МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

**Методические указания для практических занятий
по дисциплине «Математика»**

Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171

Комплексные числа: методические указания к практическим занятиям по математике. – Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 32 с.

Составители: Фролова Г.Н., доцент; Митрохина О.П., доцент;
Кидяева Н.П., старший преподаватель

Методические указания составлены в соответствии с государственными общеобразовательными стандартами высшего профессионального образования (ГОС ВПО) по направлениям подготовки, реализуемым в ДальГАУ.

Методические указания «Комплексные числа» предназначены для студентов I курса всех направлений подготовки и формам обучения, реализуемым в ДальГАУ.

В данных методических указаниях кратно излагаются основные теоретические положения темы «Комплексные числа», предлагаются решения задач по темам и упражнения для самостоятельной работы студентов, дается индивидуальное домашнее задание. Методические указания помогут студенту самостоятельно изучить раздел «Комплексные числа».

Методические указания могут быть использовано для проведения практических занятий, для подготовки к зачетам и экзаменам, как в классической форме, так и в форме тестирования по данному разделу.

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд. физ.-мат. наук, доцент, завкафедрой физики и информатики

Рекомендовано к изданию методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета, (Протокол № 1 от 25 сентября 2013 года).

Издательство ДальГАУ

2014

ВВЕДЕНИЕ

С комплексными числами впервые встретились при решении квадратных уравнений индийские ученые, имевшие понятие о квадратном корне и об отрицательном числе. Однако они считали, что квадратные корни из отрицательных чисел не существуют, ибо отрицательные числа не могут быть квадратами действительных (вещественных) чисел, с которыми они привыкли производить разнообразные операции. Поэтому квадратные уравнения с невещественными корнями математики Индии считали вообще не имеющими решения, их просто не брали во внимание.

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в. Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа. Поэтому квадратные корни из отрицательных чисел стали употреблять в математике и назвали их мнимыми числами – тем самым они как бы приобрели право на нелегальное существование.

Термин «комплексное число» впервые использовал французский математик Л. Карно (1753—1823гг.) в 1803 году, но широкое употребление ему придал К.Ф. Гаусс (1777—1855гг.) в 1831 году. Слово «комплекс» (от латинского «complexus») означает связь, сочетание, совокупность понятий, предметов, явлений, образующих единое целое.

§1. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Поиск решения уравнения $x^2+1=0$, не имеющего действительных корней, вызвал необходимость расширить множество действительных чисел до такого числового множества, в котором это уравнение было бы разрешимо. Это новое числовое множество является множеством комплексных чисел.

Определение 1.1. Числа вида $z=a+bi$, где a и b - действительные числа, число i - мнимая единица, определяемая равенством $i^2=-1$, называются комплексными числами, где

a - действительная часть комплексного числа;

bi - мнимая часть комплексного числа;

b - коэффициент при мнимой единице.

Определение 1.2. Запись комплексного числа в виде $z=a+bi$ (1.1) называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Если $b=0$, то комплексное число принимает вид $z=a+0i=a$ и является действительным числом. В силу того, что a - любое действительное число, справедливо высказывание: множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Если $a=0$, то комплексное число принимает вид $z=0+bi=bi$ и является чисто мнимым числом.

Определение 1.3. Комплексное число вида $-z=-a-bi$ называется противоположным для комплексного числа $z=a+bi$.

Определение 1.4. Комплексное число $0+0i$ называется комплексным нулем.

Определение 1.5. Комплексное число $a-bi$ называется комплексно-сопряжённым с числом $a+bi$ и обозначается $\bar{z}$, то есть $\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi$.

Определение 1.6. Комплексные числа вида $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ называются комплексно-сопряжёнными, т.е. $\overline{a-bi}=a+bi$.

Таким образом, комплексно-сопряжённые числа отличаются только знаком мнимой части.

Числа 1 и i в алгебраической форме записываются

$$1 = 1 + 0i\,; \qquad\qquad i = 0 + 1 \cdot i$$

Определение 1.7. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Пример 1. Найти x и y, если $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$.

Решение. Выделим в обеих частях равенства действительные и мнимые части: $-2 + (5x - 3y)i = (2x - 4y) + 9i$. Используя условия равенства комплексных чисел, составим систему $\begin{cases} 2x - 4y = -2, \\ 5x - 3y = 9. \end{cases}$

Решая записанную систему уравнений любым из известных способов, получим: $x = 3$; $y = 2$.

Так как во множестве комплексных чисел можно извлечь корень чётной степени из отрицательного действительного числа, все уравнения $n - й$ степени становятся разрешимыми.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 6x + 10 = 0$.

Решение. Используя формулу корней $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, имеем

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 10} = 3 \pm \sqrt{-1} = 3 \pm i$$

$$x_1 = 3 + i\,; \qquad x_2 = 3 - i\,.$$

Полезно уметь находить степени мнимой единицы

$$\begin{array}{ll} i^1 = i\,; & i^5 = i^4 \cdot i = i\,; \\ i^2 = -1\,; & i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1\,; \\ i^3 = i^2 \cdot i = -i\,; & i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i\,; \\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1\,; & i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1. \end{array} \tag{1.2}$$

Замечаем, что, начиная с показателя, равного 5, значение степеней мнимой единицы повторяется.

Правило. Чтобы вычислить данную степень мнимой единицы, надо показатель степени разделить на 4 и полученный при делении остаток записать как новый показатель; если необходимо, упростить.

Пример 3. Вычислить: *а)* i^{139}; *б)* i^{2254}.

Решение. *а)* $i^{139}=i^{4\cdot 34+3}=i^3=-i$; *б)* $i^{2254}=i^{4\cdot 563+2}=i^2=-1$.

Упражнения

1. Даны числа: *а)* $z=3+i$; *б)* $z=3-i$; *в)* $z=-3+i$; *г)* $z=-3-i$;

д) $z=3$; *е)* $z=-3$; *ж)* $z=-i$; *з)* $z=i$.

