МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Н.П. Кидяева, З.И. Каньшина

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2015

УДК 519.2(075.8) ББК 22.171

Кидяева, Н.П. Определенный интеграл: учебно-методическое пособие / сост.: Н.П. Кидяева, З.И. Каньшина – Благовещенск: ДальГАУ, 2015. – 44 с.

Пособие написано в соответствии с требованиями Государственных стандартов высшего профессионального образования по направлениям бакалавриата.

Каждый параграф содержит краткое изложение теоретических вопросов, необходимых для решения последующих задач, а также достаточно большое количество решенных примеров и задач. В пособии подобраны задания для аудиторных занятий и самостоятельной (внеаудиторной) работы студентов. В пособии имеются задания для контрольной работы, которые можно использовать и для типового расчета.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения. Может быть использовано студентами для проведения самостоятельных работ.

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд.физ.-мат.наук, доцент

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета (Протокол №3 от 19 ноября 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие содержит материал, относящийся к разделу курса математического анализа – интегральному исчислению. В данной работе рассмотрены основные положения, связанные с изучением определенного, несобственного интегралов и приложений определенного интеграла.

Решение задач с использованием приложений определенного интеграла представляет собой один из сложных разделов математического анализа. Количество часов, отведенных на изучение данной темы, очень маленькое. Поэтому данное пособие спланировано таким образом, чтобы изложенные в ней аспекты представляли собой интересный и освобожденный от излишних трудностей для студентов материал.

Учебно-методическое пособие может быть использовано, как пособие для организации самостоятельной работы студентов как очной, так и заочной форм обучения.

§1 ЗАДАЧА, ПРИВОДЯЩАЯ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Определённый интеграл

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана неотрицательная функция $y=f(x)$.

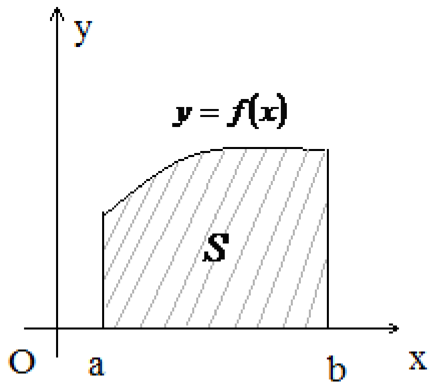

Рис. 1. Криволинейная трапеция

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=f(x)$, прямыми $x=a$ и $x=b$, и осью Ox. Такие фигуры называются *криволинейными трапециями* (рис.1).

Используем прием, которым пользовались математики древней Греции и который называют методом Эвдокса или методом исчерпывания.

Идея Эвдокса состоит в следующем:

а. разбить сложную фигуру на части;

б. получившиеся части заменить простыми фигурами, площади которых находить умеем, и сложить площади этих простых фигур;

в. полученное в результате сложения число есть некоторое приближение к желаемому, поэтому переходим к пределу при разбиении сложной фигуры на все более и более мелкие части.

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом:

1) отрезок $[a;b]$ произвольным образом разобьём на n равных частей $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$, из каждой точки деления восстановим перпендикуляры до пересечения с графиком функции (рис. 2);

2) обозначим длину каждого частичного отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$;

3) на каждом частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ выберем произвольно точку ξ_k, из каждой точки деления восстановим перпендикуляры до пересечения с графиком функции;

4) каждую криволинейную полоску заменим прямоугольником с основанием Δx_k и высотой равной $f(\xi_k)$ и найдём их площади $S_k = f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$;

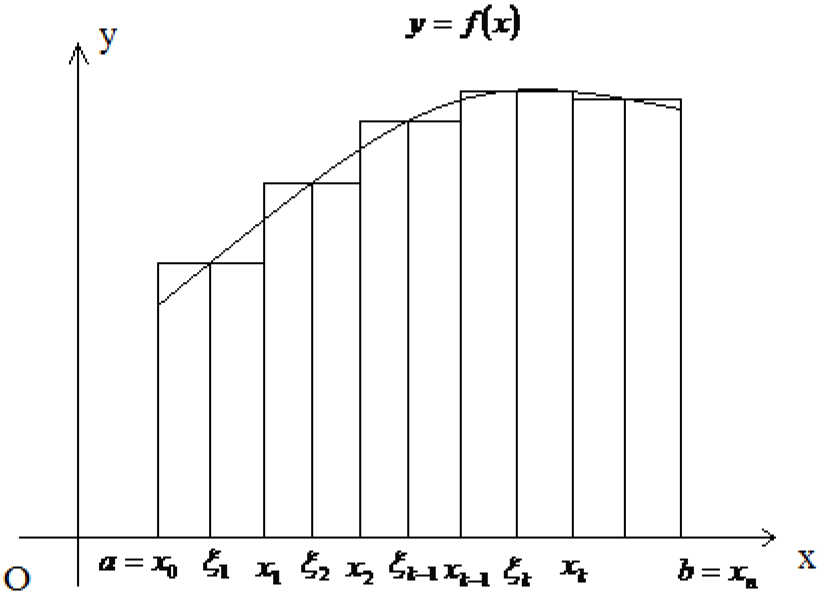

Рис. 2.

5) все прямоугольники образуют ступенчатую фигуру, её площадь

$S_{ст.ф.} = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ - интегральная сумма;

6) очевидно, что $S_{ст.ф.} \approx S_{кр.тр.}$, будем увеличивать число делений отрезка $[a;b]$, т.е $n\to\infty$, но так чтобы $\Delta x_k \to 0$ (обозначим $\max\{\Delta x_k\} = \lambda$);

7) за точное значение $S_{кр.тр.}$ принимаем $\lim S_{ст.ф.}$, таким образом

$$S_{кр.тр.} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,. \qquad (1)$$

<u>Определение</u>. Определённым интегралом называется конечный предел интегральных сумм, если он существует, при $\lambda\to 0$ и не зависит ни от способа деления отрезка на части, ни от выбора точки внутри каждой части, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\,, \qquad (2)$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция,

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение,

a - нижний предел интегрирования,

b - верхний предел интегрирования.

Геометрический смысл: определённый интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.

Вычисление определённого интеграла непосредственно по определению представляет собой трудную работу. Более лёгкий и удобный способ вычисления был предложен в 17 веке Ньютоном и Лейбницем. Этот способ основан на тесной связи, существующей между производной и интегралом.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ - какая-либо первообразная на $[a;b]$ для $f(x)$, то имеет место формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Формулу (3) называют формулой Ньютона-Лейбница.

