во многих случаях инженерных расчётов сжимаемостью воды можно пренебречь, считая удельный вес и плотность её не зависящей от давления. [2,3,6,7]

1.4 Температурное расширение

капельных жидкостей

Температурное расширение каплевых жидкостей характеризуется коэффициентом температурного расширения β_t , $^{\circ}\text{C}^{-1}$:

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}, \quad (1.8)$$

где dW – изменение этого объема при повышении температуры на величину dt .

При температуре от 10 до 20°C и давлении 10^5 Па можно приближённо принимать $\beta_t = 1,4 \cdot 10^{-4} ^{\circ}\text{C}^{-1}$.

Если приближённо считать, что плотность не зависит от давления, а определяется только температурой, то, с учётом выражения для плотности $\rho = \frac{M}{W}$ и формулы (1.8), получим

$$\rho_t = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_t(t - t_0)}, \quad (1.9)$$

где t_0 – температура жидкости при нормальных условиях.

Зависимость плотности от температуры широко используется для создания естественной циркуляции в отопительных системах, для удаления продуктов сгорания и т.д. [2,3,6,7]

1.5 Вязкость жидкости

Вязкостью называется стремление жидкостей к сдвигу. Если к пластине (рис. 1.1) приложить силу F , то после некоторого интервала времени установится равномерное движение с некоторой скоростью U_0 .

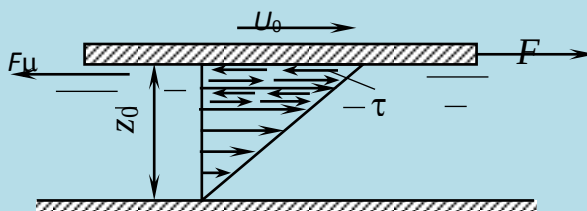


Рис. 1.1

За время разгона возникла сила вязкости $F_\mu = -F$. Причем, вследствие межмолекулярных связей, слой жидкости, прилегающей к пластине, движется вместе с пластиной со скоростью U_0 . Предположим, что распределение скоростей по высоте носит линейный характер: $U = f(z)$, тогда

$$F_\mu = \pm \frac{\mu S dU}{dz}, \quad (1.9, a)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости;

S – площадь соприкасающихся слоев;

$\frac{dU}{dz}$ – градиент скорости (показатель интенсивности ее изменения по нормали). Знак (+) или (-) выбирают в зависимости от знака градиента скорости и направления силы F_μ .

Между слоями жидкости, движущимися со скоростями, отличающимися друг от друга на величину dU , возникает касательное напряжение τ :

$$\frac{F_\mu}{S} = \tau = \pm \mu \frac{du}{dz}. \quad (1.10)$$

Размерность μ $[\mu] = \frac{M}{LT}$.

Единица измерения $[\mu] = \frac{[\tau]}{\frac{dU}{dz}} = \frac{Hc}{M^2} = \text{Па} \cdot \text{с}$.

Отношение динамической вязкости к плотности называется кинематической вязкостью жидкости:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (1.11)$$

Размерность $[\nu] = \frac{L^2}{T}$.

Единица измерения $[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{Н \cdot с \cdot м^2}{м^2 \cdot кг} = \frac{кг \cdot м \cdot с \cdot м^3}{с^2 \cdot м^2 \cdot кг} = \frac{м^2}{с}$.

Связь кинематической и динамической вязкости с плотностью и температурой воды находится из выражений (1.9) и (1.11):

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho_t} = \frac{\mu_t [1 + \beta_t (t - t_0)]}{\rho_0}. \quad (1.12)$$

Так, для чистой пресной воды зависимость динамической вязкости от температуры определяется по формуле Пуазейля:

$$\mu_t = \frac{0,00179}{1 + 0,0368t + 0,000221t^2}. \quad (1.13)$$

Решая совместно уравнения (1.12) и (1.13), получим:

$$\nu_t = \frac{0,00179 \cdot [1 + \beta_t (t - t_0)]}{\rho_0 \cdot (1 + 0,0368t + 0,000221t^2)}. \quad (1.14)$$

На практике вязкость жидкостей определяется вискозиметрами, из которых наиболее широкое распространение получил вискозиметр Энглера.

Для перехода от условий вязкости в градусах Энглера к кинематической вязкости в м²/с применяется несколько эмпирических формул, например формула Убеллоде:

$$\nu = \left(0,0732^{\circ\text{Э}} - \frac{0,0631}{^{\circ\text{Э}}} \right) \cdot 10^{-4}, \quad (1.15)$$

а также теоретическая формула А.Д. Альтшуля:

$$^{\circ\text{Э}} = 24 \left[2,3 \lg \frac{\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \nu}{\sqrt{\nu^2 + 0,0166} - \nu} + \frac{1}{\nu} \cdot \left(\sqrt{\nu^2 + 0,0294} - \sqrt{\nu^2 + 0,0166} \right) \right], \quad (1.16)$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, см²/с.

Кроме обычных (ньютоновских) жидкостей, характеризующихся зависимостью (1.10), существуют аномальные жидкости, к которым относятся коллоидные растворы, смазочные масла, нефтепродукты.

Для таких жидкостей закон внутреннего трения выражается в виде

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \frac{dU}{dz}, \quad (1.17)$$

где τ_0 – касательное напряжение в покоящейся жидкости, после преодо-

ления которой жидкость приходит в движение. [2,3,6,7]

1.6 Испаряемость жидкости

Показателем испаряемости является температура ее кипения при нормальном атмосферном давлении.

Чем выше температура кипения, тем меньше испаряемость.

Более полной характеристикой испаряемости является давление (упругость) насыщенных паров p_n , выраженная в функции температуры.

Чем больше давление насыщенных паров при данной температуре, тем больше испаряемость жидкости.

Для многокомпонентных жидкостей (например, для бензина и др.) давление p_n зависит не только от физико-химических свойств и температуры, но и от соотношения объемов жидкой и паровой фаз.

Давление насыщенных паров возрастает с увеличением части объема жидкой фазы.

Значения упругости паров для таких жидкостей даются для отношения паровой и жидкой фаз, равного 1:4. [2,3,6,7]

1.7 Растворяемость газов в жидкостях

Для различных жидкостей растворимость газов различна и изменяется с увеличением давления.

Относительный объем газа, растворенный в жидкости до ее полного насыщения, можно считать прямо пропорциональным давлению:

$$\frac{W_r}{W_{\text{ж}}} = k \frac{p_2}{p_1}, \quad (1.18)$$

где W_r – объем растворенного газа при нормальных условиях;

$W_{\text{ж}}$ – объем жидкости;

p_1 и p_2 – начальное и конечное давления газа;

k – коэффициент растворимости.

Коэффициент растворимости воздуха k имеет следующие значения при $t = 20$ °С:

– для воды $k = 0,016$;

– для керосина $k = 0,127$;

– для трансформаторного масла $k = 0,083$;

– для индустриального масла $k = 0,076$.

При понижении давления в жидкости происходит выделение растворенного в ней газа, причем газ выделяется из жидкости интенсивнее, чем растворяется в ней. [2,3,6,7]

1.8 УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Пример 1. При гидравлическом испытании трубопровода диаметром $d = 200$ мм и длиной $l=250$ м давление в трубе было повышено до $P_1=3$ МПа. Через час давление снизилось до $P_2=2$ МПа. Сколько воды вытекло через неплотности?

Решение:

1. Определим объем воды в трубопроводе:

$$W = \frac{\pi d^2 l}{4} = \frac{\pi 0,2^2 \cdot 250}{4} = 7,85 \text{ м}^3.$$

2. Найдем изменение давления за время испытания:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 3 - 2 = 1 \text{ МПа}.$$

3. Принимая коэффициент объемного сжатия воды $\beta_v = 5 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\text{кПа}}$, находим количе-

ство воды, вытекающей через неплотности, по формуле

$$\Delta W = -\beta_v W \Delta p = 5 \cdot 10^{-10} \cdot 7,85 \cdot 1 \cdot 10^6 = 3,925 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \approx 3,93 \text{ л}.$$

Таблица 1.1

Исходные данные к задаче 1.1

Варианты	d, мм	l, м	P ₁ , МПа	P ₂ , МПа
1	100	50	8	6,5
2	150	100	7	5,5
3	200	120	6	4,3
4	250	130	5	4,7
5	300	150	4	3,6
6	100	160	3	2,8
7	150	170	2	1,6
8	200	180	1	0,5
9	250	190	1,5	1,0
0	300	200	2,5	2,0

Пример 2. Сколько кубометров воды будет выходить из котла, если в течение часа в отопительный котел поступило 50 м^3 воды при температуре 70°C , а затем температура воды повысилась до 90°C .

Решение: 1. Принимая коэффициент температурного расширения

$$\beta_t = 0,00064 \frac{1}{\text{град}}, \text{ находим увеличение расхода воды:}$$

$$\Delta Q = \beta_t Q_n \Delta t = 0,00064 \cdot 50 \cdot 20 = 0,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

2. Расход воды из котла при $t = 90^\circ\text{C}$:

$$Q_k = Q_n - \Delta Q = 50 + 0,64 = 50,64 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Таблица 1.2

Исходные данные к задаче 1.2.

Варианты	$Q, \text{м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$
1	50	50
2	15	10
3	20	20
4	25	30
5	30	50
6	10	60
7	15	70
8	20	60
9	25	90
0	30	20

1.9 Контрольные вопросы

1. Перечислите основные физические свойства жидкостей.
2. Что подразумевается под жидкостью в механике жидкости и газа?
3. Что подразумевается под сплошностью среды?
4. Какая связь существует между плотностью и удельным весом жидкостей?
5. Какова размерность плотности и удельного веса?
6. В каких единицах измеряется плотность и удельный вес в системе СИ?
7. Что такое относительный удельный вес?
8. Что такое коэффициент объемного сжатия жидкости? Какова его размерность?
9. Какая связь коэффициента объемного сжатия с модулем объемной упругости? Какова его размерность?
10. Что такое коэффициент температурного расширения? Какова его размерность?
11. Какая связь коэффициента температурного расширения с плотностью жидкости?
12. Что называется вязкостью жидкости?
13. Что такое коэффициент динамической вязкости? Какова его размерность?
14. Какая связь существует между коэффициентами динамической и кинематической вязкости?
15. В каких единицах измеряется динамическая и кинематическая вязкость в системе СИ?
16. Какая связь существует между кинематической и динамической вязкостью с плотностью и температурой воды?
17. Какими приборами измеряется вязкость?

18. Какие жидкости относятся к аномальным?
19. В чем отличие аномальных жидкостей от ньютоновских?
20. Что характеризует испаряемость жидкости?

РАЗДЕЛ 2. ОСНОВЫ ГИДРОСТАТИКИ

2.1 Основные сведения

Вследствие текучести жидкости в ней не могут действовать сосредоточенные силы, а возможно лишь действие сил, непрерывно распределенных по ее объему (массе) или по поверхности. Поэтому внешние силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости, разделяют на массовые (объемные) и поверхностные.

Массовые силы пропорциональны массе жидкого тела или (для однородных жидкостей) его объему.

К ним относятся сила тяжести и силы инерции переносного движения, действующие на жидкость при относительном ее покое в ускоренно движущихся сосудах или при относительном движении жидкости в руслах.

Поверхностные силы проявляются на граничных поверхностях рассматриваемого жидкого тела.

Поверхностную силу, действующую нормально к какой-либо площадке, называют силой давления.

Поверхностная сила, действующая по касательной к площадке, является силой сопротивления.

Сила сопротивления проявляется только при движении жидкости, а сила давления – как при движении, так и при покое жидкости. [2,3,6,7,8]

2.2 Гидростатическое давление

Рассмотрим произвольный объем жидкости W (рис. 2.1),

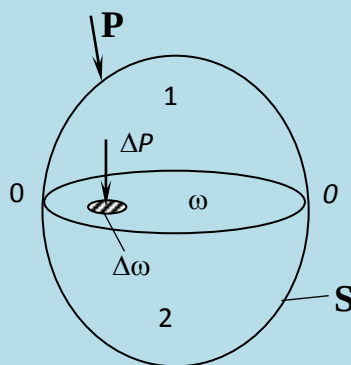


Рис. 2.1

К определению гидростатического давления находящейся в равновесии под действием внешних сил P и ограниченной поверхностью S .

Проведем секущую плоскость 0-0, делящую объем W на две части 1 и 2. Отбросим часть 1 и заменим распределенными по площади ω силами Δp_i , одна из которых Δp приходится на долю площади $\Delta\omega$.

Напряжение сжатия σ_c , возникающее при этом, определяется как частное от деления силы Δp на площадь Δ :

$$\sigma_c = p_{cp} = \frac{\Delta p}{\Delta\omega}. \quad (2.1)$$

Напряжение σ_c принято называть средним гидростатическим давлением; предел отношения при $\Delta\omega \rightarrow 0$ называется гидростатическим давлением в точке:

$$p = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta\omega} = \frac{dp}{d\omega}. \quad (2.2)$$

$$\text{Размерность давления } [p] = [\sigma] = \frac{M}{LT^2}.$$

Единица измерения давления Па. Это давление, вызываемое силой в 1Н, равномерно распределено по поверхности площадью в 1м^2 ($1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$).

Так как эта единица очень мала, то на практике давление измеряют в килопаскалях ($1 \text{ кПа} = 10^3 \text{ Па}$) или мегапаскалях ($1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$).

2.3 Основная теорема гидростатики

Гидростатическое давление в данной точке не зависит от направления, т.е. остается одинаковым по всем направлениям.

Докажем, что $p_x = p_y = p_z = p_n$, где p_x , p_y , p_z , p_n — представляют собой гидростатическое давление соответственно в направлении координатных осей ox , oy , oz и в некотором произвольном направлении $N-N$.

Выделим внутри массы жидкости, находящейся в равновесии, малый объем в форме тетраэдра с ребрами dx , dy , dz , соответственно параллельными координатным осям, и с массой

$$dm = \rho \frac{1}{6} dx dy dz,$$

где ρ — плотность жидкости.

Представим, что жидкость внутри тетраэдра — в виде твердого тела. Это не изменяет условий равновесия. (рис. 2.2).

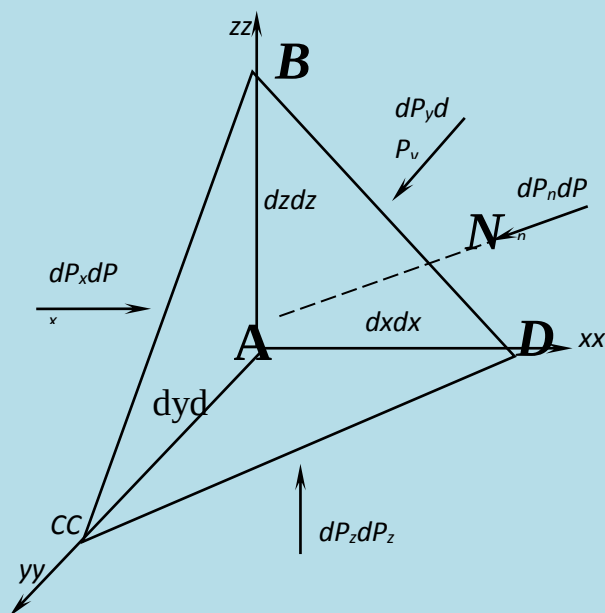


Рис. 2.2 Определение основного уравнения гидростатики

Воспользуемся известными уравнениями статики твердого тела, а именно уравнениями проекций сил и уравнениями моментов:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; & \sum M_x &= 0; \\ \sum F_y &= 0; & \sum M_y &= 0; \\ \sum F_z &= 0; & \sum M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Учитывая, что при стягивании тетраэдра в точку, уравнения моментов такой системы удовлетворяются тождественно, а действующие на него силы сводятся к системе сил, проходящих через одну и ту же точку.