Назовите числа, сопряжённые и противоположные данным.

2. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел

а) $9+2ix+4iy=10i+5x-6y$;

б) $2ix+3iy+17=18i+3x+2y$;

в) $5x-2y+(x+y)i=4+5i$;

г) $x^2-5(x-1)+4i=yi-1$;

д) $\dfrac{1}{x}-4yi=4$.

3. Найдите действительные значения x при которых справедливо равенство $(x^2+1)i+3=x(x-2i)-2x$.

4. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого служат числа: *а)* i и $-i$; *б)* $3+i$ и $3-i$; *в)* $1-i\sqrt{5}$ и $1+i\sqrt{5}$.

5. Решите уравнения: *а)* $x^4-4x^2+16=0$; *б)* $x^4-2x^2+4=0$.

6. Вычислите: *а)* $i^6+i^{20}+i^{30}+i^{36}+i^{54}$; *б)* $i+i^2+i^3+i^4+i^5$;

в) $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$; *г)* $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$.

§2. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно выполнять те же действия, что и над действительными числами, а именно, сложение, вычитание, умножение, деление. В отдельных случаях можно возводить в степень и извлекать корни, но эти операции удобно выполнять, если комплексные числа записаны в тригонометрической или показательной формах.

Пусть даны комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Правило 1. Чтобы сложить (вычесть) два комплексных числа z_1 и z_2, надо сложить (вычесть) их действительные и мнимые части, то есть

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i. \tag{2.1}$$

Умножение комплексных чисел выполняется по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 \pm b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i \tag{2.2}$$

Пример 1. Выполнить действия: $(5-2i)\cdot(1+3i)-(1+4i)$.

Решение

$$(5-2i)\cdot(1+3i)-(1+4i) = ((5\cdot 1-(-2)\cdot 3)+(5\cdot 3+1\cdot(-2))i)-(1+4i) = (11+13i)-(1+4i) =$$
$$= (11-1)+(13-4)i = 10+9i.$$

Полезно знать, что сложение, вычитание, умножение комплексных чисел можно выполнять как сложение, вычитание, умножение обычных двучленов.

Решим рассмотренный пример еще раз с учетом сделанного замечания: $(5-2i)\cdot(1+3i)-(1+4i) = \left|\begin{matrix}\textit{раскроем скобки и приведём}\\ \textit{подобные, учитывая, что } i^2=1\end{matrix}\right| = 5+15i-2i-6i^2-1-4i =$

$$= 5+15i-2i+6-1-4i = 10+9i.$$

Рассмотрим некоторые свойства комплексно-сопряженных чисел

1. $z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a$, то есть сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.

2. $z-\bar{z}=(a+bi)-(a-bi)=2bi$, то есть разность комплексно-сопряженных чисел является чисто мнимым числом.
3. $z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2$, то есть произведение комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.

Из последнего равенства следует, что во множестве комплексных чисел сумма квадратов двух чисел разлагается на линейные множители.

Правило 2. Чтобы разделить на комплексное число, надо делимое и делитель умножить на число комплексно-сопряженное делителю, то есть

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i, \text{ то есть}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \tag{2.3}$$

Пример 2. Выполнить деление $\frac{2-3i}{4+5i}$.

Решение

$$\frac{2-3i}{4+5i}=\frac{(2-3i)\cdot(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{8-10i-12i+15i^2}{4^2+5^2}=\frac{8-22i-15}{41}=\frac{-7-22i}{41}=-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i.$$

Пример 3. Выполнить действия $\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}$.

Решение

$$\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}=\frac{(5+2i)\cdot(2+5i)}{(2-5i)\cdot(2+5i)}-\frac{(3-4i)\cdot(4-3i)}{(4+3i)\cdot(4-3i)}=\frac{10+25i+4i-10}{2^2+5^2}-\frac{12-9i-16i-12}{4^2+3^2}=$$

$$=\frac{29i}{29}-\frac{-25i}{25}=i+i=2i.$$

Упражнения

7. Выполнить действия: $а)\ \frac{3-2i}{1+3i}$; $б)\ \frac{(1-2i)\cdot(2+i)}{3-2i}$; $в)\ \frac{2+3i}{(4+i)\cdot(2-2i)}$;

г) $\dfrac{(3+2i)\cdot(2-i)}{(2+3i)(1+i)}$; *д*) $\dfrac{1-3i}{i-2}+\dfrac{4i+1}{3i-1}$; *е*) $\dfrac{-3+i}{1+3i}+\dfrac{7-2i}{2+7i}$.

8. Разложить на комплексные множители:

а) m^2+n^2; *б*) $4m^2+9n^2$;

в) $\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{16}$; *г*) $m+n$; *д*) $2+\sqrt{3}$;

е) $1+\sin^2\alpha$; *ж*) 3.

9. Вычислите: *а*) $(1-i)^{12}$; *б*) $(1+i)^{17}$; *в*) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

г) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^2$; *д*) $(1+i)^{-2}$; *е*) $(1-i)^{-3}$; *ж*) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)^{-8}$.

§3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

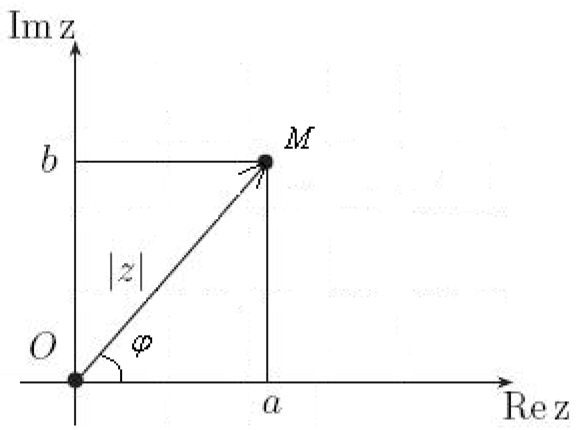


Рис. 1. Комплексное число на плоскости

Комплексное число $z=a+bi$ на плоскости изображается либо точкой M с координатами $(a;b)$ либо радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с теми же координатами $(a;b)$. Так как a - действительная часть комплексного числа, то точки изображающие комплексные числа вида $z=a+0i$ лежат на оси Ox, которая называется действительной осью и обозначается $\mathrm{Re}\,z$.