§2 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.

$$\int (f_1(x) \pm \ldots \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

3. Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

4. При изменении порядка интегрирования знак определённого интеграла меняется на противоположный, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

5. Если отрезок $[a;b]$ точкой $x=c$ разбит на части, то имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

6. Если на отрезке $[a;b]$, где $a<b$ и $f(x)\le \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx\,.$$

7. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a;b]$ и $a\le b$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,.$$

8. *Теорема о среднем*: Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке найдётся такая точка ξ, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(\xi)\,.$$

9. Если функция $f(x)$ - нечетная, т.е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0\,.$$

10. Если функция $f(x)$ - четная, т.е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx\,.$$

§3 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Методы вычисления определённого интеграла те же, что и для неопределённого, однако нужно использовать формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx = \int\limits_0^1 \left(x^4+2x^2+1\right)dx = \left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1 = \frac{28}{15}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\sin\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Решение.

$$\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} dx = \frac{1}{5}\int\limits_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} d(11+5x) = \frac{1}{5}\,\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{10(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{1^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(-\frac{35}{36}\right) = \frac{7}{72}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\limits_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right) - 2\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right) = \frac{2}{3}(8-1) - 2(2-1) = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3}.$$

3.1 Метод замены переменной

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, \quad b]$, требуется вычислить

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Заменим переменную x, полагая

$$x = \varphi(t), \tag{4}$$

тогда

$$dx = \varphi'(t)dt . \tag{5}$$

Из равенства (4) найдем, что значению $x = a$ соответствует значение $t = \alpha$, а значению $x = b$ соответствует $t = \beta$. Следовательно, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \left/ \begin{array}{l} x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; dx = \varphi'(t)dt \\ \text{при } x = a \;\Rightarrow\; t_н = \alpha \\ \text{при } x = b \;\Rightarrow\; t_в = \beta \end{array} \right/ = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \tag{6}$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_2^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение.

$$\int_2^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left/ \begin{array}{l} \textit{Введём замену } \ln x = t \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = dt \\ \textit{Изменим пределы интегрирования} \\ t_н = \ln 2, \;\; t_в = \ln e^2 = 2 \end{array} \right/ = \int_{\ln 2}^{2} \frac{dt}{t^3} = \int_{\ln 2}^{2} t^{-3}dt = \left.\frac{t^{-2}}{-2}\right|_{\ln 2}^{2} =$$

$$= -\left.\frac{1}{2t^2}\right|_{\ln 2}^{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2\ln^2 2} = -\frac{\ln^2 2 + 4}{8\ln^2 2} = \frac{4 - \ln^2 2}{8\ln^2 2} .$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left/ \begin{array}{l} \textit{Введём замену } x = 2\sin t \;\Rightarrow\; dx = 2\cos t dt \\ \textit{Изменим пределы интегрирования} \\ \textit{если } x = 0 \;\Rightarrow\; t_н = 0; \\ \textit{если } x = 2 \;\Rightarrow\; t_в = \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right/ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= 2\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = (2t+\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)+(\sin\pi-\sin 0) = \pi\,.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{16xdx}{(x^2+1)^5}$.

Решение.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{16xdx}{(x^2+1)^5} = \left/ \begin{array}{l} \textit{Введём замену } x^2+1 = t \;\Rightarrow\; 2xdx = dt \\ \textit{Изменим пределы интегрирования} \\ \textit{если } x = 1 \;\Rightarrow\; t_н = 2; \\ \textit{если } x = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; t_в = 4. \end{array} \right/ = \int_2^4 \frac{8dt}{t^5} = 8\int_2^4 t^{-5}dt =$$

$$= 8\frac{t^{-4}}{-4}\Bigg|_2^4 = -\frac{2}{t^4}\Bigg|_2^4 = -\left(\frac{2}{4^4}-\frac{2}{2^4}\right) = -\left(\frac{2}{64}-\frac{2}{16}\right) = -\frac{1}{16}\,.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3} = \left/ \begin{array}{l} \textit{Введём замену } t = tg\,\dfrac{x}{2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2};\; dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \textit{Изменим пределы интегрирования} \\ \textit{если } x = 0 \;\Rightarrow\; t_н = 0; \\ \textit{если } x = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t_в = 1. \end{array} \right/ = \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(\dfrac{2(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)} =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{dt}{2-2t^2+3+3t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{5}} - arctg\,0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,arctg\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

3.2 Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемые функции, тогда

$$d(u \cdot v) = vdu + udv. \qquad (7)$$

Проинтегрируем обе части (7) в пределах от a до b

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

или

$$u \cdot v\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv.$$

Таким образом,

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (8)$$

Формула (8) носит название формулы интегрирования по частям определенного интеграла.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Решение.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \Bigg/ \begin{matrix} u = x & \Rightarrow & du = dx \\ dv = e^{-x}dx & \Rightarrow & v = -e^{-x} \end{matrix} \Bigg/ = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)dx = -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - \left(e^{-1} - e^{0}\right) = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\int_0^3 arctgxdx$.

Решение.

$$\int_0^3 arctgx\ dx = \Bigg/ \begin{matrix} u = arctgx & \Rightarrow & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx & \Rightarrow & v = x \end{matrix} \Bigg/ = x \cdot arctgx\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot arctgx\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} = x \cdot arctgx\Big|_0^3 - \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\Big|_0^3 = 3arctg\ 3 - \frac{1}{2}\left(\ln 10 - \ln 1\right) =$$

$$= 3arctg\ 3 - \frac{1}{2}\ln 10.$$

Пример 11. Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$.

Решение.

$$\int\limits_1^e \ln^2 x dx = \left/ \begin{matrix} u=\ln^2 x \;\Rightarrow\; du=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv=dx \;\Rightarrow\; v=x \end{matrix} \right/ = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int\limits_1^e \ln x dx =$$

$$= \left/ \begin{matrix} u=\ln x \;\Rightarrow\; du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx \;\Rightarrow\; v=x \end{matrix} \right/ = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\left(x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx \right) =$$

$$= x\ln^2 x\Big|_0^e - 2x\ln x\Big|_0^e + 2x\Big|_0^e = e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e = e - 2e + 2e = e.$$

Практические задания

Задание 1. Вычислить определённый интеграл

1) $\int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)^2 dx$;
2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$;
3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \dfrac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2} dx$;

4) $\int\limits_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$;
5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \cdot \cos x dx$;
6) $\int\limits_4^9 \dfrac{dx}{\sqrt{x}-1}$;

7) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{e^x+1}$;
8) $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$;
9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cdot\cos 3x dx$;

10) $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{x^3} dx$;
11) $\int\limits_1^e \ln^3 x dx$;
12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dx}{2\cos x+3}$;

13) $\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{x+x^2}$;
14) $\int\limits_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$;
15) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x+x^3}$;

16) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$;
17) $\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$;
18) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\sin^3 x} dx$.