Таким образом, остается только три проекции сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; \\ \sum F_y &= 0; \\ \sum F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

К действующим силам относятся поверхностные и массовые (объемные) силы.

К поверхностным силам относятся силы давления жидкости, окружающей элементарный тетраэдр.

Таких сил будет четыре (по числу граней).

На грань ABC действует сила

$$P_x = p_x \frac{1}{2} dydz, \quad (2.5)$$

где p_x – среднее гидростатическое давление для треугольника ABC с площадью $\frac{1}{2} dydz$.

Сила dP_x параллельна оси ox , направлена в противоположную сторону оси i , следовательно, войдет в уравнение со знаком «плюс».

Силы dP_y и dP_z , действующие на грани ABD и ACD, соответственно параллельны осям oy и oz и их проекции на ось ox равны нулю.

Четвертая сила dP_n – сила давления на грань BCD равна:

$$dP_n = p_n d\omega, \quad (2.6)$$

Проекция этой силы на ось ox :

$$dP_n \cos(\widehat{N, ox}) = p_n d\omega \cos(\widehat{N, ox}). \quad (2.7)$$

Эта сила направлена в отрицательную сторону оси ox .

Произведение $d\omega \cos(\widehat{N, ox})$ представляет собой проекцию площади треугольника BCD на плоскость uoz и равно:

$$d\omega \cos(\widehat{N, ox}) = \frac{1}{2} dydz. \quad (2.8)$$

Тогда проекция силы dP_n на ось ox численно равна:

$$dP_n \cos(\widehat{N, ox}) = p_n \frac{1}{2} dydz. \quad (2.9)$$

Аналогично можно записать проекции силы dP_n на оси oy и oz :

$$\begin{aligned} dP_n \cos(\widehat{N, oy}) &= p_n \frac{1}{2} dx dz; \\ dP_n \cos(\widehat{N, oz}) &= p_n \frac{1}{2} dx dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Массовые силы, действующие на тетраэдр, приводятся к равнодействующей dR , образующей с координатными осями углы α , β , γ и равной:

$$dR = dmj, \quad (2.11)$$

где dm – масса тетраэдра, равная:

$$dm = \rho \frac{1}{6} dx dy dz,$$

где ρ – плотность жидкости;

$\frac{1}{6} dx dy dz$ – объем тетраэдра;

j – ускорение объемной силы (в частном случае ускорение свободного падения).

Обозначим проекции ускорения j по координатным осям x , y , z , т.е. примем, что

$$j \cos \alpha = X;$$

$$j \cos \beta = Y;$$

$$j \cos \gamma = Z.$$

Тогда проекции объемной силы dR равны:

$$\left. \begin{aligned} dR_x &= dmj \cos\alpha = \rho \frac{1}{6} dx dy dz X ; \\ dR_y &= dmj \cos\beta = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Y ; \\ dR_z &= dmj \cos\gamma = \rho \frac{1}{6} dx dy dz Z . \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Запишем сумму проекций всех сил на ось ox с учетом уравнений (2.12):

$$\sum F_x = p_x \frac{1}{2} dy dz - p_n \frac{1}{2} dy dz + \rho \frac{1}{6} dx dy dz X = 0. \quad (2.13)$$

Или после сокращения на $\frac{1}{2} dy dz$:

$$p_x - p_n + \rho \frac{1}{3} dx X = 0.$$

Пренебрегая $\rho \frac{1}{3} dx X$ как бесконечно малым относительно p_x и p_n , получаем $p_x -$

$p_n = 0$ или $p_x = p_n$.

Аналогично $p_y = p_n$ и $p_z = p_n$.

Следовательно,

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (2.14)$$

Что и надо было доказать.

Таким образом, гидростатическое давление в точке по любому направлению оказывается одинаковым, т.е. не зависит от направления действия. [2,3,6,7]

2.4 Условие равновесия жидкости

Жидкость может сохранять свое равновесное состояние в том случае, если внешние силы, действующие в точках граничной поверхности, направлены только по внутренним нормальям к этой поверхности.

Очевидно, что действие силы давления по внешней нормали приводит к нарушению равновесия, т.к. жидкость не оказывает сопротивления растягивающим силам.

Касательные силы возникают при движении жидкости, поэтому при равновесии жидкости, находящейся в покое, они равны нулю.

Следствие. Так как гидростатическое давление одинаково по всем направлениям в данной точке, а в различных точках данного объема жидкости в общем случае различно, то

$$p = p(x, y, z). \quad (2.15)$$

В общем случае, когда изменяется атмосферное давление во времени:

$$p = p(x, y, z, \tau). \quad (2.16)$$

2.5 Дифференциальное уравнение равновесия жидкости

Выделим в жидкости элементарный параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$ (рис. 2.3).

Полагая его твердым телом, составим три уравнения проекций действующих сил:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0.$$

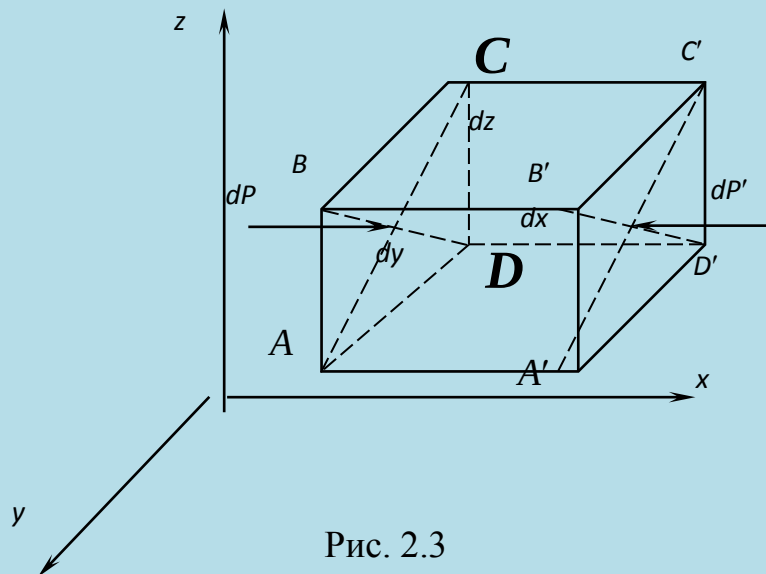


Рис. 2.3

Уравнение моментов исключается. Составим уравнение проекции сил на ось ox , т.е. уравнение $\sum F_x = 0$.

Равновесие параллелепипеда обеспечивается шестью проекциями (по числу граней).

В уравнение $\sum F_x = 0$ войдут только две силы: dP и dP' .

Сила давления на грань $ABCD$

$$dP = p dy dz,$$

где p – среднее гидростатическое давление на грань $ABCD$.

Сила давления на грань $A'B'C'D'$

$$dP' = p' dy dz,$$

где p' – среднее гидростатическое давление на грань $A'B'C'D'$ ($p' \neq p$).

Определим p' . Так как $p = f(x, y, z)$, то при переходе от одной грани к другой давление должно изменяться в зависимости от одной координаты, так как в сходственных точках (A и A' , B и B' и т.д.) давление зависит только от изменения одного аргумента x . Аргументы y и z для сходственных точек (A и A') остаются неизменными. Следовательно

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Тогда

$$dP' = p' dy dz = \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Сила dP' войдет в уравнение проекции со знаком «минус».

Проекция объемных сил.

Проекция объемной силы dR равна произведению массы на соответствующую проекцию ускорения объемной силы, т.е.

$$dR_x = \rho dx dy dz X,$$

где ρ – плотность жидкости;
 dx, dy, dz – объем выделенного элемента;
 X – проекция ускорения силы dR на ось Ox .

Сумма проекций поверхностных и объемных сил на ось Ox равна:

$$\sum F_x = p dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dydz + \rho dx dy dz X = 0. \quad (2.17)$$

После некоторого преобразования и деления на $dx dy dz$ (объем параллелепипеда dW) получим уравнение проекций сил на ось Ox , отнесенных к единице объема:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X = 0. \quad (2.18)$$

Аналогично получим два других уравнения: $\sum F_y = 0$; $\sum F_z = 0$.

Таким образом, при равновесии жидкости имеем три дифференциальных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y &= 0; \\ -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Система уравнений (2.19) равновесия жидкости относится как к несжимаемой, так и к сжимаемой жидкости.

Эта система уравнений впервые была получена Эйлером в 1755 г. [2,3,6,7]

2.6 Основное дифференциальное уравнение гидростатики

Умножая первое уравнение (2.19) на dx и последующие на dy и dz , после суммирования получаем:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0, \quad (2.20)$$

где dx, dy, dz – дифференциалы координат, а не ускорений X, Y, Z .

Так как гидростатическое давление p является функцией только координат, т.е. независимых переменных x, y, z , то первый трехчлен уравнения (2.20) как сумма всех трех частных дифференциалов представляет собой полный дифференциал.

Следовательно,

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.21)$$

Это уравнение является основным дифференциальным уравнением равновесия жидкости.

Так как dp есть полный дифференциал, то для однородной жидкости (при $\rho = \text{const}$) и трехчлен $(Xdx + Ydy + Zdz)$ – тоже полный дифференциал некоторой функции $U(x,y,z)$.

Следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU(x, y, z). \quad (2.22)$$

Частные производные функции $U(x, y, z)$ взятые по x, y, z равны проекциям ускорений массовых сил на соответствующие оси:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \\ Y &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \\ Z &= \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

Рассматривая X, Y, Z не как проекции ускорения, а как проекции объемной силы, отнесенной к единице массы, назовем функцию $U = f(x, y, z)$ потенциальной, или силовой функцией, а силы, удовлетворяющие условию (2.23), – имеющие потенциал.

Из теоретической механики известно, что силовая функция равна потенциалу сил, взятому с обратным знаком, т.е.

$$U(x, y, z) = -\Pi(x, y, z).$$

Из вышеизложенного следует, что равновесие жидкости возможно только в том случае, когда массовые силы имеют потенциал.

Уравнение (2.21) содержит две неизвестные величины p и ρ .

Связь p, ρ с температурой T может быть выражена характеристическим уравнением.

Так для газов

$$\rho = \frac{p}{RT}. \quad (2.24)$$

Для несжимаемой жидкости характеристическое уравнение имеет вид:

$$\rho = \text{const}.$$

В этом случае плотность ρ можно считать известной, тогда уравнение (2.24) не требуется. [2,3,6,7]

2.7 Поверхность уровня

Поверхность, точки которой имеют одинаковые значения данной функции, называется поверхностью уровня (рис. 2.4). К поверхности равного уровня относятся:

- поверхности равного давления;
- изотермические поверхности (поверхности равной температуры);
- поверхности равной плотности и т.д.

В гидравлике рассматриваются поверхности равного давления.

Принимая $p = \text{const}$ ($dp = 0$) в основном уравнении гидростатики (2.21), с учетом того, что для жидкости $\rho \neq 0$, получим:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.25) является дифференциальным уравнением поверхности уровня (здесь X, Y, Z являются функциями координат).

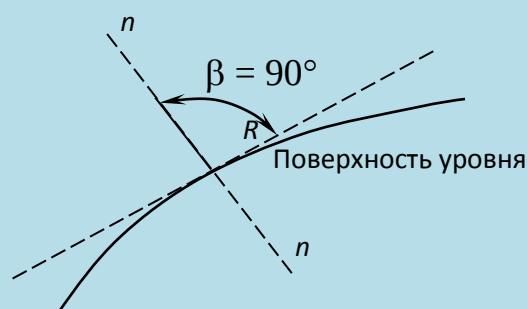


Рис. 2.4

Поверхности уровня обладают следующими свойствами:

Первое свойство поверхности уровня заключается в том, что две различные поверхности уровня не пересекаются между собой.

Докажем это от обратного.

Допустим, что поверхности уровня пересекаются. Тогда во всех точках линии пересечения этих поверхностей давление одновременно должно быть равно p_1 и p_2 , что противоречит основной теореме гидростатики, в которой доказывается, что гидростатическое давление p одинаково по всем направлениям.

Следовательно, две различные поверхности уровня не пересекаются.

Второе свойство – внешние массовые (объемные силы) направлены по нормали к поверхности уровня (см. рис. 2.4).

Известно, что уравнение работы dA силы R на пути ds имеет вид:

$$dA = R_x dx + R_y dy + R_z dz,$$

где R_x , R_y и R_z – проекции силы по координатным осям Ox , Oy и Oz .

Но $R_x = dmX$; $R_y = dmY$ и $R_z = dmZ$,

где dm – элементарная масса;

X , Y , Z – проекции ускорения силы R по тем же координатным осям.

Тогда

$$dA = dmXdx + dmYdy + dmZdz = (Xdx + Ydy + Zdz)dm.$$

Но для поверхности уровня

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Поэтому работа силы R (внешней объемной силы) равна нулю.

Следовательно, для поверхности уровня

$$dA = R \cos\beta ds = 0,$$

где $\beta = \angle(R, S)$.

Это возможно лишь при $\cos\beta = 0$, т.е. внешняя сила должна быть нормальна к поверхности уровня, ($\beta = 90^\circ$).[2,3,6,7]

2.8 Равновесие жидкости в поле земного тяготения

В качестве объемной силы в поле земного тяготения выступает сила тяжести.

Полное ускорения объемных сил равно ускорению свободного падения: $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

В выбранной системе координат проекции единичной объемной силы на оси Ox , Oy и Oz будут следующими:

$$X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = -g.$$

Знак «минус» в ускорении свободного падения соответствует направлению силы тяжести в отрицательную сторону оси Oz .

Подставляя значения X , Y , Z в уравнение поверхности уровня (2.25), получим

$$-gdz = 0 \quad (2.26)$$

и следовательно,

$$z = c = \text{const}, \quad (2.27)$$

где c — произвольная постоянная.

Уравнение является уравнением семейства горизонтальных плоскостей.

Таким образом, поверхностью уровня (поверхность равного давления) в однородной покоящейся жидкости будет любая горизонтальная плоскость, в том числе и свободная поверхность, независимо от формы сосуда или водоема. Горизонтальной плоскостью будет также граница раздела двух несмешивающихся жидкостей (рис. 2.5).

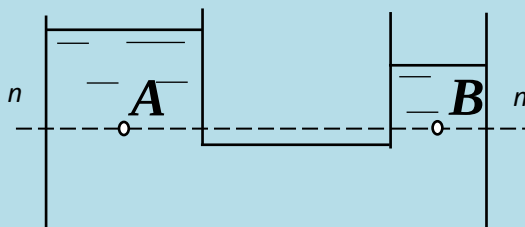


Рис. 2.5

Так, давление в точке A равно давлению в точке B , так как обе точки лежат на одной и той же поверхности уровня (поверхности равного давления). [2,3,6,7]

2.9 Основное уравнения равновесия жидкости в поле земного тяготения. Закон Паскаля

Воспользуемся основным дифференциальным уравнением гидростатики (2.21):

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Учитывая, что при действии силы тяжести на выделенный объем жидкости $X = 0$; $Y = 0$; $Z = -g$, получим

$$dp = -\rho g dz \quad (2.28)$$

или

$$\frac{dp}{\rho g} = -dz.$$

Принимая $\rho = \text{const}$ для несжимаемой жидкости, после интегрирования получим

$$\frac{p}{\rho g} + z = C = \text{const.} \quad (2.29)$$

Постоянную интегрирования найдем из граничных условий. Для свободной поверхности жидкости (рис. 2.6) имеем:

$$p = p_0 \text{ и } z = z_0.$$

где p_0 – давление на свободной поверхности жидкости, обычно $p_0 = p_{\text{атм}}$.