В силу того, что bi - мнимая часть комплексного числа, то точки изображающие комплексные числа вида $z=0+bi$, лежат на оси Oy называющейся мнимой и обозначающейся $\mathrm{Im}\,z$.

Так как каждой упорядоченной паре чисел $(a;b)$ соответствует единственное комплексное число и единственная точка плоскости, между множеством комплексных чисел и множеством точек плоскости существует взаимно-однозначное соответствие.

Определение 3.1. Плоскость, служащая для изображения комплексных чисел, называется комплексной плоскостью.

Изображая комплексные числа с помощью радиус-векторов, мы можем дать простую геометрическую интерпретацию понятиям, связанным с комплексным числом и операциям над комплексными числами.

Определение 3.2. Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$ и обозначается

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{3.1}$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число: $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0 + 0i$.

Из определения модуля комплексного числа следует, что для любых комплексных чисел z, z_1, z_2 справедливы соотношения

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, если $|z_2| \neq 0$.
3. $|z|^n = |z^n|$, для любого целого числа *n* при $n > 0$ $z \neq 0$.
4. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
5. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$.

Из геометрической интерпретации комплексного числа вытекают следующие свойства

1) длина вектора $\vec{z}$ равна $|z| = r$ (рис. 1);
2) точки (радиус-векторы), изображающие комплексно-сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси Ox;
3) точки (радиус-векторы), соответствующие, противоположным комплексным числам, симметричны относительно начала координат;

4) сложение, вычитание, комплексных чисел, умножение комплексного числа на действительное число иллюстрируются как соответствующие действия над векторами;

5) расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$.

Определение 3.3. Угол φ между действительной осью Ox и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z = a + bi$ (рис. 1) и обозначается

$$\arg z = \arg(a + bi) = \varphi. \tag{3.2}$$

Если отсчёт ведется против движения часовой стрелки, то величина угла считается положительной, а если по движению часовой стрелки, - отрицательной. Для комплексного числа $z = 0 + 0i$ аргумент не определен.

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0 + 0i$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π.

Определение 3.4. Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $(-\pi; \pi)$ называется главным значением аргумента.

Значения аргумента комплексного числа $z = a + bi \neq 0 + 0i$ находятся так

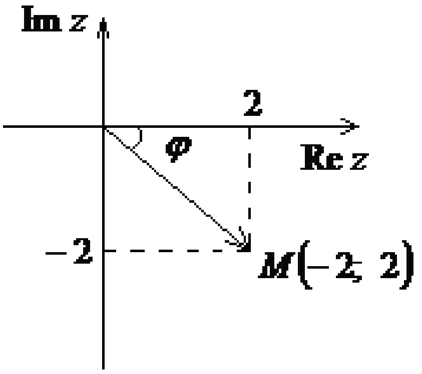
1) определить в какой четверти находится точка $z = a + bi$;

2) найти главное значения аргумента числа z по формуле

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a} & \textit{для внутренних точек}\ \mathrm{I},\ \mathrm{IV}\ \textit{четвертей}, \\ arctg\,\dfrac{b}{a} + \pi & \textit{для внутренних точек}\ \mathrm{II}\ \textit{четверти}, \\ arctg\,\dfrac{b}{a} - \pi & \textit{для внутренних точек}\ \mathrm{III}\ \textit{четверти}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Пример 1 . Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 2 - 2i$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = -2$, $M(2;-2) \in \mathrm{IV}$ четверти.



$$|z| = r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2};$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a} = -\frac{2}{2} = -1;$$

$$\varphi = arctg(-1) + \pi k = -arctg1 + \pi k = -\frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$\arg z = \arg(2 - 2i) = -\frac{\pi}{4}.$$

Рис. 2. Комплексное число $z = 2 - 2i$ на плоскости

Упражнения

10. Дана точка, изображающая число $-3 + 2i$. Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно: 1) действительной оси; 2) мнимой оси; 3)начала координат?

11.Найдите модуль и главное значение аргумента комплексных чисел:

1) $z = 3$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -3i$; 5) $z = -2 - 2i$; 6) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 7) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 8) $z = -\sqrt{3} + i$.

12.Аргумент комплексного числа $a + bi$ равен φ. Чему равен аргумент числа $a - bi$?

13.Найдите множество точек комплексной плоскости: 1) модуль которых равен 2; 2) аргумент которых равен $\frac{3}{4}\pi$.

14.Найдите все значения аргумента комплексных чисел:

1) $z = -1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$.

§4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Пусть комплексному числу $z = a + bi$ соответствует вектор $\overrightarrow{OM} = (a;b)$. $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\angle MOB = \varphi$ (рис.3). Спроектируем точку M на ось Ox.

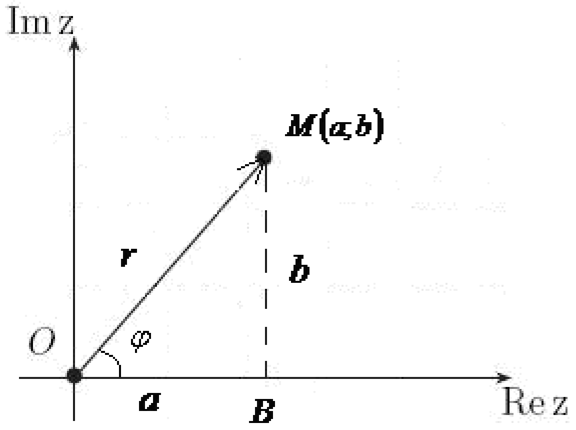


Рис. 3

Рассмотрим полученный прямоугольный треугольник ΔOMB.