Самостоятельная работа

Задание 1. Вычислить определённый интеграл

1) $\int\limits_0^1 e^{3x+2}dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}dx$; 3) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{\left(x^2+1\right)^5}$;

4) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 5) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}$; 6) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$;

7) $\int\limits_1^5 \ln\left(x^2+x\right)dx$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x+3x+2}$; 9) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(x+1)^2}$;

10) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x\cdot\cos 3xdx$; 11) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{6-5\sin x+\sin^2 x}$; 12) $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

§4 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение определённого интеграла было дано в предположении, что промежуток интегрирования $[a;\ \ b]$ конечен и функция $f(x)$ непрерывна на нём. Такой интеграл ещё называется собственным. Если хотя бы одно из условий не выполняется, то интеграл называется несобственным. Например

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx;\qquad \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx;\qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx;\qquad \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x-a}.$$

4.1. Несобственные интегралы I рода (интегралы с бесконечными пределами)

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;\ \ +\infty)$, тогда несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b=\lim_{b\to+\infty}\left(F(b)-F(a)\right). \qquad (9)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл существует или говорят, что он сходится. Если же этот предел не существует или равен ∞, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (11)$$

где c - произвольное число.

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$.

Решение.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty} arctg\,\frac{x}{2}\Big|_{a}^{0} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(arctg\,0 - arctg\,\frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(-arctg\,\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-arctg(-\infty)\right) = \frac{1}{2}arctg\ \infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 13. Вычислить интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{(x+5)dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$

Решение.

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{(x+5)dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}} = \int_{1}^{+\infty} x^{-\frac{4}{5}}(x+5)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\left(x^{-\frac{1}{3}} + 5x^{-\frac{4}{5}}\right)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{15}{x^{\frac{1}{3}}}\right)\Bigg|_{1}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{15}{\sqrt[3]{x}}\right)\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{1}\right) - 15\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right)\right] = \infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 14. Вычислить интеграл $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Решение.

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} -2xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} e^{-x^2}d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_{0}^{b} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2} - e^0\right) = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 15. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(x^2+2x+1\right)+4}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(x+1\right)^2+4}=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2+4}=\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}arctg\frac{x+1}{2}\Bigg|_a^b=\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(arctg\,\frac{b+1}{2}-arctg\,\frac{a+1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(arctg\left(\infty\right)-arctg\left(-\infty\right)\right)=\frac{1}{2}\cdot 2arctg\;\infty=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

4.2. Несобственные интегралы II рода (интегралы от разрывных функций)

Если функция $y=f\left(x\right)$ определена на $\left[a;\;\; b\right)$ и имеет разрыв в точке $x=b$, то несобственный интеграл определяется равенством

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_a^{b-\varepsilon}f\left(x\right)dx. \qquad (12)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл существует или сходится. Если же этот предел не существует или равен ∞, то говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично

если функция $y=f\left(x\right)$ определена на $\left(a;\;\; b\right]$ и имеет разрыв в точке $x=a$, то

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b}f\left(x\right)dx; \qquad (13)$$

если функция $y=f\left(x\right)$ определена на $\left[a;\;\; b\right]$ и имеет разрыв в точке $x=c$, причем $a<c<b$, то

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\int\limits_a^c f\left(x\right)dx+\int\limits_c^b f\left(x\right)dx. \qquad (14)$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=2$, тогда

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{2}}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{2}}d(2-x) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(2-x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^{2-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\sqrt{2-x}\right|_0^{2-\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}\,.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 17. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение. При $x=1$ функция $y=\frac{1}{x\ln x}$ является разрывной, тогда

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2 - \ln|\ln(1+\varepsilon)|\right) =$$

$$= \ln\ln 2 - \ln\ln 1 = \ln\ln 2 - \infty = -\infty.$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 18. Вычислить интеграл $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв при $x=4$. Для вычисления неопределённого интеграла отрезок $[2,\ \ 6]$ разделим на две части точкой $x=4$ и данный интеграл найдём как сумму двух несобственных интегралов.

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_2^{4-\varepsilon}(4-x)^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{4+\varepsilon}^{6}(4-x)^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_2^{4-\varepsilon}(4-x)^{-\frac{2}{3}}d(4-x) - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{4+\varepsilon}^{6}(4-x)^{-\frac{2}{3}}d(4-x) = = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_2^{4-\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(4-x)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_{4+\varepsilon}^{6} =$$

$$= -3\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\sqrt[3]{4-x}\right|_2^{4-\varepsilon} - 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\sqrt[3]{4-x}\right|_{4+\varepsilon}^{6} = -3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{\varepsilon}-\sqrt[3]{2}\right) - 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(-2)}-\sqrt[3]{(-\varepsilon)}\right) =$$

$$= -3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{\varepsilon}-\sqrt[3]{2}\right) - 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(-2)}-\sqrt[3]{(-\varepsilon)}\right) = -3\left(-\sqrt[3]{2}\right) - 3\sqrt[3]{(-2)} = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}\,.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Практические задания

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл I рода

1) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2} dx$; 5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8}}$;

7) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{\left(x^5+1\right)^4}$; 8) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x+x^3}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл II рода

1) $\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 3) $\int\limits_{3}^{5} \frac{dx}{(x-3)^2}$;

4) $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$; 5) $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 6) $\int\limits_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{\ln x}}$; 8) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-x-2}$; 9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$.