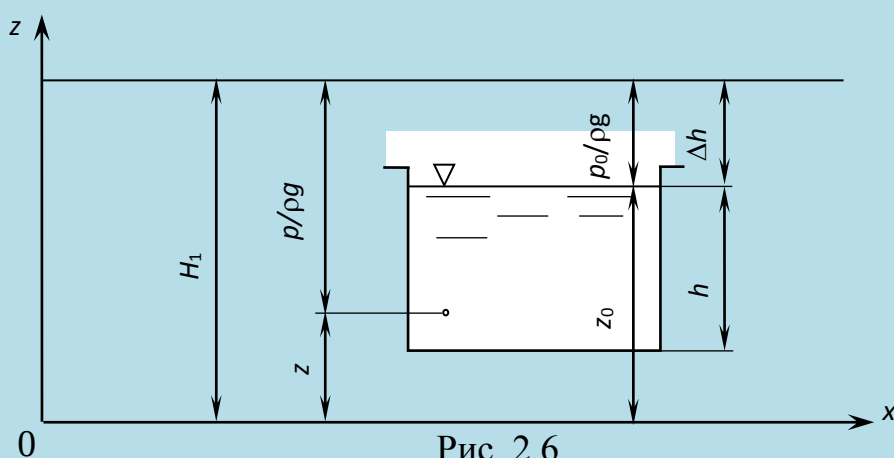


Рис. 2.6

Следовательно

$$C = \frac{p_0}{\rho g} + z. \quad (2.30)$$

Решая совместно уравнения (2.29) и (2.30), получаем

$$\frac{p}{\rho g} + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_0 = H' = \text{const.} \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) называется основным уравнением равновесия жидкости в поле тяготения.

Обычно уравнение (2.31) записывается в форме

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z). \quad (2.32)$$

В уравнении (2.31) ρg представляет собой силу, с которой поле земного тяготения действует на массу жидкости в объеме 1 м^3 , т.е. представляет собой вес, отнесенный к единице объема.

Слагаемые уравнения (2.31) выражены в единицах длины.

Другие составляющие уравнения (2.31) по своему физическому смыслу отличаются от высот z и z_0 , так как они зависят от p (при $\rho = \text{const}$) и называются высотами гидростатического давления.

Величина $H' = z + \frac{p}{\rho g}$ постоянная для всех частиц жидкости, т.к. является координатой некоторой горизонтальной плоскости (xOy). Она расположена выше плоскости свободной поверхности жидкости на величину Δh :

$$\Delta h = (H' - z_0) = \frac{p_0}{\rho g}. \quad (2.33)$$

Из уравнения (2.31) получим:

$$\frac{p - p_0}{\rho g} = z_0 - z = h. \quad (2.34)$$

Величина h представляет собой глубину погружения данной точки под уровень свободной поверхности жидкости (рис. 2.6).

Разность давлений $p - p_0$ представляет собой избыточное давление $p_{\text{изб}}$:

$$p_{\text{изб}} = p - p_0, \quad (2.35)$$

где p – полное или абсолютное давление;

p_0 – давление на свободной поверхности жидкости:

$$p_0 = p_{\text{атм}}; \quad p_0 > p_{\text{атм}}; \quad p_0 < p_{\text{атм}}.$$

Соотношение между указанными выше давлениями можно представить в виде схемы (рис. 2.7).

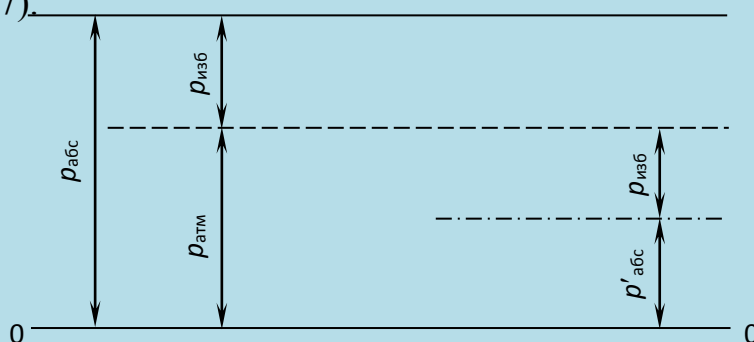


Рис. 2.7

Абсолютное давление всегда положительная величина:

$$p_{\text{абс}} = p_{\text{изб}} + p_{\text{атм}}. \quad (2.36)$$

Здесь $p_0 = p_{\text{атм}}$ на свободной поверхности жидкости.

Если $p_0 < p_{\text{атм}}$, то

$$p'_{\text{абс}} = p_{\text{атм}} - p_{\text{вак}}. \quad (2.37)$$

Рассмотрим жидкость, покоящуюся в открытом резервуаре (рис. 2.8).

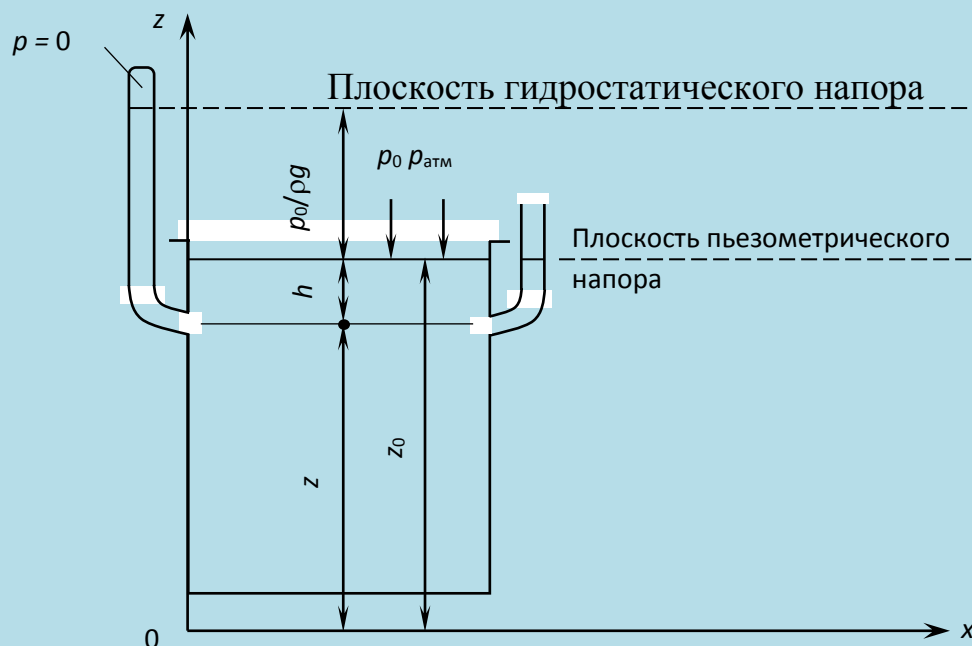


Рис. 2.8

Пусть требуется определить давление в точке А на уровне z .
Применим основное уравнение равновесия (2.31) к точке А и к точке В, расположенным на свободной поверхности жидкости на уровне z_0 .

Из уравнения (2.31) имеем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g}.$$

Отсюда

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z), \quad (2.38)$$

где $z_0 - z = h$ – глубина погружения точки А под свободной поверхностью.

Тогда $p = p_0 + \rho g h$. (2.39)

Величину $\rho g h$ называют весовым давлением, так как оно обусловлено влиянием весомости самой жидкости, находящейся под силовым воздействием поля тяготения.

Согласно структуре формулы это давление избыточное, т.к. p_0 – давление на свободной поверхности покоящейся жидкости.

Рассмотрим графическое представление и энергетическую сущность основного уравнения гидростатики. Графическое изображение абсолютного и избыточного

давления представлено на рис. 2.9 в координатах z и $\frac{p}{\rho g}$.

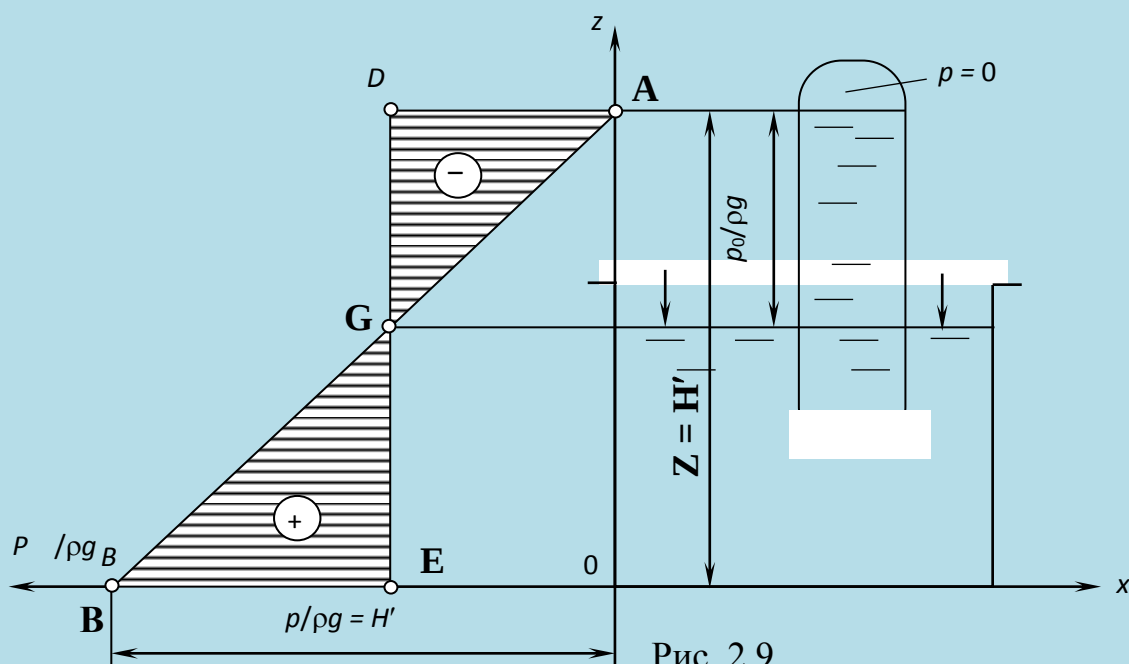


Рис. 2.9

Треугольник OAB выражает закон изменения абсолютного давления, а два треугольника с общей вершиной в точке G символизируют закон изменения избыточного давления.

Причем нижний треугольник BGE выражает $\frac{p_{изб}}{\rho g} > 0$, а верхний $\frac{p_{изб}}{\rho g} < 0$.

При условии, что $p_0 = p_{атм}$ отрицательное избыточное давление называют вакуумом, а $h_{вак} = -\frac{p_{изб}}{\rho g}$ – вакуумметрической высотой.

Очевидно, что максимальное значение вакуума устанавливается на высоте H' , где абсолютное давление равно нулю.

Энергетическую сущность основного уравнения гидростатики легко представить, если выразить его в единицах работы (или энергии).

Для этого следует умножить уравнение на единицу, придавая ей размерность силы (1Н), тогда все члены уравнения будут выражены в единицах энергии (работы), т.е. в Дж.

Так как жидкость находится в равновесии, то она обладает только потенциальной энергией.

В нашем случае имеем:

$$\frac{\rho}{\rho g}, \text{ Дж} -$$

$$z, \text{ Дж} -$$

потенциальная энергия, определяемая гидро-статическим давлением;

энергия положения (данная масса жидкости расположена на высоте z от плоскости сравнения);

$H' = \left(\frac{\rho}{\rho g} + z \right), \text{ Дж} -$ полный запас потенциальной энергии.

(Отнесенный к массе, вес которой равен 1Н, т.е. к массе

$$m = \frac{1}{g} = \frac{1}{9,81} \text{ кг} = 0,103 \text{ кг}).$$

Из основного уравнения равновесия (2.32)

$$\rho = \rho_0 + \rho g(z_0 - z)$$

видно, что при изменении внешнего давления p_0 на $p'_0 = p_0 + \Delta p_0$ давление во всех точках данной жидкости, находящейся в равновесии, изменится на то же значение Δp_0 .

Таким образом, жидкость обладает свойством передавать давление.

Это свойство жидкости положено в основу закона Паскаля, который формулируется следующим образом: давление, которое возникает на граничной поверхности жидкости, находящейся в равновесии, передается всем частицам этой жидкости по всем направлениям без изменения передаваемого давления.

На законе Паскаля основан принцип действия различных гидравлических устройств, с помощью которых давление передается на расстояние.

К таким устройствам относятся: гидравлические прессы, гидроподъемники, гидродомкраты, гидравлические аккумуляторы, гидравлические тормозные системы, гидромультпликаторы и др.

В качестве примера рассмотрим работу гидравлического прессы.

Гидравлический пресс применяют для получения больших сжимающих усилий, что необходимо, например, для деформации металлов при обработке давлением (прессование, ковка, штамповка), при испытании различных материалов, уплотнении рыхлых материалов, в технологических процессах по обезвреживанию осадков и т.д.

К поршню площадью F приложена сила P_1 , которая передается жидкости, создавая давление p_1 :

$$p_1 = \frac{P_1}{F_1}.$$

По закону Паскаля давление передается на поршень площадью F_2 , создавая полезную силу, под действием которой прессуется материал:

$$p_2 = p_1 = \frac{P_2}{F_2}.$$

Следовательно

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{F_1}{F_2} \quad (2.40)$$

или

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{d_1^2}{d_2^2}. \quad (2.41)$$

Из формулы (2.41) видно, что отношение усилий на малом и большом поршнях пропорционально квадрату отношения диаметров поршней.

Например, если диаметр большого поршня в десять раз больше диаметра малого поршня, то полезное усилие на большом поршне будет в 100 раз больше, чем на малом. [1,2,3,6,7,8]

2.10 Указания к решению задач

Пример 2.1. Определить усилие, которое развивает гидравлический пресс, имеющий $d_2 = 250$ мм, $d_1 = 25$ мм, $a = 1$ м и $b = 0,1$ м, если усилие, приложенное к рукоятке рычага рабочим, $N = 200$ Н, а КПД равен 0,8.

Решение: Сила P_2 определяется по формуле

$$P_2 = \eta N \frac{a+b}{b} \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2 = 0,8 \cdot 200 \frac{1+0,1}{0,1} \left(\frac{250}{25} \right)^2 = 176 \text{ кН.}$$

Таблица 2.1

Исходные данные к задаче 2.1

Варианты	d_1 , мм	d_2 , мм	b_1 , МПа	N_2 , МПа
1	100	50	8	6,5
2	150	100	7	5,5
3	200	120	6	4,3
4	250	130	5	4,7
5	300	150	4	3,6
6	100	160	3	2,8
7	150	170	2	1,6
8	200	180	1	0,5
9	250	190	1,5	1,0
0	300	200	2,5	2,0

Пример 2. Гидромультипликатор (рис 2.26) служит для повышения давления p_1 , передаваемого насосом или аккумулятором давления.

Определить давление p_2 при следующих данных: $G = 300$ кг, $D = 125$ мм, $p_1 = 10$ кг/см², $d = 50$ мм. Силами трения в уплотнениях пренебречь.

Решение: Из условия равновесия цилиндра 2 имеем

$$\frac{\pi D^2}{4} p_1 = \frac{\pi d^2}{4} p_2 + G.$$

Отсюда

$$p_2 = p_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2 - \frac{4G}{\pi d^2} = 10 \cdot \left(\frac{125}{50} \right)^2 - \frac{4 \cdot 300}{\pi \cdot 5^2} = 47,22 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

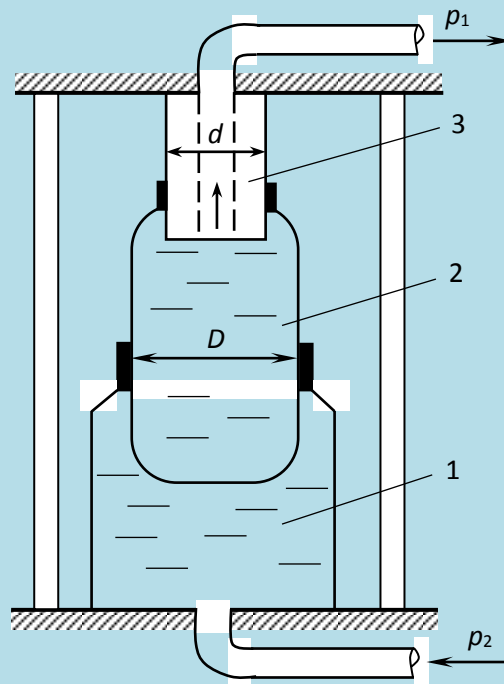


Рис 2.10

Таблица 2.2

Исходные данные к задаче 2.2

Варианты	D, мм	d, м	p ₁ , кг/см ²	G, кг
1	100	50	8	100
2	150	100	7	150
3	200	120	6	200
4	250	130	5	250
5	300	150	4	300
6	100	160	3	350
7	150	170	2	400
8	200	180	1	50
9	250	190	1,5	350
0	300	200	2,5	300

Пример 3. Определить $h_{\text{вак}}$ и построить эпюры вакууметрического и абсолютно-го давлений на стенку водяного вакуумметра, если $p_{\text{абс}} = 0,85 \cdot 10^5$ Па, а в нижнем резервуаре вода.