По определению тригонометрических функций имеем

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}; \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r},$$

отсюда $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Подставим в алгебраическую форму комплексного числа вместо a и b их значения, получим

$$z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Определение 4.1. Представление комплексного числа в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где r – модуль, φ - одно из значений аргумента комплексного числа $z = a + bi$, называется тригонометрической формой записи комплексного числа.

Для представления комплексного числа в тригонометрической форме необходимо найти: 1)модуль этого числа; 2) одно из значений аргумента этого числа.

В силу многозначности $\arg z$ тригонометрическая форма комплексного числа также неоднозначна.

Пример 1. Записать число $z=-2+i2\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение. Здесь $a=-2$; $b=2\sqrt{3}$.

$r=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4$, $M\left(-2;\ 2\sqrt{3}\right)\in \text{II}$ четверти;

$tg\varphi=\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$.

Решаем уравнение

$\varphi=arctg\left(-\sqrt{3}\right)+\pi k=-arctg\sqrt{3}+\pi k=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k;\ k\in Z$.

Так как $\arg z=\arg\left(-2+2\sqrt{3}i\right)\in \text{II}$ четверти, находим

$\arg z=\arg\left(-2+2\sqrt{3}i\right)=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$.

$z=-2+i2\sqrt{3}i=4\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме можно выполнять следующие действия: умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Рассмотрим комплексные числа

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Произведение комплексных чисел находим по формуле

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

то есть $|z_1\cdot z_2|=r_1\cdot r_2=|z_1|\cdot|z_2|$, $\quad\arg(z_1\cdot z_2)=\varphi_1+\varphi_2=\arg z_1+\arg z_2$. (4.1)

Правило 1. При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Пример 2. Найти произведение чисел $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ и

$z_2=3\left(\cos\dfrac{\pi}{12}+i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Решение. $z_1\cdot z_2=2\cdot 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{12}\right)\right)=6\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Частное комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),$$

$$\text{то есть } \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2 . \qquad (4.2)$$

Правило 2. При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Пример 3. Выполнить деление чисел $z_1 = 10\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Для возведения комплексного числа z в $n-ю$ степень используется формула Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \ n \in Z ,$$

$$\text{то есть } |z^n| = r^n = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n\varphi = n\arg z . \qquad (4.3)$$

Правило 3. При возведении комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в целую степень, модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель.

Пример 4. Возвести в степень $n = 6$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\right) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Для извлечения корня $n-й$ степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, используется формула

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ - арифметический корень. $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. (4.4)

Пример 5. Извлечь корень $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Запишем число $z = 1$ в тригонометрической форме.

Имеем $|z| = r = 1$, $\arg z = \varphi = 0$. Следовательно, $z = 1 = 1 + 0i = \cos 0 + i\sin 0$.

$$z_k = \sqrt[3]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3},\ k = 0,\ 1,\ 2.$$

Если $k = 0$, то $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

Если $k = 1$, то $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Если $k = 2$, то $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической, надо вычислить значения тригонометрических функций.

Пример 6. Записать в алгебраической форме число $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Упражнения

15. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $3i$; *б*) $-1+i$; *в*) $1-i\sqrt{3}$;

г) $\sqrt{3}-i$; *д*) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; *е*) $-3+4i$.

16. Представить в алгебраической форме числа

а) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *б*) $z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; *в*) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $z = cos\,\pi + i\sin\pi$; *д*) $z = 3(\cos 0 + i\sin 0)$.

17. Выполнить умножение в тригонометрической форме

а) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}i\right)$; *б*) $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2-2i\sqrt{3}\right)$;

в) $(1+i)\cdot\left(3+3i\sqrt{3}\right)$; *г*) $\left(6+2i\sqrt{3}\right)\cdot(-3-3i)$;

д) $(5+5i)\cdot(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$;

е) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)\cdot(3+i\sqrt{3})$.

18. Возведите в степень

а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$;

б) $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^8$;

в) $(\cos 35^0 + i\sin 35^0)^{-12}$;

19. Извлеките корни

а) $\sqrt[3]{-1}$;

б) $\sqrt[4]{-1}$;

в) $\sqrt[3]{i}$;

г) $\sqrt[4]{4}$;

д) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$;

е) $\sqrt[6]{1}$.

§5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

В математике известна формула Эйлера, устанавливающая связь между тригонометрическими и показательной функции

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \qquad (5.1)$$

Заменив в ней y на φ получим $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Умножим обе части равенства на r: $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

В правой части равенства записано комплексное число в тригонометрической форме, значит выражение $re^{i\varphi}$ новая форма записи комплексного числа.

Определение 5.1. Представление комплексного числа виде $z = re^{i\varphi}$, где r – модуль комплексного числа, φ – аргумент комплексного числа называется показательной формой комплексного числа.

Чтобы записать комплексное число в показательной форме , надо знать его модуль и аргумент.

Пример 1. Записать комплексное число $z = 4i$ в показательной форме.

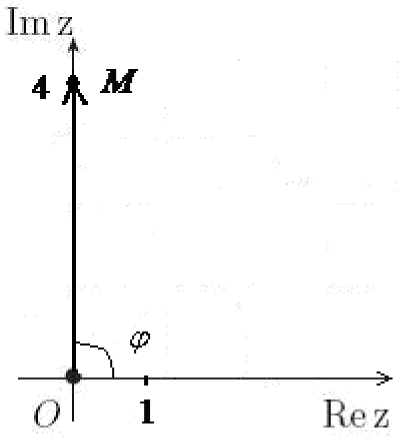


Рис. 4. Изображение числа $z=4i$ на плоскости

Решение. Построим изображение $z=4i$.

$r=|z|=\left|\overrightarrow{CM}\right|=4$.

$\arg z=\arg(4i)=\dfrac{\pi}{2}$.