Самостоятельная работа

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл I рода

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-5x} dx$; 5) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 6) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+5}{x \cdot \sqrt[3]{x}} dx$;

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} dx$; 8) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$; 9) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Задание 3. Вычислить несобственный интеграл II рода

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^3+\sqrt[3]{x}-7}{\sqrt[5]{x^3}}dx$; 2) $\int\limits_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$; 3) $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{x^2-1}$;

4) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$; 5) $\int\limits_{-3}^1 \frac{xdx}{x^2-4}$; 6) $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$;

7) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$; 8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-3x+2}$; 9) $\int\limits_0^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

§5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

5.1. Вычисление площадей плоских фигур

Если криволинейная трапеция, ограниченна сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу осью OX, с боков прямыми $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, то

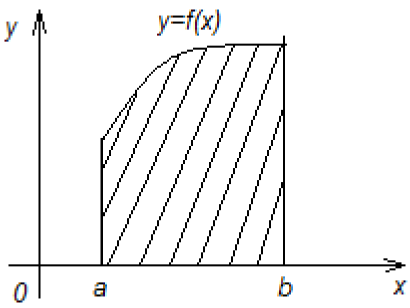

Рис. 3

Если криволинейная трапеция, ограниченна сверху непрерывной кривой $y=f(x)$, снизу осью OX, с боков прямыми $x=a$, $x=b$, причем $a<b$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 3) вычисляется по формуле

$$S=\int\limits_a^b f(x)dx. \quad (15)$$

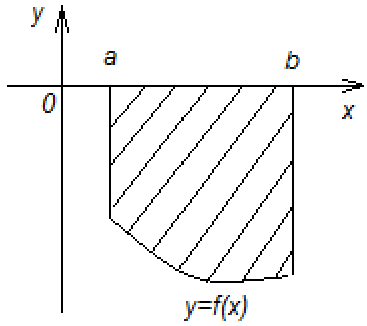

Рис. 4

Если криволинейная трапеция, ограниченна снизу непрерывной кривой $y=f(x)$, сверху осью OX, с боков прямыми $x=a$, $x=b$, причем $a<b$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 4) вычисляется по формуле

$$S=-\int\limits_a^b f(x)dx \quad (16)$$

или

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|. \qquad (17)$$

Если непрерывная кривая $y = f(x)$ пересекает ось OX конечное число раз (рис. 5), то чтобы вычислить площадь фигуры надо $[a,\ b]$ разбить на части, в пределах которых функция не меняет знак и применить соответствующую формулу (15), (16), (17)

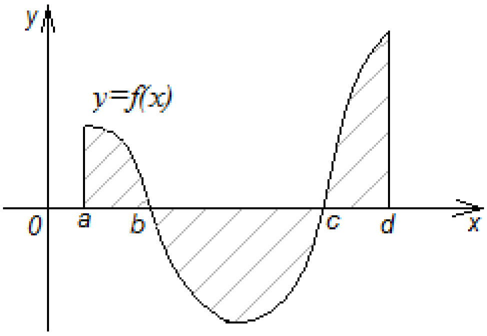

Рис. 5

$$S = \int_a^b f(x)dx + \left| \int_b^c f(x)dx \right| + \int_c^d f(x)dx \qquad (18)$$

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причём $f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6) находится по формуле

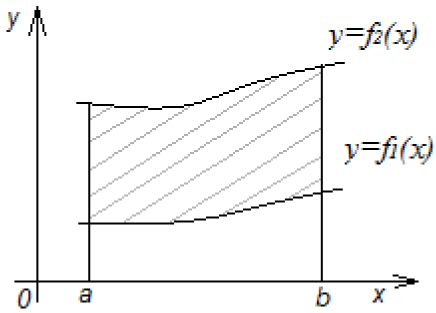

Рис. 6

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (19)$$

Если криволинейная трапеция, ограниченна справа непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, слева осью OY, сверху и снизу прямыми $y = c$, $y = d$, причем $c < d$, то площадь криволинейной трапеции (рис.7) вычисляется по формуле

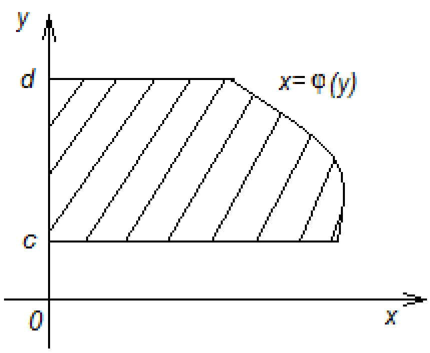

Рис. 7

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy. \qquad (20)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a,\ \ b]$ оси OX, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt, \qquad (21)$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$ ($\psi(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$).

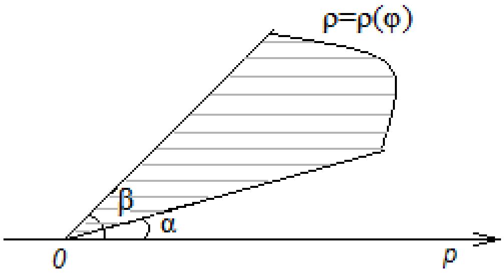

Рис. 8.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (где $\alpha < \beta$) (рис. 8), вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi \qquad (22)$$

Пример 19. Вычислить площадь фигуры ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью OX.

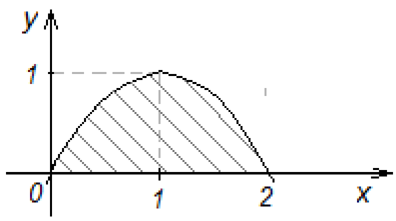

Рис. 9

Решение. Парабола пересекает ось OX в точках $(0,\ \ 0)$ и $(2,\ \ 0)$ (рис. 9) Следовательно,

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \ (e\partial^2)$$

Пример 20. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 6 - x^2$ и $y = x^2 - 2$.

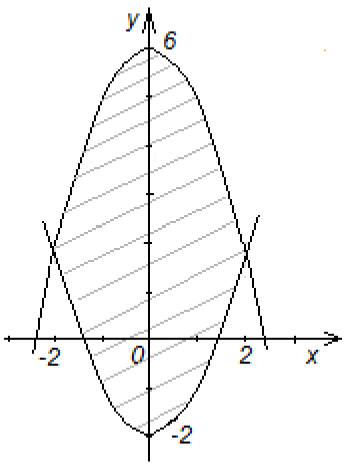

Рис. 10

Решение. Уравнению $y = 6 - x^2$ соответствует парабола с вершиной в точке $(0,\ \ 6)$. Уравнению $y = x^2 - 2$ соответствует парабола с вершиной в точке $(0,\ \ -2)$ (рис. 10). Найдем абсциссы точек пересечения заданных кривых

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 6 - x^2 = x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2.$$

Таким образом, $S=\int\limits_{-2}^{2}\left[\left(6-x^2\right)-\left(x^2-2\right)\right]dx=2\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx=$

$$=2\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=2\left(4(2+2)-\frac{1}{3}\left(2^3-(-2)^3\right)\right)=2\left(16-\frac{1}{3}\cdot 16\right)=2\cdot\frac{48-16}{3}=\frac{64}{3}=21\frac{1}{3}\ \left(ед^2\right).$$

Пример 21. Вычислить площадь фигуры ограниченной параболой $y=-x^2+6x-5$ и осями координат.