Решение:

$$h_{\text{вак}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{абс}}}{\rho g} = \frac{(0,981 - 0,85) \cdot 10^5}{9,81 \cdot 10^3} = 1,34 \text{ м.}$$

Эпюры вакууметрического и абсолютного давлений построены на рис. 2.27.

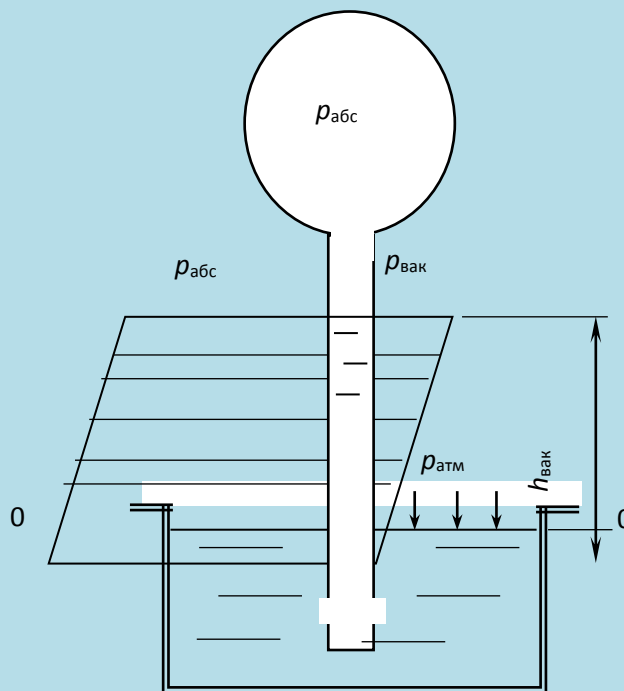


Рис. 2.11

Пример 4. Определить показания жидкостного манометра, присоединенного к резервуару с водой, на глубине $h = 1$ м, если по показаниям пружинного манометра давление $p_m = 0,25 \cdot 10^5$ Па (рис. 2.28).

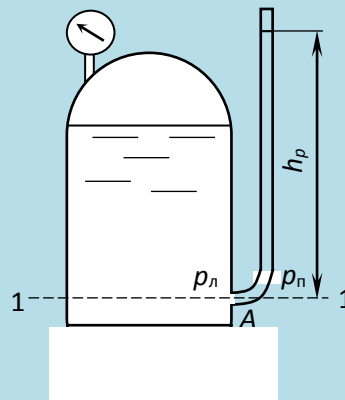


Рис. 2.12

Решение: Так как пружинный манометр показывает $0,25 \cdot 10^5$ Па, то

$$p_0 = p_{\text{атм}} + 0,25 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

В сечении 1-1 $p_{\text{л}} = p_{\text{п}}$, но при этом

$$p_{\text{л}} = p_0 + \rho gh \text{ и } p_{\text{п}} = p_{\text{атм}} + \rho gh_p.$$

Отсюда

$$p_0 + \rho gh = p_{\text{атм}} + \rho gh_p$$

или

$$p_{\text{атм}} + 0,25 \cdot 10^5 + \rho gh = p_{\text{атм}} + \rho gh_p;$$

отсюда

$$h_m = \frac{2,5 \cdot 10^4 + \rho gh}{\rho g} = \frac{2,5 \cdot 10^4 + 10^3 \cdot 9,81 \cdot 1}{10^3 \cdot 9,81} = 3,54 \text{ м.}$$

Пример 5. Определить плотность шара ρ , плавающего в сосуде, при полном погружении, если центр тяжести шара лежит в плоскости раздела жидкостей $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2 = 1200 \text{ кг/м}^3$ (рис.2.29).

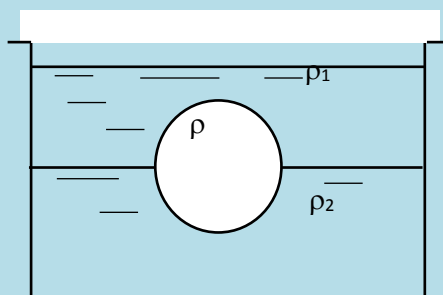


Рис.2.13

Решение: Обозначим объем шара $2W$. Так как центр шара находится в плоскости раздела, то ясно, что он вытеснил равные объемы W каждой из жидкостей.

Очевидно, что на шар действуют выталкивающие силы: $\rho_1 gW$ верхней его половины и $\rho_2 gW$ нижней половины. В равновесии алгебраическая сумма сил тяжести $\rho g 2W$ и архимедовых сил равна нулю, т.е.

$$\rho g 2W - \rho_1 gW - \rho_2 gW = 0.$$

После сокращения на gW получим

$$\rho = \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} = \frac{(1000 + 1200)}{2} = 1100 \text{ кг/м}^3.$$

Пример 6. Определить минимально необходимый диаметр шарового поплавка, обеспечивающего автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если вода под давлением $p = 24,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ заполняет резервуар через трубу диаметром $d = 15 \text{ мм}$, при $a = 15 \text{ мм}$ и $b = 500 \text{ мм}$.

Собственной массой рычага, клапана и поплавка пренебречь (рис. 2.30).

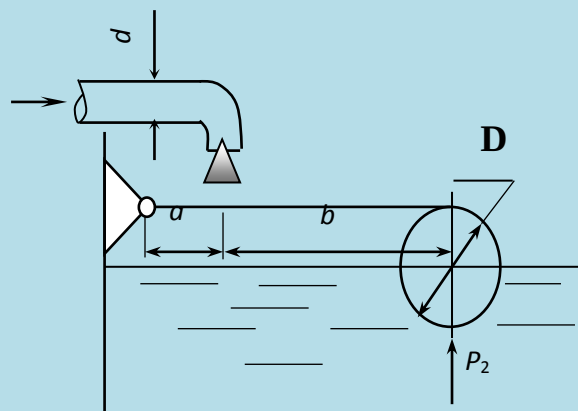


Рис. 2.14

Решение:

1. Сила, действующая на клапан:

$$P_1 = p\omega = \frac{\rho\pi d^2}{4} = 24,5 \cdot 10^4 \frac{\pi(0,015)^2}{4} = 43,3 \text{ Н}.$$

2. Подъемная сила, приложенная к шару:

$$P_2 = P \left(\frac{a}{a+b} \right) = 43,3 \cdot \left(\frac{100}{100+500} \right) = 7,22 \text{ Н}.$$

3. Необходимый объем поплавка:

$$W = \frac{P_2}{\rho g} = \frac{7,22}{10^3 \cdot 9,81} = 0,736 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

4. Диаметр шара:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,736 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм}.$$

Таблица 2.6

Исходные данные к задаче 2.6

Варианты	d, м	a, мм	b, мм
1	50	10	500
2	10	15	450
3	15	20	200
4	15	25	250
5	15	10	300
6	15	15	350
7	20	20	400
8	20	25	50
9	20	10	350
10	50	15	300

Пример 7. Определить силу, точку приложения и направление ее действия, если вода действует на затвор диаметром $D = 2$ м, шириной $B = 3$ м (рис. 2.31).

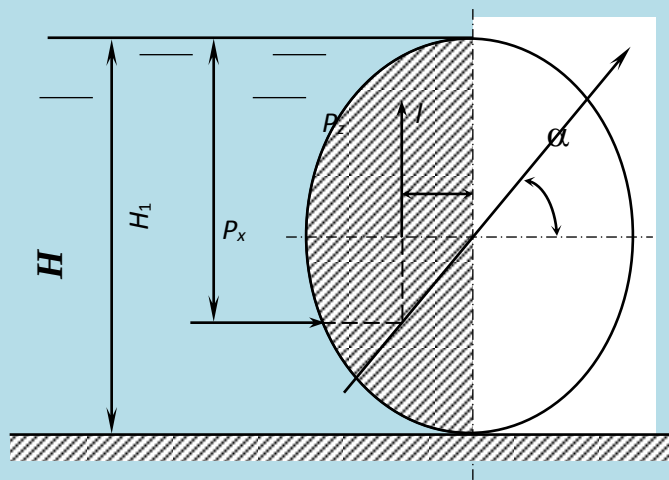


Рис. 2.15

Решение:

1. Сила, действующая на вертикальную проекцию, P_x :

$$P_x = \rho g h_c \omega = \rho g \frac{D}{2} DB = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{2}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 58,86 \text{ кН.}$$

2. Вертикальная составляющая силы

$$P_z = \rho g v = \rho g \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} B = 1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi 2^2}{4} \cdot 3 = 4623 \text{ кН.}$$

3. Полная сила гидростатического давления

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{(58,86)^2 + (46,23)^2} = 74,84 \text{ кН.}$$

4. Угол наклона результирующей силы с горизонтальной осью

$$\alpha = \arctg \frac{P_z}{P_x} = \arctg \frac{46,23}{58,86} = 30^\circ 15'.$$

Сила P проходит через центр окружности и приложена в точке D.

Таблица 2.7

Исходные данные к задаче 2.7

Варианты	D, м	B, мм
1	5	10
2	1	4
3	1	3
4	1	6

5	1	3
6	1	3
7	2	4
8	2	5
9	2	3
0	5	2

Пример 9. Определить минимально необходимый диаметр шарового поплавка, обеспечивающего автоматическое закрытие клапана при наполнении резервуара, если вода под давлением $p = 24,5 \cdot 10^4$ Па заполняет резервуар через трубу диаметром $d = 15$ мм, при $a = 15$ мм и $b = 500$ мм.

Собственной массой рычага, клапана и поплавка пренебречь (рис. 2.32).

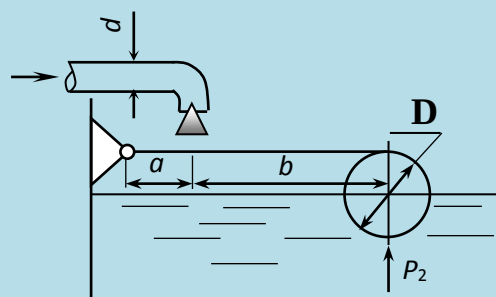


Рис. 2.16

Решение:

1. Сила, действующая на клапан:

$$P_1 = p\omega = \frac{p\pi d^2}{4} = 24,5 \cdot 10^4 \frac{\pi(0,015)^2}{4} = 43,3 \text{ Н}.$$

2. Подъемная сила, приложенная к шару:

$$P_2 = P \left(\frac{a}{a+b} \right) = 43,3 \cdot \left(\frac{100}{100+500} \right) = 7,22 \text{ Н}.$$

3. Необходимый объем поплавка:

$$W = \frac{P_2}{\rho g} = \frac{7,22}{10^3 \cdot 9,81} = 0,736 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

4. Диаметр шара:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,736 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,112 \text{ м} = 112 \text{ мм}.$$

Таблица 2.9

Исходные данные к задаче 2.9

Варианты	d, м	a, мм	b, мм
1	50	8	500
2	10	7	450
3	15	6	200
4	15	5	250
5	15	4	300
6	15	3	350
7	20	2	400
8	20	1	50
9	20	1,5	350
0	50	2,5	300

Контрольные вопросы

1. Дайте определение гидростатики
2. Перечислите силы, действующие на рассматриваемый объем жидкости.
3. Дайте определение гидростатического давления.
4. Какова размерность давления?
5. В каких единицах измеряется давление?
6. Сформулируйте основную теорему гидростатики.
7. Сформулируйте основное условие равновесия жидкости.
8. Раскройте физический смысл проекций X , Y , Z .
9. Раскройте физический смысл потенциала сил.
10. Что называется поверхностью уровня (поверхностью равного давления)?
11. Перечислите свойства поверхности уровня.
12. Что представляет собой поверхность уровня в поле сил тяготения?
13. Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное дифференциальное уравнение гидростатики.
14. Раскрыть физический смысл членов, входящих в основное интегральное уравнение равновесия.
15. Что называется полным (абсолютным) давлением (показать схематически)?
16. Что называется избыточным давлением и вакуумом?
17. Что называется пьезометрическим и гидростатическим напором?
18. Раскрыть энергетическую сущность основного уравнения гидростатики.
19. Сформулируйте закон Паскаля.
20. По каким формулам определяется сила давления и центр давления

на цилиндрические поверхности?

21. *Что такое тело давления? Как определяется тело давления при отсутствии свободной поверхности ?*
22. *Как определяется давление жидкости в круглой трубе?*
23. *По какой формуле определяется сила гидростатического давления жидкости на колено трубы?*
24. *Как формулируется закон Архимеда?*
25. *Что такое остойчивость плавающего тела?*
Что называется метацентром и метacentрическим радиусом? [6,7]

РАЗДЕЛ 3. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

3.1 Характеристика движения жидкости

В гидродинамике жидкость считается сплошной (непрерывной) средой, сплошь заполняющей пространство без образования пустот. Такая среда называется континуумом. Все свойства жидкости (плотность, вязкость и др.), если не являются постоянными, то меняются в пространстве непрерывно, т. е. при бесконечно малом перемещении в пространстве получаются и бесконечно малые изменения свойств жидкости. Изучение законов движения жидкости в гидравлике начинается на основе гидромеханики невязкой (идеальной) жидкости, т. е. без учета сил трения, а затем в полученные зависимости вводятся уточнения, основанные на экспериментальных данных.

Кинематика жидкости изучает связи между геометрическими характеристиками движения и временем; это выражается в таких элементах как скорость, ускорение жидкой частицы и др. Динамика жидкости — гидродинамика — изучает законы движения жидкости как результат действия сил.

Движение жидкости характеризуется следующими гидромеханическими элементами: скорость движения частиц и гидродинамическое давление. Так как все реальные жидкости имеют вязкость, то в них не может быть взаимного смещения (разрыва) прилегающих друг к другу частиц, и поэтому скорости частиц изменяются и во времени, и в пространстве непрерывно, т. е. являются в общем случае непрерывными функциями координат пространства и времени.

Таким образом, чтобы полностью охарактеризовать механическую картину движения жидкости, надо знать гидромеханические элементы во всех точках пространства, занятого движущейся жидкостью, а также ее механические свойства. Существует два метода описания движения жидкости: метод Лагранжа и метод Эйлера.

Метод Лагранжа. В этом методе как бы прослеживается движение отдельных частиц. Пусть в начальный момент времени t_0 положение частицы жидкости определяется ее начальными координатами a , b и c . С течением времени коор-

динаты движущейся частицы будут меняться и к некоторому моменту времени t они станут x , y и z .

Для каждого момента времени координаты жидкой частицы будут заданы значениями начальных координат a , b и c и моментом времени t . Кроме того, плотность жидкости ρ должна быть также задана как функция координат a , b , c и момента времени t , т. е. кинематическая картина движения будет описана, если будут известны функции:

$$\begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t); \\ y &= f_2(a, b, c, t); \\ z &= f_3(a, b, c, t); \\ \rho &= f_4(a, b, c, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Переменные x , y и z называются переменными Лагранжа. Проекции скорости частицы на координатные оси определяются уравнениями:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

а проекции ускорения соответственно

$$w_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad w_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad w_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Уравнения характеризуют «историю» движения частицы жидкости во времени. Метод Эйлера. В этом методе обычно движение жидкости характеризуют построением поля скоростей (картины течения в различных точках пространства в каждый данный момент времени t).