$z=4i=4e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Пример 2. Найти $z=e^{2+i\pi}$.

Решение. $z=e^{2+i\pi}=e^2\cdot e^{i\pi}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=e^2(-1+i\cdot 0)=-e^2$.

Над комплексными числами, записанными в показательной форме выполняются те же действия, что и над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме по тем же правилам

Пусть даны комплексные числа: $z=re^{i\varphi}$; $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$; $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$.

Формулы, по которым выполняются действия имеют вид

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n=r^ne^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}\cdot i},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1. \tag{5.2}$$

Пример 3. Если $z_1=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$, $z_2=2e^{-\frac{\pi}{3}\cdot i}$, вычислить: 1) $z_1\cdot z_2$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$; 3) $z_1{}^6$; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Решение. 1) $z_1\cdot z_2=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\cdot 2e^{-\frac{\pi}{3}i}=2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{12}i}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi}{12}i}$;

3) $z_1^{\,6}=\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6=8e^{\frac{3\pi}{2}i}$;

4) $z_k=\sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}i}$, $\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Если $k=0$ $\qquad z_0=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi}{16}i}$;

Если $k=1$ $\qquad z_1=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{4}i}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi}{16}i}$;

Если $k=2$ $\qquad z_2=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{4}i}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi}{16}i}$;

Если $k=3$ $\qquad z_3=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\frac{\pi}{4}+6\pi}{4}i}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi}{16}i}$.

Упражнения

20. Представить в показательной форме числа

а) 1; $\qquad$ *б*) $\sqrt{3}+i$; $\qquad$ *в*) $3+i\sqrt{3}$; $\qquad$ *г*) $-\sqrt{2}+i\sqrt{6}$.

21. Представив числа $z_1=\sqrt{3}+i$ и $z_2=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в показательной форме, вычислить

а) $z_1\cdot z_2$; $\qquad$ *б*) $z_2:z_1$; $\qquad$ *в*) $z_2^{\,4}$; $\qquad$ *г*) $\sqrt[3]{z_1}$; $\qquad$ *д*) $\sqrt[4]{z_2}$.

22.Запишите в показательной форме число $\dfrac{3i-1}{2i+1}$.

23. Найдите: $\qquad$ *а*) $e^{i\pi}$; $\qquad$ *б*) $e^{\frac{\pi}{2}i}$; $\qquad$ *в*) $e^{\frac{\pi}{3}i}$.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Вариант 1.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 4 - 3i$; $Z_2 = -4 - 3i$;

$Z_3 = -3i$; $Z_4 = 4$.

2. Вычислить $i^5 \cdot i^7 \cdot i^{37}$.

3. Выполнить действия

$(4-3i)\cdot(2+i)-(5-3i)$;

$\dfrac{2+5i}{3-2i}-(1+i)\cdot 4i$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{1}{4}i$; $Z_2 = 2+2i$

Вариант 2.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 5 - 3i$; $Z_2 = -5 - 3i$;

$Z_3 = -3i$; $Z_4 = 5$.

2. Вычислить $i^{15} \cdot i^6 \cdot i^{27}$.

3. Выполнить действия

$(-1+5i)\cdot(4+3i)-(3-i)$;

$\dfrac{(-5-2i)\cdot(3-2i)}{2-i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = \sqrt{3}+i$; $Z_2 = -2+2\sqrt{3}i$

Вариант 3.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -3 - 2i$; $Z_2 = 3 + 2i$;

$Z_3 = -2i$; $Z_4 = 3$.

2. Вычислить $i^{16} \cdot i^{13} \cdot i^3$.

3. Выполнить действия

$(-3+2i)\cdot(3-i)-(4+2i)$;

$\dfrac{(3-2i)\cdot(4+3i)}{7-2i}$.

Вариант 4.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 4 - i$; $Z_2 = -4 - i$;

$Z_3 = -i$; $Z_4 = 4$.

2. Вычислить $i^{17} \cdot i^{12} \cdot i^{23}$.

3. Выполнить действия

$(4-i)\cdot(3+2i)-(8+5i)$;

$\dfrac{(-3+2i)\cdot(2-i)}{3+5i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; ${Z_1}^5$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 6 + 2\sqrt{3}i$; $Z_2 = -3 - 3i$

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; ${Z_1}^5$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 3i$; $Z_2 = 2 - 2i$.

Вариант 5.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -5 + 2i$; $Z_2 = 5 + 2i$;

$Z_3 = -2i$; $Z_4 = 5$.

2. Вычислить $i^6 \cdot i^{16} \cdot i^{21}$.

3. Выполнить действия

$(4-3i)\cdot(-3-i)-(5+4i)$;

$\frac{(2-3i)\cdot(4+5i)}{-2+i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; ${Z_1}^5$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 7 + 7i$; $Z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$

Вариант 6.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 2 - 4i$; $Z_2 = -2 - 4i$;

$Z_3 = -4i$; $Z_4 = 2$.

2. Вычислить $i^{17} \cdot i^{12} \cdot i^{20}$.

3. Выполнить действия

$(2-4i)\cdot(-3+5i)-3i$;

$\frac{(3+4i)\cdot(-2+i)}{3-2i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; ${Z_1}^5$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -3 - \sqrt{3}i$; $Z_2 = \sqrt{3} - i$

Вариант 7.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 1 + i$; $Z_2 = -1 + i$;

$Z_3 = i$; $Z_4 = 1$.

2. Вычислить $i^{31} \cdot i^8 \cdot i^9$.

3. Выполнить действия

$(-2+3i)\cdot(3-4i)-(5-i)$;

Вариант 8.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -2 + 3i$; $Z_2 = -2 + 3i$;

$Z_3 = 3i$; $Z_4 = -2$.

2. Вычислить $i^{13} \cdot i^6 \cdot i^{21}$.