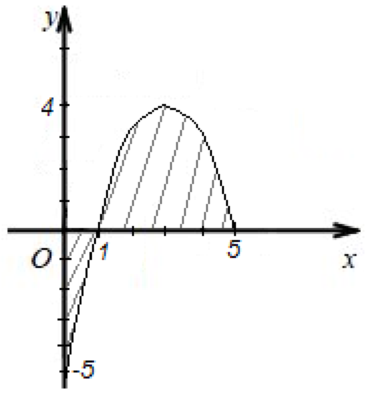

Рис. 11

Решение. Парабола пересекает ось OX в точках $(1,\ \ 0)$ и $(5,\ \ 0)$ (рис. 11). Следовательно,

$$S=\left|\int\limits_0^1\left(-x^2+6x-5\right)dx\right|+\int\limits_1^5\left(-x^2+6x-5\right)dx=$$

$$=\left|\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Bigg|_0^1\right|+\left(-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right)\Bigg|_1^5=$$

$$=\left|-\frac{1}{3}+3-5\right|+\left(-\frac{125}{3}+75-25+\frac{1}{3}-3+5\right)=$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{124}{3}+52=-\frac{117}{3}+52=-39+52=13\ \left(ед^2\right).$$

Пример 22. Вычислить площадь фигуры ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ и осью OX.

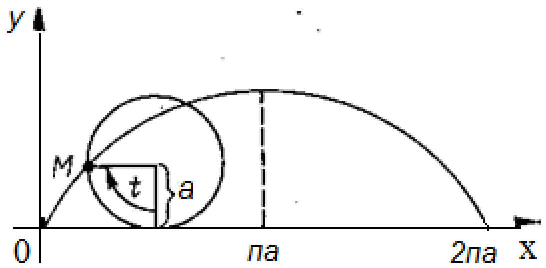

Рис. 12. Циклоида

Решение. Циклоида – плоская кривая, которую описывает точка М окружности радиуса *а*, катящаяся без скольжения по прямой линии (рис. 12).

Заметим, что данная кривая задана в параметрическом виде, при этом $0\le x\le 2\pi a$.

Если $x=0\ \Rightarrow\ a(t-\sin t)=0\ \Rightarrow\ t=0$.

Если $x=2\pi a\ \Rightarrow\ a(t-\sin t)=2\pi a\ \Rightarrow\ t=2\pi$.

$$S=\int\limits_0^{2\pi a}ydx=\int\limits_0^{2\pi}a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=\int\limits_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt=a^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2\ \left(e\partial^2\right).$$

Пример 23. Вычислить площадь фигуры ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x=a\cos t,\\ y=b\sin t.\end{cases}$$

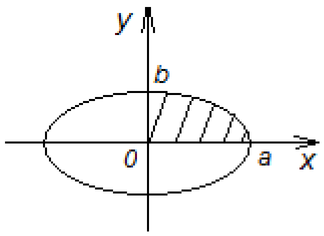

Рис. 13. Эллипс

Решение. Т.к. эллипс, симметричен относительно осей координат (рис. 13), то достаточно вычислить площадь $\frac{1}{4}$ части всей фигуры, а результат умножить на 4.

Данная кривая задана в параметрическом виде, при этом $0\le x\le 2\pi a$.

Если $x=0\ \Rightarrow\ a\cos t=0\ \Rightarrow\ t=\frac{\pi}{2}$.

Если $x=a\ \Rightarrow\ a\cos t=a\ \Rightarrow\ t=0$.

$$S=4\int_0^a ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b\sin t\cdot a(-\sin t)dt=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 tdt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=4ab\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=4ab\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}(\sin\pi-\sin 0)\right)=ab\pi\ \left(e\partial^2\right).$$

Пример 24. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой

$$\rho=a\cos 3\varphi\ \ (a>0).$$

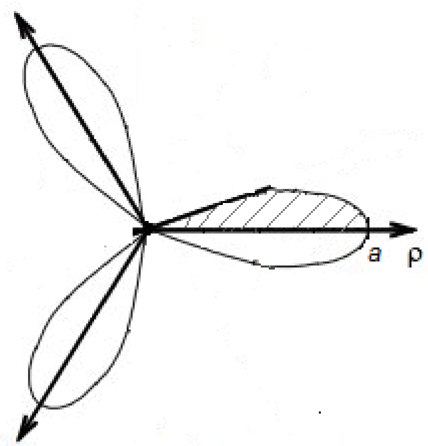

Рис. 14. Трилистник

Решение. Т.к. фигура состоит из трёх одинаковых «лепестков» (трёхлепестковая роза) (рис. 14), то достаточно вычислить площадь $\frac{1}{6}$ части всей фигуры, а результат умножить на 6.

Если $\rho=0\ \Rightarrow\ a\cos 3\varphi=0\ \Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{6}$.

Если $\rho=a\ \Rightarrow\ a\cos 3\varphi=a\ \Rightarrow\ \varphi=0$.

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 d\varphi = 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi \; d\varphi = 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 6\varphi}{2} d\varphi = \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \; \left(e\partial^2\right).$$

Пример 25. Вычислить площадь фигуры ограниченной кардиоидой

$$\rho = a(1+\cos\varphi).$$

Решение. В силу симметрии кардиоиды (рис.15) достаточно вычислить площадь $\frac{1}{2}$ части всей фигуры, а результат умножить на 2.

Если $\rho = 0 \;\Rightarrow\; a(1+\cos\varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \pi$.

Если $\rho = 2a \;\Rightarrow\; a(1+\cos\varphi) = 2a \;\Rightarrow\; \varphi = 0$.

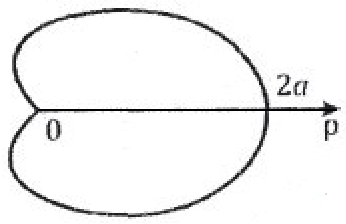

Рис. 15. Кардиоида

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = \int_0^{\pi} a^2 (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = = a^2 \left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{2} a^2 \; \left(e\partial^2\right).$$

5.2 Объём тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограничена кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ вращается вокруг оси OX, то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2(x)\, dx \qquad (23)$$

Объём тела, образованного вращением криволинейной трапецией, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c$, $y = d$, отрезком $[c, \;\; d]$ на оси OY вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\, dy \qquad (24)$$

Если фигура, ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, причём $f_1(x) \le f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ вращается, вокруг оси OX, то объём тела вращения вычисляется по формуле

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left(f_2^{\,2}(x) - f_1^{\,2}(x) \right) dx \qquad (25)$$

Объём тела, образованного вращением кривых $x_1 = \varphi_1(y)$, $x_2 = \varphi_2(y)$ ($\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$) и прямыми $y = c$, $y = d$ вокруг оси OY вычисляется по формуле

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \left(\varphi_2^{\,2}(y) - \varphi_1^{\,2}(y) \right) dy \qquad (26)$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $\alpha \le t \le \beta$, то

$$V_{ox} = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \varphi'(t)\ dt \qquad (27)$$

$$V_{oy} = \pi \int_\alpha^\beta \varphi^2(t) \psi'(t)\ dt \qquad (28)$$

Объём тела, полученного при вращении сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta \rho^3 \sin \varphi d\varphi . \qquad (29)$$

Пример 26. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $x = y^2$.