Кинематическая картина движения жидкости будет описана, если скорости и давления во всех точках жидкости определены в виде функций:

$$\begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t); \\ u_y &= f_2(x, y, z, t); \\ u_z &= f_3(x, y, z, t); \\ \rho &= f_4(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь u_x , u_y и u_z — три взаимно перпендикулярные составляющие полной скорости. Функции u_x , u_y и u_z называют переменными Эйлера. Они позволяют определить скорость в любой точке пространства в любой момент времени.

При этом движение определенной частицы жидкости в пространстве уравнения не учитывают.

Метод Лагранжа не получил в гидродинамике широкого распространения, так как он дает решение лишь для простейших случаев течения. Обычно изучение движения жидкости основано на методе Эйлера. Именно зависимости (2.2) позволяют построить полную картину течения жидкости в любой момент времени и, следовательно, изучить характер движения жидкости. [2,3,6,7]

3.2 Основные понятия гидродинамики и виды движения жидкости

В общем случае для потока жидкости скорость движения частицы жидкости и давление являются функциями координат пространства и времени:

$$u=f_1(x, y, z, t) \quad p=f_2(x, y, z, t). \quad (2.3)$$

такое движение называется неустановившимся.

Примерами неустановившегося движения жидкости являются истечение жидкости из отверстия при переменном напоре (по мере уменьшения напора величина скорости истечения и давление в выходном сечении струи уменьшается), движение воды в реке при быстром изменении уровня (в паводок) и др.

Если скорость движения частиц жидкости и давление во всех точках потока с течением времени остаются неизменными, то такое движение называется установившимся движением.

При установившемся движении скорость и давление p во всех точках с течением времени не меняются, что можно выразить следующими условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Примерами установившегося движения может служить движение воды в канале или реке при постоянном уровне и истечение жидкости из отверстия или крана при постоянном напоре.

Если все частицы жидкости движутся по прямолинейным взаимно параллельным траекториям с равными скоростями, то такое движение, характеризующееся изменением только одной координаты, называется одномерным.

Когда все частицы движутся по траекториям, параллельным некоторой неподвижной плоскости, причем все характеристики движения (скорости, давления и пр.) не зависят от расстояния до этой плоскости, то такое движение называется плоским или двухмерным.

Линия тока. Если через ряд точек потока жидкости провести кривую таким образом, что вектор скорости частицы жидкости в каждой точке будет касательным к этой кривой, то такая линия, характеризующая направление движения

ряда последовательно расположенных частиц жидкости в данный момент времени, называется линией тока.

При установившемся движении линия тока и траектория частицы жидкости совпадают. При неустановившемся движении линии тока не будут совпадать с траекториями частиц жидкости, так как направление и величина скоростей отдельных частиц жидкости с течением времени будут меняться и частицы жидкости, находившиеся в какой-то момент времени на одной линии тока, в следующий момент окажутся на разных.

Рассмотрим движение частицы жидкости (рис. 2.2): за момент времени dt частица при скорости u пройдет некоторый путь dl , проекции которого на координатные оси будут dx , dy , dz , а составляющие скорости:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt},$$

откуда получим

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}. \quad (2.4)$$

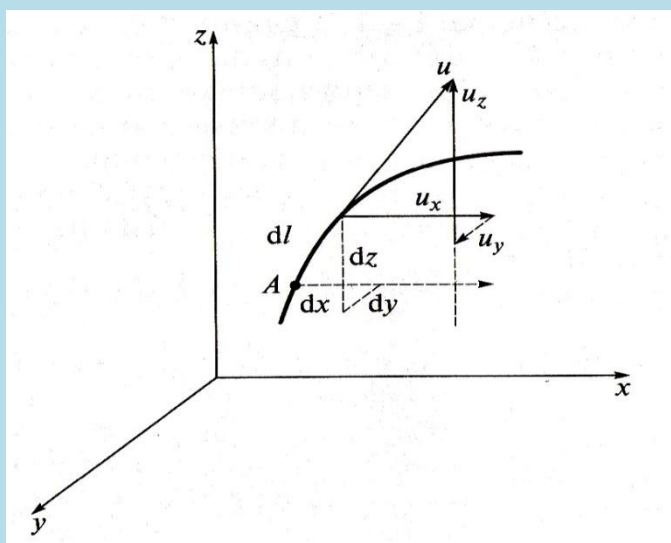


Рис. 3.1

Это уравнение называется уравнением линии тока.

Элементарная струйка. Если в движущейся жидкости выделить в плоскости, перпендикулярной течению, элементарную бесконечно малую площадку $d\omega$ и через все точки, находящиеся на ее контуре, провести линии тока для данного момента времени, то получившаяся поверхность называется трубкой тока, а находящаяся в ней жидкость образует элементарную струйку. Последняя обладает следующими свойствами:

форма элементарной струйки при установившемся движении остается неизменной во времени, так как в этом случае линии тока с течением времени не меняют своей формы;

вхождение в элементарную струйку внешних линий тока и выхода из нее содержащихся в ней линий тока не происходит, так как боковая поверхность элементарной струйки образована линиями тока, к которым скорости направлены по касательной;

скорости во всех точках поперечного сечения элементарной струйки можно считать одинаковыми вследствие незначительности поперечного сечения элементарной струйки.

Рассмотрим элементарную струйку потока с поперечным сечением $d\omega$ и постоянной скоростью движения частиц u по сечению струйки.

Через промежуток времени t частицы жидкости из поперечного сечения $1-1$ переместятся в сечение $1'-1'$ на расстояние s ; при этом через сечение $1-1$ пройдет элементарный объем жидкости $dW = s d\omega$. Разделив обе части равенства

на промежуток времени t , получим $\frac{dW}{t} = \frac{s}{t} d\omega$, где $\frac{dW}{t}$ — элементарный объем,

прошедший через сечение $1-1$ за единицу времени, т.е. элементарный расход струйки dQ ; s/t — путь, пройденный за единицу времени, т.е. скорость движения жидкости u . Таким образом, $dQ = u d\omega$, расход струйки равен произведению площади ее поперечного сечения на скорость в этом сечении.

Поток. Совокупность элементарных струек, протекающих через площадку достаточно больших (конечных) размеров, называется потоком жидкости.

Потоки по своему характеру могут быть разделены на три категории:

безнапорные потоки, ограниченные снизу и с боков твердыми стенками русла и имеющие свободную поверхность, на которую действует, как правило, атмосферное давление (примером является движение жидкости в канале, реке, лотке; движение в них происходит под действием силы тяжести);

напорные потоки, ограниченные со всех сторон жесткими стенками, не имеющие свободной поверхности, движение которых происходит под влиянием давления, создаваемого водонапорным резервуаром или насосом (примером является движение жидкости в заполненном трубопроводе);

струи, потоки, ограниченные с боков жидкой или газовой средой, движение которых происходит по инерции под влиянием начальной скорости, созданной давлением или силой тяжести; в отличие от предыдущих потоков струи в газовой среде имеют со всех сторон свободную поверхность (примером является струя, вытекающая из отверстия или брандспойта, дым из трубы и др.).

Живым сечением потока называется поверхность, проведенная нормально к линиям тока. Площадь живого сечения обозначается буквой ω .

Смоченным периметром потока (обозначаемым греческой буквой χ) называется длина части периметра живого сечения потока, на которой жидкость соприкасается с твердыми стенками.

Гидравлическим радиусом (обозначаемым буквой R) называется отношение площади живого сечения потока ω к смоченному периметру χ , т.е.

$$R = \frac{\omega}{\chi}. \quad (2.5)$$

Расходом жидкости называется количество жидкости, протекающее через данное живое сечение потока в единицу времени. Расход жидкости обозначается буквой Q и измеряется обычно в метрах кубических в секунду ($\text{м}^3/\text{с}$) или литрах в секунду ($\text{л}/\text{с}$). Так как поток жидкости состоит из бесконечно большого числа элементарных струек с расходом dQ , то общий расход потока представится суммой расходов элементарных струек

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (2.6)$$

Для многих практических расчетов важно знать расход и не обязательно знать местную скорость u в каждой точке жидкости. Кроме того, точный закон распределения скоростей по сечению не всегда известен, и вычисление интеграла ввиду неопределенности функции $u=f(x, y, z)$ затруднительно. В этом случае вводится понятие средней скорости потока v . Под средней скоростью понимают некоторую одинаковую во всех точках потока скорость, при которой расход потока будет таким же, что и при фактических местных скоростях. Поэтому расход в живом сечении потока представляют как произведение площади живого сечения потока ω на величину средней для всего живого сечения скорости v , т. е.

$$Q = \omega v. \quad (2.7)$$

Откуда величина средней скорости будет

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\int_{\omega} u d\omega}{\omega}. \quad (2.8)$$

В дальнейшем, когда будет идти речь о скорости движения потока, мы под этой величиной будем подразумевать именно среднюю скорость и обозначать ее v .

Равномерное и неравномерное движение. Если представить себе какой-либо поток, находящийся в установившемся движении (реку, канал), то его мысленно можно разбить на множество элементарных струек. Те точки различных живых сечений, в которых проходит ось одной и той же элементарной струйки, будем называть соответственными точками.

Равномерным движением потока называется такое установившееся движение, при котором живые сечения потока и средние скорости в них одинаковы по всей его длине и при этом скорости потока в соответственных точках всех живых сечений также одинаковы.

Примером равномерного движения могут служить движение потока в канале с постоянной формой живого сечения и постоянной глубиной или движение жидкости в цилиндрической трубе.

Если по длине потока изменяется его живое сечение (хотя бы по форме) или при постоянном сечении изменяется распределение скоростей в разных живых сечениях, то движение называется неравномерным.

Типичным примером неравномерного движения потока является движение воды в реке на участке перед плотиной: по длине потока живое сечение и глубины увеличиваются, а скорости убывают. Неравномерным будет также движение воды в реке на ее сужении или расширении или переходе от глубокого участка (плеса) к мелкому (перекату), или наоборот.

Плавноизменяющееся движение. При движении жидкости в естественных руслах обычно живое сечение непрерывно изменяется вдоль потока как по форме, так и по площади, и движение жидкости является установившимся неравномерным. Для облегчения изучения такого движения в гидравлике введено понятие «плавноизменяющееся движение», которое характеризуется следующими свойствами:

кривизна линий тока в потоке считается весьма незначительной;

угол расхождения между отдельными линиями тока очень мал;

живые сечения потока являются плоскими сечениями, нормальными к оси потока.

Если внутри плавно изменяющегося потока выделить частицу жидкости и спроектировать все действующие на нее силы на плоскость живого сечения, то вследствие того, что скорости и ускорения почти перпендикулярны живому сечению, силы инерции в уравнение равновесия не войдут; поэтому уравнение равновесия и закон распределения давления в плоскости живого сечения ничем не будут отличаться от закона распределения давления в жидкости, находящейся в покое. Отсюда следует четвертое важное свойство плавно изменяющегося движения:

при плавноизменяющемся движении давление по живому сечению распределяется по гидростатическому закону, т. е. по закону прямой линии. [2,3,6,7]

3.3 Уравнения Эйлера

При рассмотрении движения жидкостей мы встречаемся с целым рядом новых переменных, которых не было при рассмотрении жидкости в равновесии.

Основной переменной является время t , и в зависимости от нее могут изменяться все остальные величины, характеризующие движение.

В общем случае на жидкость действуют силы массовые F_m , силы поверхностные F_p , силы инерции F_i и силы трения $F_{тр}$. Изучение законов движения жидкости начнем на основе гидромеханики невязкой (идеальной) жидкости, т. е. без учета сил трения, а затем в зависимости введем уточнения, полученные на основе экспериментальных данных.

Обозначая проекции на оси координат ускорений объемных сил через $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, проекции на оси координат скорости точки через u_x , u_y и u_z , гидродинамическое давление в точке p и плотность ρ , мы имеем восемь величин, характеризующих движение каждой частицы жидкого тела.

Задача гидродинамики — установить зависимости этих величин от координат времени t и пространства x , y и z .

Выведем основные дифференциальные уравнения, устанавливающие эту зависимость. Выделим в движущейся жидкости элементарно малый объем в форме параллелепипеда.

Воспользуемся полученными в подразд. 1.2 уравнениями равновесия, в которых на основании принципа Д'Аламбера к действующим на элементарный параллелепипед силам присоединим также силы инерции.

Сумма проекций всех сил на ось x , включая силу инерции

$$m \frac{du_x}{dt} = \rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}, \text{ отнесенная к единице массы жидкости, т.е.}$$

после сокращения на $\rho dx dy dz$, дает нам уравнение

$$\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} = 0 \quad (2.9)$$

Составляя аналогичные уравнения относительно осей y и z , мы получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{du_x}{dt} &= 0; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{du_y}{dt} &= 0; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{du_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Так как $u_x = f(x, y, z, t)$ есть функция четырех переменных, то ее полный дифференциал

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz.$$

Разделив все члены этого полного дифференциала на dt , получим

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

аналогично можно представить $\frac{du_y}{dt}$ и $\frac{du_z}{dt}$.

Как известно, производные от координаты движущейся точки по времени представляют собой соответствующие проекции ее скорости, а подставляя их в уравнения и перенеся члены, содержащие скорости, в правую часть, мы получим эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} ; \\ \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} ; \\ \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} .\end{aligned}\quad (2.11)$$

Полученные уравнения, выведенные Эйлером в 1755 г., являются общими дифференциальными уравнениями движения жидкого тела.

Они дают зависимость между обычно известными ускорениями объемных сил

$\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, плотностью жидкости ρ , неизвестными величинами проекций скорости на оси координат u_x , u_y и u_z гидродинамическим давлением p . Гидродинамическое давление в отличие от гидростатического является функцией не только координат пространства, но и времени по зависимости (2.3).

Ускорения, представленные в правой части системы (2.11), можно разделить на локальные ускорения, определяемые первым членом, и конвективные ускорения, представленные последующими тремя членами. При установившемся движении локальные ускорения равны нулю, а конвективные ускорения существуют.

Плотность ρ для капельной жидкости, как и в гидростатике, принимается постоянной и не зависящей от координат и времени $\rho = \text{const}$.

Таким образом, уравнения движения Эйлера содержат четыре неизвестных переменных величины u_x , u_y , u_z и p , а так как уравнений только три, то для определенности решения необходимо иметь еще одно уравнение, каковым и является уравнение неразрывности потока.

3.4 Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

Сплошным (неразрывным) потоком капельной жидкости называется поток, в котором внутри жидкости отсутствуют как пустоты (разрывы сплошности течения), так и переуплотнения, не возможные для несжимаемой жидкости.

Представим себе в пространстве неподвижный элементарный параллелепипед (рис. 2.2) с ребрами dx , dy и dz , через который протекает сплошной поток жидкости. Так как весь объем рассматриваемого параллелепипеда заполнен протекающей жидкостью

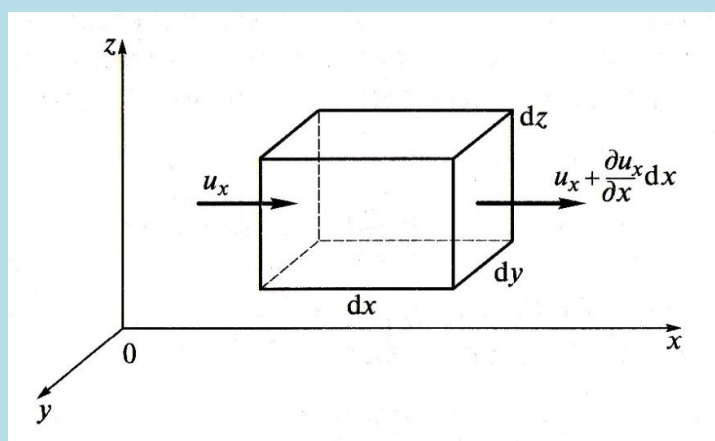


Рис. 3.2

постоянной плотности $\rho = \text{const}$, то с течением времени масса жидкости в объеме параллелепипеда не изменяется.