3. Выполнить действия

$(-2+5i)\cdot(4-3i)-(2i+1)$;

$$\frac{(-1+i)\cdot(-2-3i)}{4+2i}.$$

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 3+3\sqrt{3}i$; $Z_2 = 1+i$

$$\frac{(3-2i)\cdot(-2+7i)}{-3-2i}.$$

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -1+\sqrt{3}i$; $Z_2 = 2+2i$

Вариант 9.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -3+6i$; $Z_2 = 3+6i$;

$Z_3 = -6i$; $Z_4 = 3$.

2. Вычислить $i^5 \cdot i^{17} \cdot i^{29}$.

3. Выполнить действия

$(-3+2i)\cdot(4-i)-(5-3i)$;

$$\frac{(2+5i)\cdot(-7+2i)}{-3+2i}.$$

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -2-2\sqrt{3}i$; $Z_2 = 3+3i$

Вариант 10.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -3+4i$; $Z_2 = 3+4i$;

$Z_3 = 4i$; $Z_4 = -3$.

2. Вычислить $i^{12} \cdot i^{11} \cdot i^7$.

3. Выполнить действия

$(-3+4i)\cdot(6+2i)+(3-4i)$;

$$\frac{(-1+5i)\cdot(6-3i)}{3-2i}.$$

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,2}$; $\sqrt[5]{Z_2}$

$Z_1 = -1-\sqrt{3}i$; $Z_2 = 3-3i$

Вариант 11.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 2-5i$; $Z_2 = -2-5i$;

$Z_3 = 5i$; $Z_4 = 2$.

2. Вычислить $i^3 \cdot i^{18} \cdot i^{13}$.

3. Выполнить действия

Вариант 12.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 5+3i$; $Z_2 = -5+3i$;

$Z_3 = 3i$; $Z_4 = -5$.

2. Вычислить $i^{13} \cdot i^7 \cdot i^3$.

3. Выполнить действия

$(2-8i)\cdot(-2-5i)-(3i+11)$;

$\frac{(-3+4i)\cdot(7+i)}{5+9i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\ 4}$; $\sqrt[3]{Z_2}$

$Z_1=-3-\sqrt{3}i$; $Z_2=-2+2i$.

$(2+3i)\cdot(-3+i)-(5-2i)$;

$\frac{(-4-i)\cdot(1-2i)}{3-2i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\ 7}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1=3+3\sqrt{3}i$; $Z_2=4-4i$.

Вариант 13.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=-3+5i$; $Z_2=3+5i$;

$Z_3=5i$; $Z_4=-3$.

2. Вычислить $i^9\cdot i^{12}\cdot i^{16}$.

3. Выполнить действия

$(-3+5i)\cdot(2-3i)+(4-5i)$;

$\frac{(-7+5i)\cdot(3-2i)}{2-i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\ 2}$; $\sqrt[5]{Z_2}$

$Z_1=\sqrt{3}-i$; $Z_2=3i-3$.

Вариант 14.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=2-3i$; $Z_2=-2-3i$;

$Z_3=3i$; $Z_4=2$.

2. Вычислить $i^{15}\cdot i^7\cdot i^{25}$.

3. Выполнить действия

$(3+3i)\cdot(2-3i)-(4+3i)$;

$\frac{(2-i)\cdot(4+2i)}{3+2i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\frac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\ 5}$; $\sqrt[3]{Z_2}$

$Z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $Z_2=2i$

Вариант 15.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=4+2i$; $Z_2=-4+2i$;

$Z_3=2i$; $Z_4=-4$.

2. Вычислить $i^{23}\cdot i^5\cdot i^{16}$.

Вариант 16.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=5-3i$; $Z_2=-5-3i$;

$Z_3=3i$; $Z_4=-5$.

2. Вычислить $i^3\cdot i^{19}\cdot i^9$.

3. Выполнить действия

$(4+2i)\cdot(2-i)+(3-5i)$;

$\dfrac{(3-i)\cdot(5+2i)}{4-3i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,3}$; $\sqrt[6]{Z_2}$

$Z_1=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}i$; $\quad Z_2=2\sqrt{3}i+2$.

3. Выполнить действия

$(5-3i)\cdot(2+i)-(3-2i)$;

$\dfrac{(4-2i)\cdot(-3+i)}{3-5i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[3]{Z_2}$

$Z_1=3-3i$; $\quad Z_2=-2i$.

Вариант 17.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=\sqrt{3}+i$; $\quad Z_2=-\sqrt{3}+i$;

$Z_3=i$; $\quad Z_4=\sqrt{3}$.

2. Вычислить $\quad i^{12}\cdot i^{9}\cdot i^{3}$.

3. Выполнить действия

$(4+i)\cdot(2-3i)-(4+2i)$;

$\dfrac{(-\sqrt{3}-i)\cdot(\sqrt{3}+4i)}{5-i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,3}$; $\sqrt[5]{Z_2}$

$Z_1=5+5i$; $\quad Z_2=3+\sqrt{3}i$.

Вариант 18.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=4+6i$; $\quad Z_2=-4+6i$;

$Z_3=6i$; $\quad Z_4=-4$.

2. Вычислить $\quad i^{9}\cdot i^{17}\cdot i^{11}$.

3. Выполнить действия

$(4+6i)\cdot(-5+3i)-(2-2i)$;

$\dfrac{(9+i)\cdot(-5+4i)}{-3+3i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,2}$; $\sqrt[5]{Z_2}$

$Z_1=3\sqrt{3}+3i$; $\quad Z_2=3-3i$.

Вариант 19.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=-6+2i$; $\quad Z_2=6-2i$;

$Z_3=2i$; $\quad Z_4=-6$.

Вариант 20.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1=-7+2i$; $\quad Z_2=7+2i$;

$Z_3=-2i$; $\quad Z_4=-7$.

2. Вычислить $i^{31} \cdot i^{5} \cdot i^{23}$.

3. Выполнить действия

$(-6+2i)\cdot(2+3i)-(4i-5)$;

$\dfrac{(-3-2i)\cdot(5+7i)}{2+8i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,3}$; $\sqrt[7]{Z_2}$

$Z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$; $Z_2 = 2-2i$.