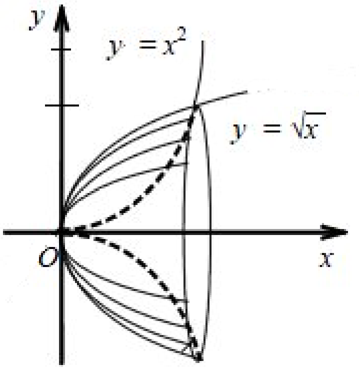

Рис. 16.

Решение. Тело образованное вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами, представлено на рисунке 16. Найдем координаты (абсциссы) точек пересечения парабол из системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = x^4 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \ x_2 = 1 .$$

Применим формулу ( )

$$V_{ox}=\pi\int\limits_a^b\left(f_2^{\,2}(x)-f_1^{\,2}(x)\right)dx=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^4\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{10}\pi\ \left(ед^3\right).$$

Пример 27. Вычислить объём тела, образованного вращением первой арки циклоиды $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ вокруг оси OX.

Решение. Заметим, что данная кривая задана в параметрическом виде, при этом $0\le x\le 2\pi a$.

Если $x=0\ \Rightarrow\ a(t-\sin t)=0\ \Rightarrow\ t=0$.

Если $x=2\pi a\ \Rightarrow\ a(t-\sin t)=2\pi a\ \Rightarrow\ t=2\pi$.

$$V_{OX}=\pi\int\limits_0^{2\pi a}y^2dx=\pi\int\limits_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2a(1-\cos t)dt=\pi\int\limits_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^3dt=\pi\cdot a^3\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=$$

$$=\pi\cdot a^3\int\limits_0^{2\pi}\left(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t\right)dt=\pi\cdot a^2\left(t\Big|_0^{2\pi}-3\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)dt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\cos t dt\right)=\pi\cdot a^3\left(2\pi+\frac{3}{2}\cdot 2\pi-\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\sin^2 t\right)d\sin t\right)=$$

$$=\pi\cdot a^3\left(5\pi-\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right)=5\pi^2a^3\ \left(ед^3\right).$$

5.3 Длина дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая AB, уравнение которой $y=f(x)$, где $a\le x\le b$ и функция $y=f(x)$ имеет на $[a;\ \ b]$ непрерывную производную $f'(x)$.

<u>Определение</u>. Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломанной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремиться к нулю

$$l=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{l=1}^{n}\Delta l_i\ .$$

Если кривая AB задана функцией $y = f(x)$ непрерывной вместе со своей производной на отрезке $[a;\ \ b]$, длина этой кривой AB вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{30}$$

Если кривая AB задана функцией $x = \varphi(y)$ непрерывной вместе со своей производной на отрезке $[c;\ \ d]$, длина этой кривой AB вычисляется по формуле

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}\, dy. \tag{31}$$

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями

$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ причём $t_1 \le t \le t_2$, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \tag{32}$$

Если кривая AB задана уравнениям в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги AB вычисляется по формуле

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{33}$$

Пример . Найти длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до т $A(4;\ \ 8)$.

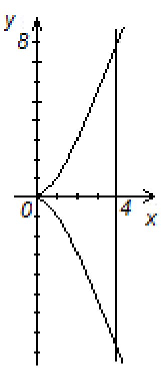

Рис. 17

Решение. Кривая симметрична относительно оси OX (рис. 17), поэтому вычислим длину верхней части кривой и результат удвоим. Уравнение полукубической параболы имеет вид $y^2 = x^3$ или $y = x^{\frac{3}{2}}$. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$. Применив формулу (30) получим

$$l = 2\cdot\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{9}\cdot\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}d\left(1+\frac{9}{4}x\right) = \frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{16}{27}\left(\sqrt{(1+9)^3} - \sqrt{1}\right) = \frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)\ (ед).$$

Пример 29. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, предполагая, что $a > b$.

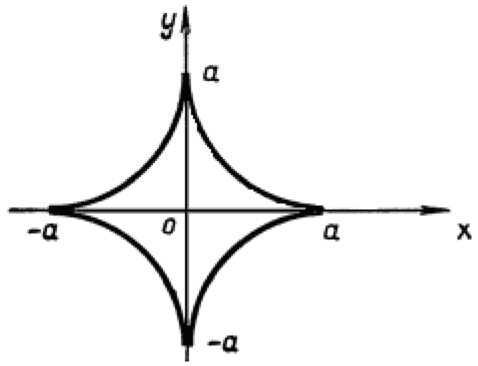

Рис. 18. Астроида

Решение. В силу симметрии астроиды (рис. 18) вычислим сначала $\frac{1}{4}$ длины, а затем результат умножим на 4.

Применяя формулу (32) получим

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 9\cos^4 t(-\sin t)^2 + a^2 9\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)}dt = 12a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos t dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 3a\left(-\cos 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a\ (ед).$$

Пример 30. Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$.

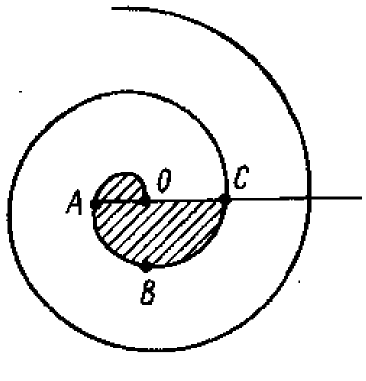

Рис. 19. Спираль Архимеда

Решение. Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис.19). Используя формулу (33) имеем

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}d\varphi =$$

$$= \Bigg/ \begin{matrix} u = \sqrt{\varphi^2+1} & du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi \\ dv = d\varphi & v = \varphi \end{matrix} \Bigg/ =$$

Рассмотрим решение последнего интеграла методом интегрирования по частям

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi = \left/ \begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1} & du=\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi \\ dv=d\varphi & v=\varphi \end{matrix} \right/ = a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right) =$$

$$a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right) = a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right) =$$

$$a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right) = a\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\Big|_0^{2\pi}.$$

Выразим $a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi = a\left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\Big|_0^{2\pi}\right)$.