Пусть жидкость входит в параллелепипед по оси x и ее скорость равна u_x , на противоположной грани, отстоящей от входной на расстоянии dx , скорость будет соответственно равна $u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$.

Тогда количество жидкости, входящей за время dt , будет равно $dydz u_x dt$, а масса ее будет $\rho dydz u_x dt$. Количество выходящей через противоположную грань жидкости

$$dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt,$$

а масса ее

$$\rho dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt.$$

Изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда от перемещения частиц параллельно оси x :

$$dm_x = \rho dydz u_x dt - \rho dydz \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) dt = -\rho dx dydz \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) dt.$$

Аналогично изменения массы жидкости в объеме параллелепипеда от движения параллельно осям y и z имеют вид

$$dm_y = -\rho dx dydz \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) dt \quad dm_z = -\rho dx dydz \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dt.$$

Сложив полученные изменения массы жидкости, определим общее изменение массы dm , которое из условия сплошности потока (невозможности образования разрывов в нем) должно быть равно нулю:

$$dm = -\rho dx dydz \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dt = 0.$$

Разделив это уравнение на $-\rho dx dydz dt$, мы получим уравнение неразрывности потока в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (2.12)$$

Это уравнение, называемое дифференциальным уравнением неразрывности движения несжимаемой жидкости, является четвертым дифференциальным уравнением в системе (2.11), связывающей u_x , u_y , u_z и p .

Интегрирование системы уравнений (2.11) и (2.12) даже для частных случаев встречает непреодолимые математические трудности, и поэтому общего решения их пока нет.

Для газов к системе уравнений (2.1) кроме уравнения неразрывности еще необходимо добавить уравнение состояния газа. Уравнение неразрывности здесь приводит к изменению количества массы за счет изменения плотности среды во времени, которое можно записать

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Соответственно изменение количества массы в параллелепипеде определяется в направлении оси x :

$$dm_x = \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dy dz dt,$$

а аналогичные выражения для осей y и z

$$dm_y = \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dx dy dz dt;$$

$$dm_z = \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dx dy dz dt.$$

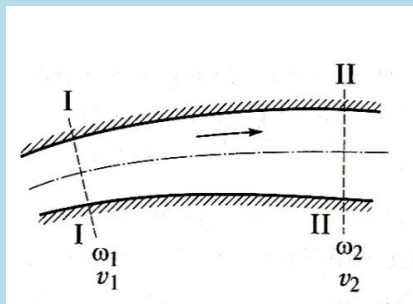
Сумма величин dm , dm_x , dm_y и dm_z в условиях неразрывности должна быть равна нулю, а при сокращении на $dx dy dz dt$ получим дифференциальное уравнение неразрывности для сжимаемой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

Данное уравнение характеризует связь между проекциями скоростей и изменяющейся плотностью при движении сжимаемой среды.

В гидравлике применяется также уравнение неразрывности потока, которое можно получить на основании простых логических рассуждений — «от противного» (в предположении изменения массы потока); это уравнение имеет более простую математическую форму.

Пусть имеется поток с установившимся движением, ограниченный непроницаемыми стенками (рис. 3.3).



Проведем перпендикулярно движению потока два поперечных сечения I—I и II—II, площади которых обозначим через ω_1 и ω_2 , а средние скорости в них — через v_1 и v_2 . Тогда расходы, проходящие соответственно через каждое сечение

$$Q_1 = \omega_1 v_1; \quad Q_2 = \omega_2 v_2.$$

Если предположить, что $Q_1 > Q_2$, тогда через некоторый промежуток времени в объеме, заключенном между рассматриваемыми сечениями вследствие избытка количества притекающей жидкости Q_1 над вытекающей Q_2 должно происходить накопление жидкости, что ввиду жесткости стенок русла и несжимаемости жидкости невозможно; следовательно, это предположение является нереальным.

Предположим, что $Q_1 < Q_2$, тогда через некоторый промежуток времени в объеме, заключенном между рассматриваемыми сечениями, вследствие избытка количества вытекающей жидкости над притекающей должны образоваться пустые промежутки — разрывы в сплошном потоке, так как нигде между сечениями I и II добавочного поступления жидкости в поток не происходит.

Но если разрывов сплошности потока не образуется, то и это второе предположение тоже является нереальным.

Остается третье предположение, что $Q_1 = Q_2$; это предположение и осуществляется, когда поток течет без разрывов сплошности с постоянным расходом.

В особых случаях сплошность движения может нарушаться. Это происходит, например, когда давление в жидкости оказывается меньше давления ее паров и она начинает вскипать. В таких случаях уравнение неразрывности теряет силу.

Так как сечения I и II взяты произвольно по длине сплошного потока, то в общем виде по длине потока должно соблюдаться равенство

$$Q_1 = Q_2 = Q_n = \text{const.} \quad (2.14)$$

Ввиду того, что $Q_1 = \omega_1 v_1$ и $Q_2 = \omega_2 v_2$, из (2.14) следует

$$\omega_1 v_1 = \omega_2 v_2$$

откуда получаем важное следствие о соотношении средних скоростей потока в различных сечениях

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (2.15)$$

т. е. скорости потока обратно пропорциональны площадям живых сечений. [2,3,6,7]

3.5 Уравнение Бернулли для установившегося движения идеальной жидкости

При установившемся движении $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ или $\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$.

Уравнения при этом упрощаются и принимают вид:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) = 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z);$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x); \\ -\frac{\partial}{\partial y}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y); \\ -\frac{\partial}{\partial z}\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z). \end{aligned}$$

Если умножить каждое из уравнений системы соответственно первое на dx , второе на dy и третье на dz и сложить, то получим

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 2[(u_z \omega_y - u_y \omega_z)dx + (u_x \omega_z - u_z \omega_x)dy + (u_y \omega_x - u_x \omega_y)dz].$$

Правую часть уравнения можно переписать в виде определителя

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}.$$

Когда определитель в правой части уравнения обращается в нуль, то

$$-d\left(\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}\right) = 0 \quad \text{и}$$

$$\Pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}.$$

Последнее уравнение является важнейшим в гидравлике, и было выведено в 1738 г. академиком Петербургской Академии наук Д.Бернулли.

Рассмотрим, в каких же случаях правая часть уравнения превращается в нуль. Из математики известно, что определитель равен нулю, если какая-либо строка или столбец его представлены нулями или если какая-либо пара строк состоит из пропорциональных членов.

Таким образом, уравнение Бернулли будет действительно при выполнении одного из следующих условий:

$$1. \quad \omega_x=0, \omega_y=0, \omega_z=0;$$

$$2. \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z};$$

$$3. \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z};$$

$$4. \quad \frac{\omega_x}{u_x} = \frac{\omega_y}{u_y} = \frac{\omega_z}{u_z}.$$

Первое условие характеризует невихревой потенциальный поток, для которого в целом применимо уравнение Бернулли. Второе условие выражает собой уравнение линии тока. Поэтому уравнение Бернулли будет применимо и для вихревого движения, но только для каждой отдельной линии тока. Третье условие выражает собой уравнение вихревой линии, для каждой из которых

быть также применено уравнение Бернулли. Четвертое условие характеризуется отношением

$$\frac{\omega_x}{u_x} = \frac{\omega_y}{u_y} = \frac{\omega_z}{u_z}$$

или $\omega_x = au_x$; $\omega_y = au_y$; $\omega_z = au_z$.

Подставив полученные значения компонентов вихря в уравнение вихревой линии

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

получим

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

т.е. уравнение вихревой линии примет вид, совпадающий с уравнение линии тока.

Таким образом, четвертое условие выражает собой такое движение жидкости, при котором ее частицы движутся по линии тока и одновременно вращаются вокруг линии тока как оси вращения. Такое движение называется винтовым. Вектор скорости и вектор угловой скорости в винтовом движении совпадают по направлению. Уравнение Бернулли применимо к винтовому потоку в целом. [2,3,6,7]

Рассмотрев область применения уравнения Бернулли, приведем его к более простому для практического применения виду.

Для преобладающего большинства случаев из объемных сил действует только сила тяжести.

В этом случае $\bar{X} = 0$; $\bar{Y} = 0$; $\bar{Z} = -g$ и $-d\Pi = \bar{X} dx + \bar{Y} dy + \bar{Z} dz = -g dz$, т. е. $\Pi = gz + C$.

Уравнение Бернулли для идеальной жидкости, находящейся под действием только силы тяжести, будет иметь вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = const$$

или после деления на g

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} = const$$

3. 6 Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости

При выводе уравнения Бернулли для идеальной жидкости из закона живых сил мы не учитывали работу сил трения, которая не может быть опущена при рассмотрении движения реальных жидкостей, так как в этом случае часть энергии потока будет затрачена на преодоление сопротивления трения.

Выражение закона живых сил для единицы веса жидкости элементарной струйки с учетом работы силы трения, которую для единицы веса жидкости мы обозначим через h_c , имеет вид

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_c$$

Это и

есть уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости. Оно отличается от уравнения (2.26) для идеальной жидкости наличием добавочного члена h_c , который представляет собой потерю энергии на преодоление сил трения, отнесенную к единице силы тяжести жидкости. Так как энергия, отнесенная к единице силы тяжести жидкости, имеет линейную размерность, то и h_c также имеет линейную размерность.

Гидравлический смысл уравнения Бернулли может быть уяснен из следующего примера. Возьмем какой-нибудь сосуд, наполненный водой, и присоединим к нему трубу АВ переменного сечения (рис. 2.4). В этой трубе будет происходить движение жидкости с изменяющейся по длине трубы скоростью. Предположим, что в пределах каждого поперечного сечения трубы скорости одинаковы.

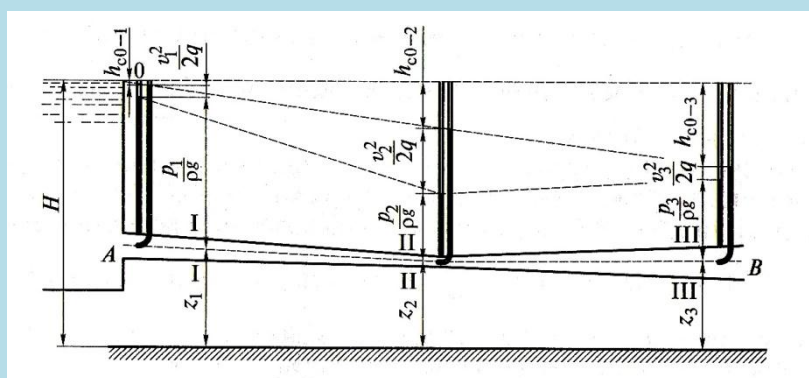


Рис. 3.4

Проведем по длине трубы три поперечных сечения I—I, II—II и III—III и обозначим соответственно давления и скорости в этих сечениях через p_1 и v_1 , p_2 и v_2 и p_3 и v_3 , а координаты центра тяжести проведенных в трубе сечений — через z_1 , z_2 и z_3 .

Установим в каждом сечении (рис. 2.5) по две вертикальные трубки: пьезометрическую — для измерения давления, гидрометрическую — с изогнутым концом, направленным навстречу течению. Гидрометрическая трубка (трубка Пи-

то) служит для измерения полного напора, т. е. $z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}$

Если в поток ввести пьезометрическую трубку, то жидкость

поднимается в ней на высоту $\frac{p}{\rho g}$; в гидрометрической трубке столбик жидкости вследствие перехода кинетической энергии частиц

жидкости в потенциальную будет стоять выше на величину $\frac{u^2}{2g}$.

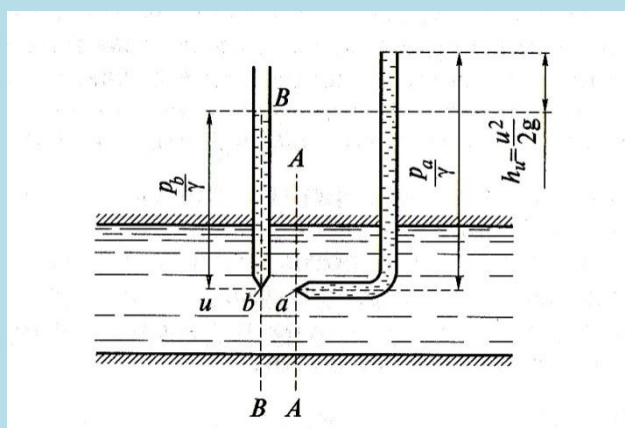


Рис. 3.5

Таким образом, разность показаний гидрометрической трубки

и пьезометрической трубки измеряет величину $\frac{u^2}{2g}$, называемую скоростным напором.

В сечении I—I трубы АВ горизонт в пьезометрической трубке будет стоять ниже, чем в гидрометрической трубке, на величину скоростного напора, затрачи-

ваемого на создание скорости в сечении I—I, т.е. на величину $\frac{u^2}{2g}$. Но и в первой гидрометрической трубке горизонт не достигнет уровня воды в баке, так как часть напора h_{c0-2} будет затрачена на преодоление сопротивления при входе в трубу АВ (см. рис. 2.9).

В сечении II—II разность показаний гидрометрической и пьезометрической трубок будет больше, чем в сечении I—I, так как скорость u_2 больше скорости u_1 . Разность показаний гидрометрических трубок в сечениях I—I и II—II дает потерю удельной энергии между сечениями I—I и II—II h_{c0-2} , а от начала трубы АВ — h_{c0-2}

В сечении III—III вследствие увеличения площади сечения скорость будет

меньше, и поэтому $\frac{u_3^2}{2g} < \frac{u_2^2}{2g}$; разность показаний гидрометрических трубок для сечений II—II и III—III дает потерю напора на трение на участке II—III, а от начала трубы h_{c0-3}

Соединив уровни в пьезометрических трубках, получим линию пьезометрического напора, или просто пьезометрическую линию, показывающую картину распределения пьезометрического

напора $z + \frac{p}{\rho g}$ по длине потока. Пьезометрическая линия может

опускаться (при увеличении скорости) либо подниматься (при уменьшении скорости вдоль потока). Линия, соединяющая уровни в гидрометрических трубках, носит название линии энергии или напорной линии. Вертикальные отрезки, заключенные между линией энергии и пьезометрической линией, дают

величину скоростного напора $\frac{u^2}{2g}$, а отрезки, заключенные между линией горизонта воды в баке и линией энергии, показывают потерю напора на преодоление сопротивлений.

Линия энергии по длине потока всегда опускается, так как часть энергии жидкости непрерывно убывает вдоль трубы. Как видно из чертежа (см. рис. 2.9), для любой пары сечений можно составить равенство суммы четырех высот:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_{c0-1} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + h_{c0-2} = H = const$$

Это равенство четырех высот для любой пары сечений является геометрической интерпретацией уравнения Бернулли и поясняет его гидравлический смысл. Здесь наглядно видны потери энергии и переход потенциальной энергии в кинетическую, и обратно.

Для каждого участка трубы наклон пьезометрической линии к горизонту i_n называется пьезометрическим уклоном:

$$i_n = \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right)}{l}.$$

Падение линии энергии на единицу длины потока называется гидравлическим уклоном I и выражается формулой

$$I = \frac{\left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}\right) - \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}\right)}{l},$$

где l — расстояние между сечениями I—I и II—II.

При равномерном движении $u_1 = u_2 = const$ и $i_n = I$, т.е. пьезометрический уклон равен гидравлическому уклону. [2,3,6,7]

При неравномерном падении напора пользуются понятием гидравлического уклона в данной точке потока

$$I = \frac{dh_c}{dl} = \frac{d\left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}\right)}{dl}.$$

3.7 Уравнение Бернулли для потока

Рассмотрим поток конечных размеров с плавно изменяющимся движением. Выделим в нем элементарную струйку с площадью поперечного сечения $d\omega$.