2. Вычислить $i^{15} \cdot i^{7} \cdot i^{12}$.

3. Выполнить действия

$(7+2i)\cdot(-2+5i)-(3+4i)$;

$\dfrac{(5-3i)\cdot(7+2i)}{1+4i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 2-2i$; $Z_2 = 3+\sqrt{3}i$.

Вариант 21.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -5+6i$; $Z_2 = -5+6i$;

$Z_3 = 6i$; $Z_4 = -5$.

2. Вычислить $i^{9} \cdot i^{27} \cdot i^{31}$.

3. Выполнить действия

$(-5+6i)\cdot(3+7i)-(9+2i)$;

$\dfrac{(2+4i)\cdot(3-i)}{-1+4i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[3]{Z_2}$

$Z_1 = -\sqrt{3}-3i$; $Z_2 = 3+3i$.

Вариант 22.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 4-2i$; $Z_2 = 4+2i$;

$Z_3 = 2i$; $Z_4 = -4$.

2. Вычислить $i^{21} \cdot i^{5} \cdot i^{3}$.

3. Выполнить действия

$(4-2i)\cdot(2-3i)-(4i-5)$;

$\dfrac{(2-7i)\cdot(-5+i)}{3i-5}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,3}$; $\sqrt[7]{Z_2}$

$Z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$; $Z_2 = 2+2i$.

Вариант 23.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

Вариант 24.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = -3+9i$; $Z_2 = 3+9i$;

$Z_3 = -9i$; $Z_4 = 3$.

2. Вычислить $i^{17} \cdot i^8 \cdot i^{21}$.

3. Выполнить действия

$(-3+9i)\cdot(3-5i)-(3-11i)$;

$\dfrac{(-4-3i)\cdot(2+8i)}{3-9i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -3-\sqrt{3}i$; $Z_2 = 12-12i$.

$Z_1 = 3+7i$; $Z_2 = -3+7i$;

$Z_3 = 7i$; $Z_4 = -3$.

2. Вычислить $i^{13} \cdot i^7 \cdot i^{16}$.

3. Выполнить действия

$(3+7i)\cdot(-2+3i)-(8+4i)$;

$\dfrac{(-3+2i)\cdot(5-3i)}{1-4i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,7}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 3-\sqrt{3}i$; $Z_2 = -2+2i$.

Вариант 25.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 3-4i$; $Z_2 = -3+4i$;

$Z_3 = 4i$; $Z_4 = -3$.

2. Вычислить $i^9 \cdot i^{18} \cdot i^{15}$.

3. Выполнить действия

$(3-4i)\cdot(2-7i)-(1+3i)$;

$\dfrac{(-2+3i)\cdot(8-3i)}{-3+7i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,7}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = \sqrt{3}+3i$; $Z_2 = -3+3i$.

Вариант 26.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 9+2i$; $Z_2 = -9+2i$;

$Z_3 = 2i$; $Z_4 = -9$.

2. Вычислить $i^{23} \cdot i^7 \cdot i^5$.

3. Выполнить действия

$(9+2i)\cdot(-3+7i)-(3i-5)$;

$\dfrac{(4+7i)\cdot(-5-2i)}{-3i+9}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,3}$; $\sqrt[7]{Z_2}$

$Z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$; $Z_2 = -2-2i$.

Вариант 27.

1. Записать числа сопряжённые и

Вариант 28.

1. Записать числа сопряжённые и

противоположные данным

$Z_1 = -7 + i$; $Z_2 = 7 + i$;

$Z_3 = -i$; $Z_4 = 7$.

2. Вычислить $i^{19} \cdot i^{27} \cdot i^{15}$.

3. Выполнить действия

$(-7+i)\cdot(5-6i)-(4+12i)$;

$\dfrac{(4+7i)\cdot(-3+8i)}{4-7i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = -12 + 12i$; $Z_2 = 3 - \sqrt{3}i$.

Вариант 29.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = \sqrt{3} + i$; $Z_2 = -\sqrt{3} + i$;

$Z_3 = i$; $Z_4 = \sqrt{3}$.

2. Вычислить $i^{9} \cdot i^{17} \cdot i^{11}$.

3. Выполнить действия

$(-6+2i)\cdot(2+3i)-(4i-5)$;

$\dfrac{(-3-2i)\cdot(5+7i)}{2+8i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 2 - 2i$; $Z_2 = 3 + \sqrt{3}i$.

противоположные данным

$Z_1 = -5 + 6i$; $Z_2 = -5 + 6i$;

$Z_3 = 6i$; $Z_4 = -5$.

2. Вычислить $i^{21} \cdot i^{5} \cdot i^{3}$.

3. Выполнить действия

$(-3+9i)\cdot(3-5i)-(3-11i)$;

$\dfrac{(-4-3i)\cdot(2+8i)}{3-9i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,7}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 3 - \sqrt{3}i$; $Z_2 = -2 + 2i$.

Вариант 30.

1. Записать числа сопряжённые и противоположные данным

$Z_1 = 2 - 5i$; $Z_2 = -2 - 5i$;

$Z_3 = 5i$; $Z_4 = 2$.

2. Вычислить $i^{13} \cdot i^{7} \cdot i^{3}$.

3. Выполнить действия

$(-6+2i)\cdot(2+3i)-(4i-5)$;

$\dfrac{(-3-2i)\cdot(5+7i)}{2+8i}$.

4. Выполнить действия в тригонометрической форме

$\dfrac{Z_1}{Z_2}$; $Z_1^{\,5}$; $\sqrt[4]{Z_2}$

$Z_1 = 2 - 2i$; $Z_2 = 3 + \sqrt{3}i$.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. *а)* $\bar{z}=3-i$, $-z=-3-i$; *б)* $\bar{z}=3+i$, $-z=-3+i$;
в) $\bar{z}=-3-i$, $-z=3-i$; *г)* $\bar{z}=-3+i$, $-z=3+i$;
д) $\bar{z}=3$, $-z=-3$; *е)* $\bar{z}=-3$, $-z=3$;
ж) $\bar{z}=i$, $-z=i$; *з)* $\bar{z}=-i$, $-z=-i$.