Таким образом, $l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi = a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right)$ (ed).

Практические задания

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y=x^2$, $y=2-x^2$;

б) $y=1-x^2$, $y=x^2+2$, $x=0$, $x=1$;

в) $y=\sin 2x$, $y=1$, $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}$;

г) $y=\cos x$, $y=-\frac{x}{2}$, $x=0$, $x=\frac{3}{2}\pi$.

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) астроидой $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$;

б) $\begin{cases} x=a\sin t\cos^2 t, \\ y=a\cos t\sin^2 t, \end{cases}$ $0\le x\le\frac{\pi}{2}$;

в) первым витком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$, $a>0$ и полярной осью;

г) лемнискатой $\rho^2=2\cos 2\varphi$.

Задание 6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры ограниченной линиями

а) $y^2 = (x-1)^3$, $x = 2$;

б) $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x = 0$, $x = 2$.

Задание 7. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры ограниченной линиями

а) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$;

б) $y = \arcsin x$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Задание 8. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX

а) астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$;

б) кривой $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 0$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$.

Задание 9. Найти длину дуги

а) кривой $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;

б) кривой $\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ $0 \le t \le 3$;

в) кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$;

г) первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

Самостоятельная работа

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

а) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 10$;

б) $x^2 + y - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$;

в) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \end{cases}$ между точками пересечения с осью OX;

г) одним лепестком кривой $\rho = 5\sin 3\varphi$.

Задание 5. Найти объём тела вращения, ограниченного линиями

а) $y = 2x - x^2$ и $y = -x + 2$ вокруг оси OX;

б) $y = x^2 + 1$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$, вокруг оси $OУ$;

в) верхней половиной эллипса $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $x = 0$, $y = 0$,

вокруг оси $OУ$.

Задание 6. Найти длину дуги

а) кривой $y = 2 - e^x$, $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$;

б) кривой $\begin{cases} x = 4 - \dfrac{t^4}{4}, \\ y = \dfrac{t^6}{6}, \end{cases}$ $0 \le t \le 2$;

в) кривой $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ (ТИПОВОГО РАСЧЕТА)

ВАРИАНТ 1

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^4 x^2 \cdot \sqrt{16 - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \cos x dx$; 3) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{tg^2 x}{4 + 3\cos 2x}\,dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Задание 4. Найти объём тела вращения, образованного вращением фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ оси OX вокруг: а) оси OX; в) оси OY.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 5(t - \sin t) \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

ВАРИАНТ 2

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^{6} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$; 2) $\int\limits_{0}^{1} x \cdot \ln(x^2+1)dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos^6 xdx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой $\rho = a$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной кривой $y^2 = \frac{2x^3+x}{4}$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

ВАРИАНТ 3

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_{0}^{1} x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{2} \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cdot \cos^8 xdx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной частью спирали

$\rho = a + b\varphi$, $(a > 0)$ при $\varphi \in [0;2\pi]$.

Задание 4. Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной осью *OY*, синусоидой и косинусоидой ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$).

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

ВАРИАНТ 4

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx$; 2) $\int_2^3 \frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\sin^2 x}{2\cos 2x-4}\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = 2x - x^2 + 3; \quad y = x^2 - 4x + 3.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 10\cos^3 t \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 5

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 2) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 3) $\int_1^2 \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой $y^2 = (4-x)^3$ и прямой $x = 0$.

Задание 4. Определить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривой $y = ctgx$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

ВАРИАНТ 6

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot(1+\sqrt[3]{x})}$; 2) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+3}}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой $y^2 = x^3$ и прямыми $y = 8$; $x = 0$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси OX, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, ($x \geq 1$) $y = 0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 7

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}}$; 2) $\int_{3}^{4} \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{2x-3}{x^2+2x+7} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = x^2 + 4x; \quad y = x + 4.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $(6-x)y^2 = x^2$; $\quad 0 \leq x \leq 4$ вокруг оси *OX*.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 6\cos^3 t \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $\quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 8

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x \cdot (x^2 + 2x + 1)} dx$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{4x-1}{4x^2 - 4x + 5} dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{0}^{\infty} \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной параболой $y^2 = 2x + 4$ и прямой $x = 0$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x + 2$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t) \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

ВАРИАНТ 9

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^5 x^2 \cdot \sqrt{25 - x^2}\,dx$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 1)}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{3x + 4}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}}\,dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривой $y = 4 - x^2$ и осью OX.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y = 1 - x^2$; $x = 0$; $x = \sqrt{y - 2}$; $x = 1$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 10

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_4^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x} + 1}\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x + 1)^2 (x^2 + 1)}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{x + 1}{2x^2 + x + 1}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y = x^2$; $y = 2 - x^2$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

ВАРИАНТ 11

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$; 2) $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y=(x-1)^2;\quad y^2=(x-1).$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y=3\sin x$; $y=\sin x$; $0\le x\le\pi$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x=8\cos^3 t \\ y=8\sin^3 t \end{cases}$ $0\le t\le\frac{\pi}{6}$.

ВАРИАНТ 12

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cdot\cos 2x dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y=x^2\sqrt{8-x^2};\quad y=0;\quad 0<x<2\sqrt{2}.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y=-x^2+5x+6$; $y=0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x=4(t-\sin t) \\ y=4(1-\cos t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{2\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 13

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x+1)\cdot\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_0^2 x\cdot e^{2x}dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+3x+1}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = x\sqrt{4-x^2};\quad y=0;\quad 0\le x\le 2.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y=5\cos x$; $y=\cos x$; $x=0$; $x>0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 2{,}5(t-\sin t) \\ y = 2{,}5(1-\cos t) \end{cases}$ $2\frac{\pi}{} \le t \le \pi$.

ВАРИАНТ 14

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; 2) $\int\limits_0^\pi x^3\cdot\sin xdx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-8x+1}}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y=(x+1)^2;\ y^2=x+1.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y=2x-x^2$; $2x^2-4x+y=0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = 3\sqrt{\cos 3\varphi}$.

ВАРИАНТ 15

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin 2xdx$; 3) $\int\limits_{-1}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_5^\infty \frac{dx}{x^2-8x+17}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = 4 - x^2; \quad y = x^2 - 2x.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y = (x-1)^2$; $y = 1$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$.