Энергия, заключенная в единице веса выделенной элементарной струйки, или так называемая удельная энергия элементарной струйки, имеет вид

$$e = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Энергия жидкости, протекающей через живое сечение элементарной струйки, за единицу времени:

$$dE = e \rho g dQ = \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega,$$

а энергия жидкости, протекающей за единицу времени через все живое сечение потока:

$$E = \int \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega$$

Величину средней удельной энергии потока в данном сечении получим, разделив предыдущее равенство на $\rho g Q$, т.е. на вес жидкости, протекающей за единицу времени:

$$e_{cp} = \frac{E}{\rho g Q} = \frac{1}{\rho g Q} \int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g} \right) \rho g u d\omega.$$

При плавноизменяющемся движении сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ в данном живом сечении есть величина постоянная и может быть вынесена за знак интеграла:

$$e_{cp} = \frac{1}{Q} \left(\left(z + \frac{p}{\rho g} \right) \int_{\omega} u d\omega + \frac{1}{2g} \int_{\omega} u^3 d\omega \right)$$

Так как $\int_{\omega} u d\omega = Q$, то первое слагаемое в выражении получается равным $z + \frac{p}{\rho g}$, а второе после умножения числителя и знаменателя на v^2 имеет вид

$$\frac{v^2}{2g} \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \frac{\alpha v^2}{2g},$$

где

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega}.$$

Рассмотрим последнее выражение отдельно, умножив его числитель и знаменатель на $\rho/2$:

$$\alpha = \frac{\int_{\omega} u^3 d\omega}{v^3 \omega} = \frac{\frac{\rho}{2} \int_{\omega} u^3 d\omega}{\frac{\rho}{2} v^3 \omega} = \frac{\int_{\omega} \rho u d\omega \frac{u^2}{2}}{\rho v \omega \frac{v^2}{2}} = \frac{\int_{\omega} \frac{u^2 dm}{2}}{\frac{mv^2}{2}}.$$

Здесь величина $\rho u d\omega = dm$ — масса, протекающая по одной элементарной

струйке за единицу времени, а $\int_{\omega} \frac{u^2 dm}{2}$ — сумма живых

сил элементарных струек по всему живому сечению, т.е. фактическая живая сила массы жидкости, протекающая за единицу времени во всем потоке; $\rho u \omega = \tau$ — масса, протекающая за единицу времени через все живое сечение потока, а $\frac{\tau v^2}{2}$ — живая сила этой же секундной массы жидкости, подсчитанная по средней скорости потока.

В результате уравнение Бернулли для потока, или величина средней удельной энергии потока в целом, в данном сечении запишется в виде

$$e_{cp} = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{av^2}{2g}$$

Коэффициент α называется коэффициентом кинетической энергии потока. Этот коэффициент характеризует влияние неравномерности распределения скоростей по сечению на удельную кинетическую энергию потока, вычисленную по средней скорости; он зависит от геометрической формы эпюры скоростей в живом сечении потока. [2,3,6,7]

Теперь можно написать уравнение Бернулли для потока невязкой жидкости в виде

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{av^2}{2g} = const$$

а для потока вязкой жидкости

$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{av^2}{2g} + h_c = const$$

3.8 Уравнение Бернулли для реальных газов

Уравнение в дифференциальной форме, когда из массовых сил действует только сила тяжести, имеет вид

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) = 0$$

Для реальных газов необходимо учитывать потери энергии на сопротивления, в связи с чем для элементарной струйки

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + d\left(\frac{v^2}{2g}\right) + dh_c = 0$$

где v — скорость элементарной струйки.

Интегрируя это уравнение вдоль элементарной струйки по длине от сечения I—I до сечения II—II, получим

$$z_2 - z_1 + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_{c1-2} = 0,$$

где через h_{c1-2} обозначены, как обычно, потери напора по длине струйки.

Найти величину интеграла $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g}$ — можно, если плотность является функцией давления p .

Вид этой функции зависит от характера термодинамического процесса, происходящего в том или другом случае движении газа. Так, например, истечение газа из отверстия в резервуаре можно (без существенной погрешности) считать происходящим без обмена тепла между выходящим газом и внешней средой, т.е. считать движение адиабатическим; движение газа по трубам с большой разностью давления в известных условиях можно рассматривать как изотермическое.

Общим случаем является политропический процесс. Из уравнения политропы

$\frac{p}{\rho^n} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const}$ находим зависимость плотности газа от давления, оно имеет вид

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Теперь можно найти значение интеграла

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} = \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{n}} dp = \frac{n}{n-1} \frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p^{1-\frac{1}{n}} - p_0^{1-\frac{1}{n}} \right).$$

Но второе слагаемое в скобках

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p_0^{1-\frac{1}{n}} \right) = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

а первое слагаемое

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g} \left(p^{1-\frac{1}{n}} \right) = \frac{p}{\rho g}$$

$$\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{\rho}$$

В этом легко убедиться, заметив, что $\frac{p_0^{\frac{1}{n}}}{\rho_0} = \frac{p^{\frac{1}{n}}}{\rho}$ в соответствии с уравнением политропы. Таким образом, искомая величина интеграла

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho g} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{p}{\rho g} - \frac{p_0}{\rho_0 g} \right).$$

Делая подстановку в уравнение Бернулли, получим это уравнение в виде

$$z_2 - z_1 + \frac{n}{n-1} \left(\frac{p_2}{\rho_2 g} - \frac{p_1}{\rho_1 g} \right) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_{c1-2} = 0$$

Или

$$z_1 + \frac{n}{n-1} \frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1} \frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{c1-2}$$

Зная, что $p_1 = \rho_1 g R T_1$, а $p_2 = \rho_2 g R T_2$, можно придать этому уравнению вид

$$z_1 + \frac{n}{n-1} R T_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{n}{n-1} R T_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_{c1-2}$$

Во многих случаях приходится встречаться с движением газа с большими скоростями (в ракетной технике, в газовых турбинах и т.д.). Физический процесс таких течений очень сложен, и изучение закономерностей его обычно является предметом особой дисциплины, называемой газовой динамикой. Здесь рассмотрим лишь одну характерную особенность течения газа с большой скоростью в трубах переменного сечения, заключающуюся в том, что скорость газа с увеличением площади сечения трубопровода не всегда убывает (это имеет место при движении несжимаемой жидкости), а может и возрасти (если скорость газа превышает скорость звука).

Как известно, при движении несжимаемой жидкости по трубе переменного диаметра d , а следовательно, и переменной площади поперечного сечения ω средняя скорость в соответствии с уравнением сплошности увеличивается с уменьшением d (т. е. с уменьшением ω) и, наоборот, уменьшается с увеличением d .

При движении газа такое соотношение может и не сохраниться.

Пусть имеем случай установившегося движения невязкой газообразной жидкости.

Условие постоянства массового расхода вдоль трубопровода (уравнение неразрывности) имеет вид

$$Q_p = \rho \omega v = \text{const}$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$dQ_p = \omega v d\rho + \rho v d\omega + \rho \omega dv = 0$$

Разделив это дифференциальное уравнение на $\rho \omega v$, получим

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\omega}{\omega} + \frac{dv}{v} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv}{v} = \frac{dv}{v} \left(-\frac{d\rho}{\rho} \frac{v}{dv} - 1 \right)$$

Определим теперь, чему равно dv , пользуясь уравнением Бер-нулли. Для невязкой газообразной жидкости уравнение Бернулли имеет вид

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d \frac{v^2}{2} = 0$$

Пусть для конкретности и простоты труба горизонтальна: тогда $z = \text{const}$ и $dz = 0$. Уравнение Бернулли можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{\rho} + v dv = 0$$

Откуда

$$dv = -\frac{d\rho}{\rho}$$

Делая подстановку, найдем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left[-\frac{d\rho}{\rho} \frac{v}{\left(-\frac{dp}{\rho v}\right)} - 1 \right] = \frac{dv}{v} \left[\frac{v^2}{\frac{dp}{d\rho}} - 1 \right]$$

Как известно, скорость звука c (скорость распространения упругих деформаций) определяется формулой

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

следовательно, $\frac{dp}{d\rho} = c^2$. Имея это в виду, вместо запишем

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right)$$

Отношение скорости движения газа v к скорости звука c называется числом

Маха (или числом Маевского) и обозначается буквой M ; таким образом, $M = \frac{v}{c}$

ведя это обозначение, получим $\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dv}{v} (M^2 - 1)$

Из этого уравнения можно сделать следующие выводы:

если $v < c$, т.е. если скорость газа меньше скорости звука (такая скорость называется дозвуковой), то число Маха $M < 1$ и $(M^2 - 1) < 0$, т.е. выражение в скобках $(M^2 - 1)$ будет отрицательным, тогда при $d\omega > 0$ $dv < 0$. Другими словами, при увеличении площади сечения со скорость движения газа v уменьшается (как и для несжимаемой жидкости);

если $v > c$ и $M > 1$ и, следовательно, $(M^2 - 1) > 0$, т.е. при скоростях больше скорости звука (при сверхзвуковой скорости) будем иметь при $d\omega > 0$ $dv > 0$. Следовательно, при увеличении площади сечения (при расширении трубы) скорость движения газа будет возрастать. [2,3,6,7]

3.9 Указания к решению задач

Пример 3.11. Определить режим движения жидкости в лотке прямоугольной формы высотой 0,2 м и шириной 0,5 м при уровне воды 0,15 м и скорости $v = 1,2$ м/с (рис. 1).

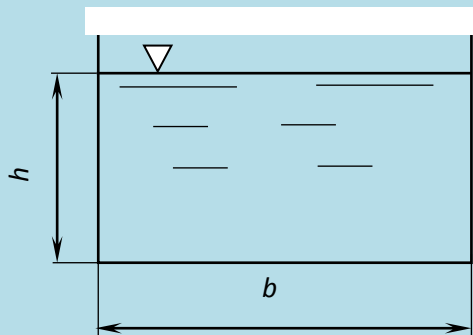


Рис. 1

Решение: Принимая $\nu = 0,01 \cdot 10^{-4}$ м²/с, по формуле (3.28) определяем:

$$Re = \frac{4Rv}{\nu} = \frac{4bhv}{(2h+b)\nu} = \frac{4 \cdot 0,15 \cdot 0,5 \cdot 1,2}{(2 \cdot 0,15 + 0,5) \cdot 0,01 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,45}{0,01 \cdot 10^{-4}} = 450000$$

Так как $Re > Re_{кр} = 580$, то режим движения потока будет турбулентным.

Пример 3.2. Определить режим движения и потери напора по длине трубопровода (рис. 3.22), если длина трубопровода 100 м, диаметр $d = 100$ мм, $Q = 10$ л/с, $v_{ж} = 0,726$ см²/с.

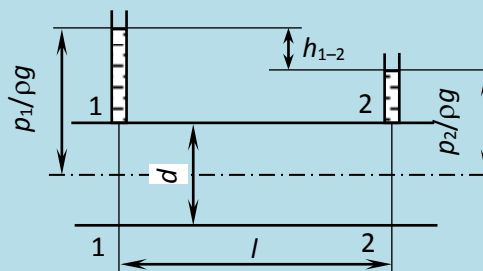


Рис. 2

Решение: Скорость потока в трубопроводе

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{10000}{0,785 \cdot 10^2} = 127 \text{ см/с.}$$

Число Рейнольдса

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{127 \cdot 10}{0,726} = 1750$$

Так как число Рейнольдса меньше 2320, то режим движения ламинарный:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}$$

Потери напора

$$h_v = \lambda \frac{\ell}{d} \frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{32\nu\ell v}{d^2 g} = \frac{32 \cdot 0,726 \cdot 1000 \cdot 127}{981 \cdot 10^2} = 300 \text{ см} = 3 \text{ м}$$

Пример 3.3. Определить потери давления при внезапном расширении трубопроводов, применяемых в качестве нагревательных приборов системы отопления. Стояк, подводящий нагретую воду, и соединительные трубы выполнены диаметром $d = 0,025$ м и приварены к торцу труб $d_1 = 100$ мм. Скорость воды в подводящих трубах

$v = 0,3$ м/с, а температура воды $t = 80^\circ\text{C}$.

Решение: Кинематическая вязкость и плотность воды в подводящей сети (при $t = 80^\circ\text{C}$) равны соответственно:

$$\nu = 0,36 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \quad \rho = 972 \text{ кг/м}^3.$$

Находим число Рейнольдса в трубопроводах подводящей сети по формуле

$$\text{Re} = \frac{vd}{\nu} = \frac{0,3 \cdot 0,025}{0,36 \cdot 10^{-6}} = 20820, \text{ т.е. } \text{Re} > 2320$$

Пример 3.4. Из открытого резервуара, в котором поддерживается постоянный уровень, по стальному трубопроводу (эквивалентная шероховатость $k_s = 0,1$ мм), состоящему из труб различного диаметра d и различной длины L , вытекает в атмосферу вода, расход которой Q и температура t $^\circ\text{C}$ (рис. 3–7).

Таблица 3.1

Исходные данные к задаче 3.4

Вариан- ты	$d_1 = d_3$, мм	d_2 , мм	L_1 , м	L_1 , м	L_1 , м	Q , м ³ /с	t , °C
1	100	50	8,0	6,5	7,0	10	70
2	150	100	7,0	5,5	7,0	15	60
3	200	120	6,7	4,3	6,7	20	50
4	250	130	5,9	4,7	5,9	25	40
5	300	150	4,8	3,6	4,8	30	10
6	100	160	3,3	2,8	3,3	40	20
7	150	170	2,5	1,6	2,5	50	30
8	200	180	1,8	0,5	1,8	60	40
9	250	190	1,5	1,0	1,5	70	20
10	300	200	2,5	2,0	2,5	80	10

Требуется:

1. Определить скорости движения воды и потери напора (по длине и местные) на каждом участке трубопровода.
2. Установить величину напора H в резервуаре.
3. Построить напорную и пьезометрическую линии, с соблюдением масштаба.

Указания к решению задачи

Эта задача решается на основе применения уравнения Д. Бернулли. Для плавно изменяющегося потока вязкой жидкости, движущейся от сечения 1 к сечению 2, уравнение Д. Бернулли имеет вид:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2 \cdot g} + h_{1-2}$$

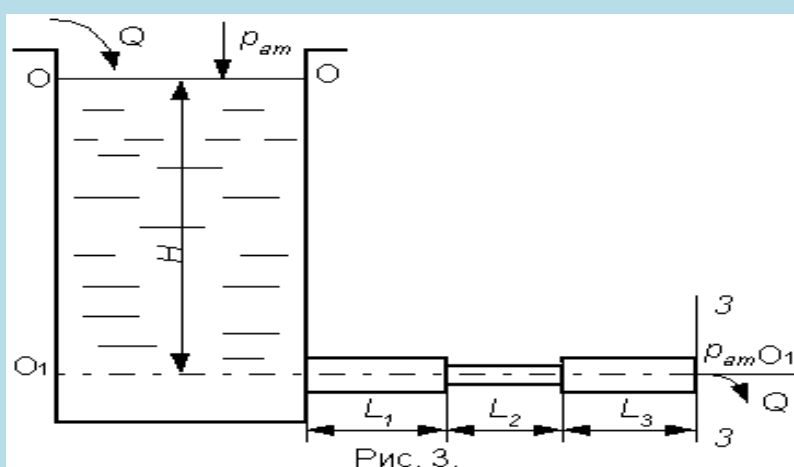


Рис. 3.