2. *а)* $x=3$, $y=1$; *б)* $x=3$, $y=4$; *в)* $x=2$, $y=3$;
г) $x=2$, $y=4$ или $x=3$, $y=4$; *д)* $x=\frac{1}{4}$, $y=0$.

3. $x=-1$.

4. *а)* $x^2+1=0$; *б)* $x^2-6x+10=0$; *в)* $x^2-2x+6=0$.

5. *а)* $\left\{\sqrt{3}+i;\ \sqrt{3}-i;\ -\sqrt{3}+i;\ -\sqrt{3}-i\right\}$;
б) $\left\{\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i;\ -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$.

6. *а)* -1; *б)* i; *в)* i; *г)* -1.

7. *а)* $-0{,}3-1{,}1i$; *б)* $\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$; *в)* $\frac{1}{68}-\frac{21}{68}i$; *г)* $-\frac{3}{26}-\frac{41}{26}i$; *д)* $0{,}1+0{,}3i$; *е)* 0.

8. *а)* $(m+ni)\cdot(m-ni)$; *б)* $(2m+3ni)\cdot(2m-3ni)$; *в)* $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{4}i\right)\cdot\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{4}i\right)$;
г) $\left(\sqrt{m}+i\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{m}-i\sqrt{n}\right)$; *д)* $\left(\sqrt{2}+i\sqrt[4]{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-i\sqrt[4]{3}\right)$; *е)* $(1-i\sin\alpha)\cdot(1+i\sin\alpha)$;
ж) $\left(1-i\sqrt{2}\right)\cdot\left(1+i\sqrt{2}\right)$.

9. *а)* -64; *б)* $256(1+i)$; *в)* 1; *г)* $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; *д)* $-\frac{i}{2}$; *е)* $-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$; *ж)* 1.

10. *а)* $-3-2i$; *б)* $3+2i$; *в)* $3-2i$.

11. *а)* $r=3$, $\varphi=0$; *б)* $r=3$, $\varphi=\pi$; *в)* $r=3$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$; *г)* $r=3$, $\varphi=-\frac{\pi}{2}$;
д) $r=2\sqrt{2}$, $\varphi=-\frac{3\pi}{4}$; *е)* $r=2$, $\varphi=\frac{\pi}{3}$; *ж)* $r=2$, $\varphi=-\frac{\pi}{3}$; *з)* $r=2$, $\varphi=\frac{5\pi}{6}$.

12. $-\varphi$.

13. *а)* окружность $x^2+y^2=4$; *б)* луч $y=-x$, $x\le 0$.

14. *а)* $\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in z$; *б)* $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in z$.

15. *а)* $3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; *б)* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;
в) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; *г)* $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;
д) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; *е)* $5\left(\cos 126^0 52'+i\sin 126^0 52'\right)$.

16. *а)* $5i$; *б)* $2-2i\sqrt{3}$; *в)* $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; *г)* -1; *д)* 3.

17. *а)* $\frac{1}{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$; *б)* $8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

в) $6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$; *г)* $12\sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)$;

д) $5\sqrt{2}\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)$; *е)* $6\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}\right)$.

18. *а)* -1; *б)* -256; *в)* $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

19 *а)* $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, -1, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

б) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$;

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $-i$;

г) $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $i\sqrt{2}$, $-i\sqrt{2}$;

д) $\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$;

е) 1, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

20. *а)* e^{0i}; *б)* $2e^{i\frac{\pi}{6}}$; *в)* $2\sqrt{3}e^{16\pi i}$; *г)* $2\sqrt{2}e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

21. *а)* $4e^{\frac{5}{12}\pi i}$; *б)* $e^{\frac{\pi}{12}i}$; *в)* $16e^{\pi i}$;

г) $\sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{18}i}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{13}{18}\pi i}$, $\sqrt[3]{2}e^{-\frac{11}{18}\pi i}$;

д) $\sqrt[4]{2}e^{\frac{\pi}{16}i}$, $\sqrt[4]{2}e^{\frac{9}{16}\pi i}$, $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{15}{16}\pi i}$, $\sqrt[4]{2}e^{-\frac{7}{16}\pi i}$.

22. $\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$.

23. *а)* -1; *б)* i; *в)* $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бараненков, А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике [Текст]: учеб. пособие / А.И. Бараненков, Е.П. Богомолова, И.М. Петрушко.- СПб.: Лань, 2009.- 240 с.
2. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский – М.: АСТ: Астрель, 2006. - С. 509.
3. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 [Текст] : учеб. пособие / сост. П. Е. Данко [и др.]. – 7-е изд., испр. – М. : Оникс : Мир и образование, 2009. – 448 с.
4. Дадаян, А.А. Сборник задач по математике / А.А. Дадаян - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2006. – 352 с.
5. Лисичкин, В.Т. Математика в задачах с решениями [Текст]: учеб. пособие / В.Т. Лисичкин, И.Л. Соловейчик. – 4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2012. – 463, [1] с. – (Учебники для вузов. Специальная литература)
6. Натансон, И.П. Краткий курс высшей математики [Текст]: учеб. пособие; доп. науч.-метод. советом М-ва образ. РФ / И.П. Натансон.- 10-е изд., стер.-СПб.: Лань, 2009.- 731 с.
7. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Кратные интегралы, теория поля, теория функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст]: учеб. пособие; рек. Науч.-метод. советом М-ва образ. РФ / И.А. Соловьев [и др.]. – СПб.: Лань, 2009. - 448 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 27.03.2014 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 1,5. Усл.-п.л. – 2,0.
Тираж 150 экз. Заказ 80.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86