ВАРИАНТ 16

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^3 x^3 \cdot \sqrt{x^2-1}dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \arcsin x dx$; 3) $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x^2+2x+5}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{x^2+2x+4}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = \sqrt{4-x^2}; \; y = 0; \quad x = 0; \quad x = 1.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y = x^2 + 1$; $y = x$; $x = 0$; $x = 1$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = b + 2a\cos\varphi$.

ВАРИАНТ 17

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{dx}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$; 2) $\int\limits_2^3 \dfrac{dx}{x^3(x-1)^2}$; 3) $\int\limits_0^1 \dfrac{x+2}{x^2+2x+5}dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \dfrac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = \frac{x}{x^2+1}; \quad y = 0; \quad x = 0.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y = (x-1)^2$; $x = 0$; $y = 0$; $x = 2$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t) \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

ВАРИАНТ 18

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{(4+x^2)\cdot\sqrt{4+x^2}}$; 2) $\int\limits_3^4 \dfrac{x^3dx}{(x^2-1)(x+1)}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin xdx}{2+\sin x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{10} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y = e^x$; $y = e^{-x}$; $x = 1$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y = x^3$; $y = x^2$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 4\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

ВАРИАНТ 19

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_{-\frac{5}{3}}^{1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+5}+2}{1+\sqrt{3x+5}}dx$; 2) $\int\limits_4^5 \dfrac{dx}{(x-1)^2(x^2+2)}$; 3) $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{x^2+x+1}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^{7} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{7-x}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y = (x-2)^3$; $y = 4x - 8$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 1$ и прямыми $x = 2$; $y = 0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

ВАРИАНТ 20

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{-3}^{3} x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}\,dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \cos 3x dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5+3\sin x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{e}^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$x = 4 - y^2$; $x = y^2 - 2y$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y^2 = x - 2$; $y = 0$; $y = x^3$; $y = 1$.

Задание 5. Найти длину дуги кривой $\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}$; $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 21

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$; 2) $\int_{1}^{3} x^2 \ln x dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y = x\sqrt{36-x^2}$; $y = 0$; $0 \le x \le 6$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y = x^3$; $y = x$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 22

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int_{0}^{5} x^2 \cdot \sqrt{25-x^2}\,dx$; 2) $\int_{0}^{1} arctgx dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл: $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$x=(y-2)^3;\ x=4y-8.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной линиями $y=\sqrt{x-1}$; $y=0$; $y=1$; $x=0{,}5$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x=2(\cos t+t\sin t) \\ y=2(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ $\quad 0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 23

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int \frac{x^4dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}$; 2) $\int\limits_1^3 \ln x dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{1+\cos x+\sin x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y=(x-1)^2;\quad y^2=x-1.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $x=\sqrt[3]{y-2}$; $x=1$; $y=1$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho=6e^{\frac{12\varphi}{5}}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 24

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$; 2) $\int\limits_0^4 x\cdot e^{2x}dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{5+4\cos x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{x^2-x-2}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y=x^2\sqrt{16-x^2};\quad y=0;\quad 0\le x\le 4.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY, ограниченной кривыми $y = \ln x$; $x = 2$; $y = 0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = 3(1+\sin\varphi)$ $\quad -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$.

ВАРИАНТ 25

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\cos x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}e^x$, $x = 1$, $y = 0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = a(1+\cos\varphi)$

ВАРИАНТ 26

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5+4x}}$; 2) $\int\limits_1^2 x \cdot \ln xdx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{2+\cos x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^1 x^3 \cdot \ln xdx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$$y^2 = 9x, \quad y = x + 2.$$

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = \frac{1}{8}x^3$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right)$, $1 \le \varphi \le 3$.

ВАРИАНТ 27

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{(x-1)(x+2)}$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x + \cos x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^3 \frac{xdx}{(x-2)^3}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$x = 0$, $x = 2$, $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = 2 - x^4$, $y = x^2$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho = \frac{a}{1+\cos\varphi}$, $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 28

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \sqrt{4-x^2}dx$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{x^3-1}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y = x^2\sqrt{16-x^2}$; $y = 0$; $0 \le x \le 4$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $y = 3 - x^2$, $y = 2x$, $y = 0$.

Задание 5. Найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$, $1 \le x \le e$.

ВАРИАНТ 29

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^3 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{1+x^3}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{1+\cos x+\sin x}$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{\infty} x\cdot e^{-x^2}dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y=2x-x^2$; $y=-x$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY ограниченной кривыми $y=x^3$; $y=\sqrt{x}$.

Задание 5. Найти длину дуги $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$.

ВАРИАНТ 30

Задание 1. Вычислить определённый интеграл:

1) $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x-9}+\sqrt{x}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 x}{4+3\cos 2x}dx$.

Задание 2. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$.

Задание 3. Вычислить площадь фигуры ограниченной кривыми

$y=x\cdot\sqrt{9-x^2}$; $y=0$; $0\le x\le 3$.

Задание 4. Найти объём тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OX ограниченной кривыми $y=xe^x$, $x=1$, $y=0$.

Задание 5. Найти длину дуги $\rho=2\sin 2\varphi$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман, А.Ф. Краткий курс математического анализа [Текст]: учеб. пособие; доп. науч. – метод. советом М-ва образования и науки РФ / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. – 16-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2010. – 735 с.
2. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст]: учеб.пособие / Г.И. Запорожец.- 6-е изд., стер.- СПб.: Лань, 2009.- 464 с.
3. Курс математики для технических высших заведений [Электронный ресурс] : учеб. пособие; доп. НМС по мат. М-ва образ. и науки РФ / В.Г. Зубков [и др.]; под ред.: В.Б. Миносцева, Е.А. Пушкаря. – 2-е изд., испр. . – СПб: Лань. Часть 2. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление. Теория поля. – 2013. – 428, [4] с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) / **www.e.lanbook.com**.
4. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Интегрирование функций одной переменной, функции многих переменных, ряды [Текст]: учеб.пособие; рек. Науч.- метод.советом М-ва образ. РФ / И.А. Соловьев [и др.].-СПб.: Лань, 2009.- 288 с.
5. Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для вузов.- М.: Высш. шк.,2003. – 479 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Кидяева Наталья Петровна,
Каньшина Зоя Ивановна

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Учебно-методическое пособие

В редакции составителей

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 13.01.2015 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 2,2. Усл.-п.л. – 3,0.
Тираж 100 экз. Заказ 6.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86