где z_1, z_2 – расстояние от центров тяжести сечений 1 и 2 до произвольно выбранной горизонтальной плоскости сравнения; p_1, p_2 – давление в центрах тяжести живых сечений 1 и 2; v_1, v_2 – средняя скорость движения жидкости в живых сечениях 1 и 2; α_1, α_2 – коэффициент кинетической энергии (коэффициент Кориолиса) – поправочный коэффициент, представляющий собой безразмерную величину, равную отношению истинной кинетической энергии потока в рассматриваемом сечении к кинетической энергии, подсчитанной по средней скорости. Для ламинарного режима движения $\alpha = 2$, а для турбулентного α можно принять равным 1; h_{1-2} – потери напора на преодоление сил сопротивления при движении потока от сечения 1 до сечения 2; $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$; $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Решение задачи выполняется в следующем порядке:

1. Составляется уравнение Д. Бернулли в общем, виде для сечений 0-0 (на свободной поверхности жидкости в резервуаре) и сечения 3-3 (на выходе потока из трубы). При написании уравнения Д. Бернулли следует помнить, что индексы у всех членов уравнения должны соответствовать номерам рассматриваемых сечений. Например, величины, относящиеся к сечению 0-0, следует обозначать z_0, p_0, α_0, v_0 , а к сечению 3-3 – z_3, p_3, α_3, v_3 .

2. Намечается горизонтальная плоскость сравнения. При горизонтальном трубопроводе плоскость сравнения проводится по оси трубопровода. После этого устанавливается, чему равно каждое слагаемое, входящее в уравнение Д. Бернулли, применительно к условиям решаемой задачи. Например, $z_0 = H$ (искомая величина напора в резервуаре); $p_0 = p_{ат}$ (атмосферное давление); $v_0 = 0$ (скорость движения воды в сечении 0-0) и так далее.

3. После подстановки всех найденных величин в уравнение Д. Бернулли и его преобразования записывается расчетное уравнение в буквенном выражении для определения искомой величины H .

4. Определяются скорости движения воды на каждом участке.

5. По скоростям движения воды вычисляются числа Рейнольдса, и устанавливается режим движения на каждом участке. Значение кинематического коэффициента вязкости ν определяют в зависимости от температуры.

6. Определяются потери напора по длине каждого участка (h_{L1} , h_{L2} , h_{L3}) и в

7. Потери напора по длине следует определять по формуле Дарси:

$$h_L = \lambda \cdot \frac{L}{d} \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

где коэффициент гидравлического трения (коэффициент Дарси); L , d – соответственно длина и диаметр расчетного участка трубопровода; v – средняя скорость движения воды на рассматриваемом участке.

каждом местном сопротивлении (вход воды из резервуара $h_{вх}$, внезапное расширение $h_{вр}$ и внезапное сужение $h_{вс}$).

8. Коэффициент может быть определен по формуле А. Д. Альтшуля:

$$\lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{k_z}{d} + \frac{68}{Re} \right)^{0,25},$$

где k_z – эквивалентная шероховатость стенки трубы;

9. Потери напора в местных сопротивлениях вычисляют по формуле Вейсбаха:

$$K = \frac{M_{уд}}{M_{опр}},$$

где v – средняя скорость за данным местным сопротивлением; K – безразмерный коэффициент местного сопротивления определяется по справочнику.

При вычислении потери напора на вход в трубу коэффициент местного сопротивления $K_{вх}$ равен 0,5. Значение коэффициента местного сопротивления при внезапном сужении трубопровода $K_{вс}$ берется в зависимости от степени

сужения n (отношения площади трубы в узком сечении к площади трубы в широком сечении) по прил. 2.

Потерю напора при внезапном расширении трубопровода можно определить по формуле Борда:

$$v_{\phi} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot d_{cm}^2},$$

где v_1 и v_2 – средние скорости течения до и после расширения.

10. После определения потерь напора по длине и в местных сопротивлениях вычисляется искомая величина – напор H в резервуаре.

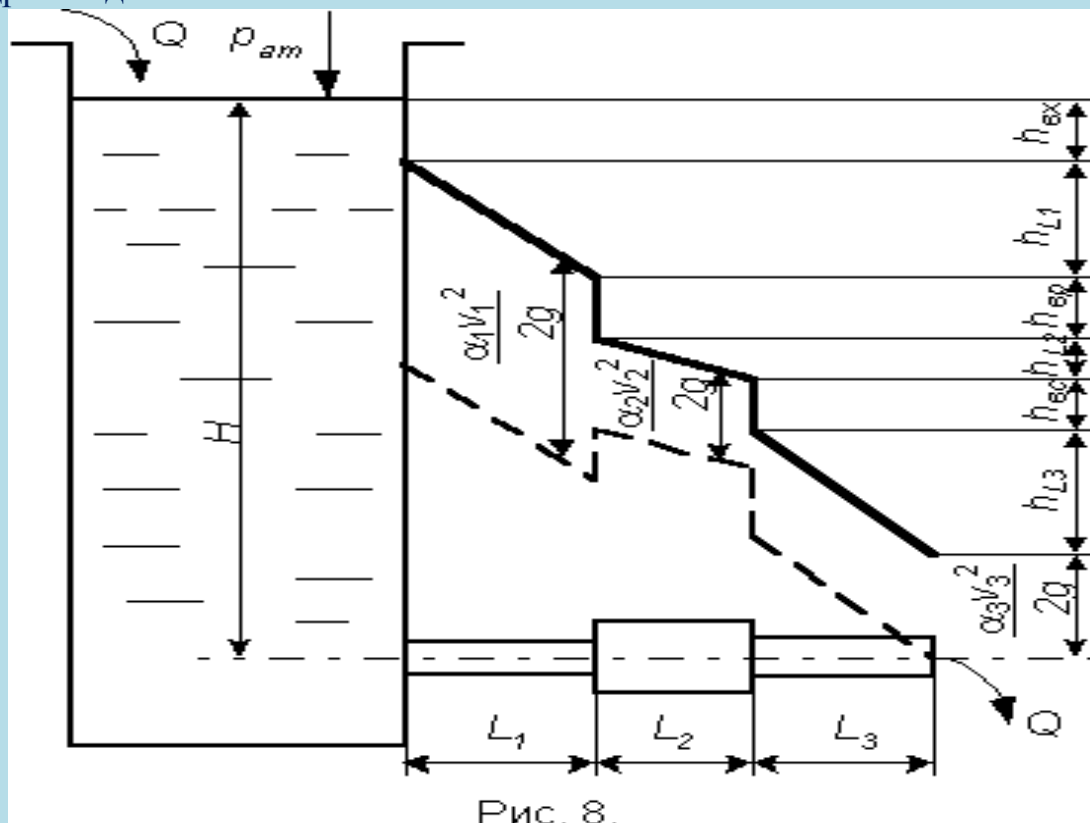
$$H = \frac{\alpha_3 \cdot v_3^2}{2 \cdot g} + \sum h_L + \sum h_M$$

11. Строится напорная линия. Напорная линия показывает, как изменяется полный напор: (полная удельная энергия) по длине потока. Значения H откладываются вертикально вверх от осевой линии трубопровода.

При построении напорной линии нужно вертикалями выделить расчетные участки. Таких участков в данной задаче будет три. Далее в произвольно выбранном вертикальном масштабе откладывается от осевой линии величина найденного уровня жидкости в резервуаре H . Проводя по этому уровню горизонтальную линию, получаем линию исходного (первоначального) напора. От уровня жидкости в резервуаре по вертикали, отвечающей сечению при входе жидкости в трубопровод, откладывается в масштабе вниз отрезок, равный потере напора при входе жидкости в трубу (потеря напора в местном сопротивлении $h_{вх}$). На участке L_1 имеет место потеря напора по длине трубопровода h_{L1} . Для получения точки, принадлежащей напорной линии в конце участка L_1 , нужно от линии полного напора после входа жидкости в трубу отложить по вертикали в конце участка L_1 вниз в масштабе отрезок, соответствующий потере напора на этом участке h_{L1} . Затем от точки полного напора в конце участка L_1 откладывается в масштабе отрезок, соответствующий потере напора в местном сопротивлении (внезапное расширение $h_{вр}$), и так до конца трубопровода. Соединяя точки полного напора в каждом сечении, получим напорную линию.

Пьезометрическая линия показывает, как изменяется пьезометрический напор (удельная потенциальная энергия), по длине потока. Удельная потенциальная энергия меньше полной удельной энергии на величину удельной кинетической энергии $\square v^2 / (2g)$. Поэтому, чтобы построить пьезометрическую линию, нужно вычислить на каждом участке величину $\square v^2 / (2g)$ в начале и в конце каждого участка и соединяя полученные точки, строим пьезометрическую линию.

Графики напорной и пьезометрической линий будут построены правильно в том случае, если при их построении были выдержаны принятые вертикальный и горизонтальный масштабы, а также верно вычислены все потери напора и все скоростные напоры $\square v^2 / (2g)$.



Для того чтобы проверить правильность построения напорной и пьезометрической линий, необходимо помнить следующее:

Напорная линия вниз по течению всегда убывает. Нигде и никогда напорная линия не может вниз по течению возрастать.

Поскольку потеря энергии потока на трение зависит от скорости движения жидкости, интенсивность потери напора (потеря напора на единицу длины или гидравлический уклон) будет больше на том участке, где скорость больше. Следовательно, на участках с меньшими диаметрами и большими скоростями наклон напорной и пьезометрической линии будет больше.

В отличие от напорной пьезометрическая линия может вниз по течению как убывать, так и возрастать (при переходе с меньшего сечения на большее).

В пределах каждого участка пьезометрическая линия должна быть параллельна напорной, поскольку в пределах каждого участка постоянна величина $\frac{v^2}{2g}$.

На тех участках, где скорость больше, расстояние между напорной и пьезометрической линиями больше.

Как бы ни изменялась пьезометрическая линия по длине потока при выходе его в атмосферу (свободное истечение), она неизбежно должна приходить в центр тяжести выходного сечения. Это происходит потому, что пьезометрическая линия показывает изменение избыточного давления по длине трубопровода, которое в выходном сечении равно нулю, поскольку в выходном сечении абсолютное давление равно атмосферному. После построения напорной и пьезометрической линий на графике показывают все потери напора и все скоростные

напоры с указанием их численных значений. Примерный вид графика приведен на рис. 8.

Пример 3.5. Вода из реки по самотечному трубопроводу длиной L и диаметром d подается в водоприемный колодец, из которого насосом с расходом Q она перекачивается в водонапорную башню. Диаметр всасывающей линии насоса – $d_{\text{вс}}$, длина – $L_{\text{вс}}$. Ось насоса расположена выше уровня воды в реке на величину H (рис. 9).

Таблица 3.2

Исходные данные к задаче 3.5

Варианты	d , мм	$d_{\text{вс}}$, мм	L , м	$L_{\text{вс}}$, м	H , м	Q , м ³ /с
1	100	50	8,0	6,5	7,0	10
2	150	100	7,0	5,5	7,0	15
3	200	120	6,7	4,3	6,7	20
4	250	130	5,9	4,7	5,9	25
5	300	150	4,8	3,6	4,8	30
6	100	160	3,3	2,8	3,3	40
7	150	170	2,5	1,6	2,5	50
8	200	180	1,8	0,5	1,8	60
9	250	190	1,5	1,0	1,5	70
10	300	200	2,5	2,0	2,5	80

Требуется определить:

1. Давление при входе в насос (показание вакуумметра в сечении 2-2), выраженное в метрах водяного столба.
2. Как изменится величина вакуума в этом сечении, если воду в колодец подавать по двум трубам одинакового диаметра d ?

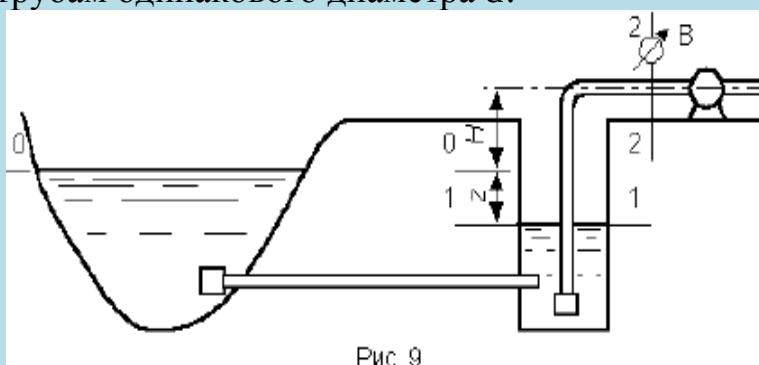


Рис. 9.

Указания к решению задачи 5

Для определения искомой величины вакуума при входе в насос (сечение 2–2) – необходимо знать высоту расположения оси насоса над уровнем воды в водоприемном колодце. Эта высота складывается из суммы высот $H + z$. Поскольку

величина H задана, необходимо определить перепад уровней воды в реке и водоприемном колодце z .

Величина z при заданных длине и диаметре самотечной линии зависит от расхода Q и определяется из уравнения Бернулли, составленного для сечений О–О и 1–1 (рис. 9):

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_0 \cdot v_0^2}{2 \cdot g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2 \cdot g} + h_{0-1}$$

Принимая за горизонтальную плоскость сравнения сечение 1–1 и считая $v_0 = 0$ и $v_1 = 0$, а также учитывая, что давления в сечениях О–О и 1–1 равны атмосферному ($p_0 = p_{ат}$ и $p_1 = p_{ат}$), имеем расчетный вид уравнения: $z = h_{0-1}$, то есть – перепад уровней воды в бассейне и водоприемном колодце равен сумме потерь напора при движении воды по самотечной линии. Она состоит из потерь напора по длине и в местных сопротивлениях $h_{0-1} = h_L + h_M$

К местным сопротивлениям относятся вход в трубопровод и выход из него. При определении потерь напора в этих сопротивлениях коэффициент местного сопротивления входа следует принять $\zeta_{вх} = 3$, а выхода $\zeta_{вых} = 1$

Потерю напора по длине следует найти по формуле Дарси, значение коэффициента гидравлического трения определить по формуле А. Д. Альтшуля (см. указания к решению задачи 4), приняв эквивалентную шероховатость стенок труб $k_s = 1$ мм и кинематический коэффициент вязкости $\nu = 0,01 \times 10^{-4}$ м²/с.

Искомая величина вакуума при входе в насос определяется из уравнения Бернулли, составленного для сечений 1–1 и 2–2, при этом за горизонтальную плоскость сравнения следует взять сечение 1–1.

При определении потерь напора во всасывающей линии насоса коэффициент местного сопротивления приемного клапана с сеткой взять по прил. 3, а колена принять $\zeta_{кол} = 0,2$; коэффициент гидравлического трения ζ , вычислить по формуле А. Д. Альтшуля.

При движении воды по двум самотечным трубам одинакового диаметра новое значение вакуума в сечении 2–2 определяется из расчета прохождения по одной трубе расхода $Q_1 = Q / 2$. Исходя из этого расхода, следует найти новое, значение перепада уровней z , а после этого в том же порядке вычислить соответствующую этому значению z величину вакуума в сечении 2–2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кордон М.Я., Гидравлика М.Я. Кордон, В.И. Симакин, И.Д. Горешник: Учебное пособие. – Пенза, 2005. – 320 с.
2. Лапшев Н.Н. Гидравлика. / Н.Н. Лапшев М.: Издательский центр Академия, 2008. – 71 с.
3. Ухин Б.В., Мельников Ю.Ф. Инженерная гидравлика. М., 2007, - 344 с.
4. Штеренлихт Д. В. Гидравлика. – М: Колос, 2004-656 с.
5. Валуева, Е.П. Введение в механику жидкости : учебное пособие / Е.П. Валуева, В.Г. Свиридов. – М. : Изд-во МЭИ, 2001. – 212 с. : ил.
6. Гидрогазодинамика : учебное пособие / Н.П. Жуков. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 92 с. – 100 экз. ISBN 978-5-8265-1032-2.
7. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – 6-е изд. – М. : Наука, 1987.
8. Юст Н.А., Молчанова Т.Е. Методические указания к практическим занятиям и лабораторным работам по гидравлике, часть 1 Благовещенск, ДальГАУ, 2013. – 40 с.