МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Г.Н. Фролова, О.П. Митрохина, Е.А. Подолько

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

**Учебно-методическое пособие
для подготовки магистров**

**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2015**

УДК 519.2 (075.8)
ББК 22.171

Фролова, Г.Н. Принятие решений и элементы планирования: учебно-методическое пособие / сост. Г.Н. Фролова, О.П. Митрохина, Е.А. Подолько. – Благовещенск: ДальГАУ, 2015. – 71 с.

Учебно-методическое пособие написано в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования для направлений подготовки: 190600.68 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 280700.68 «Строительство», 260200.68 «Продукты питания животного происхождения», квалификация (степень) «магистр» и предназначено для студентов, обучающихся по данным направлениям.

Пособие делится на три главы, первая из которых посвящена элементам теории игр (подробно разобрано решение матричных игр графическим методом, а также решение «игр с природой», используя критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа); вторая — системам массового обслуживания (СМО), в которой включены основные понятия СМО с отказами, с неограниченным ожиданием, с ожиданием и с ограниченной длиной очереди; третья – моделям управления запасами.

Каждая глава содержит большое количество задач разной степени сложности, которые можно использовать для проведения практических занятий, а также выполнения индивидуальных заданий.

Пособие можно использовать как конспект лекций. Для усвоения теоретического материала достаточно знаний элементов математического анализа и теории вероятностей.

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд.физ.-мат.наук, доцент

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета (Протокол №3 от 19 ноября 2014 года).

Издательство ДальГАУ
2015

ВВЕДЕНИЕ

Управление и планирование являются наиболее сложными функциями в работе предприятий, фирм, служб администраций всех уровней. Долгое время они являлись монополией человека с соответствующей подготовкой и опытом работы. Совершенствование науки, техники, разделение труда усложнили принятие решений в управлении и планировании. Принятие ответственных решений, как правило, связано с большими материальными ценностями. В настоящее время недостаточно знать путь, ведущий к достижению цели. Необходимо из всех возможных путей выбрать наиболее экономичный, который наилучшим образом соответствует поставленной задаче.

Появление персональных компьютеров создало огромные возможности для развития науки, совершенствования методов управления производством. Однако без строгих формулировок задач, без математического описания процессов современный уровень управления и планирования не может быть достигнут.

На практике часто приходится сталкиваться с ситуациями, в которых необходимо принимать решения при наличии двух или более сторон, имеющих различные цели. Результаты любого действия каждой из сторон зависят от решений партнеров. В экономике подобные ситуации встречаются довольно часто. Для решения задач с конфликтными ситуациями используют математические методы теории игр.

Цель изучения систем массового обслуживания (СМО) состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы. Для проведения оптимизации системы в целом применяют методы теории систем массового обслуживания.

Рассмотрение моделей управления запасами преследует цель выбора для предприятий оптимальных расходов на доставку, хранение комплектующих материалов и ресурсов, необходимых для изготовления изделий.

ГЛАВА 1 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИГР

1.1 Основные понятия

Теория игр – метод моделирования оценки воздействия принятого решения на конкурентов.

Теорию игр изначально разработали военные с тем, чтобы в стратегии можно было учесть возможные действия противника. В бизнесе игровые модели используются для прогнозирования реакции конкурентов на изменение цен, новые компании поддержки сбыта, предложения дополнительного обслуживания, модификацию и освоение новой продукции.

Первую попытку создать математическую теорию игр предпринял в 1921 г. Э.Борель. Как самостоятельная область науки впервые теория игр была изложена в монографии Дж.фон Неймана и О.Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 г. С тех пор многие разделы экономической теории (например, теория несовершенной конкуренции, теория экономического стимулирования и др.) развивались в тесном контакте с теорией игр.

Игра - это математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны, что и порождает конфликт.

Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др.

Теория игр - это математическая теория конфликтных ситуаций.

Цель теории игр - определение оптимальных стратегий поведения игроков.

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам, которые устанавливают последовательность ходов, выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Ходы бывают *личными* и *случайными*. Ход называется *личным*, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его (например, любой ход в шахматной игре). Ход называется *случайным,* если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется *партией*.

Одним из основных понятий теории игр является понятие стратегии. *Стратегией* игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Стратегия игрока называется *оптимальной*, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник.

Конечная парная игра с нулевой суммой называется *матричной* игрой. Такая игра описывается платежной матрицей, в которой задаются выигрыши первого игрока. Номер строки матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец - номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца находится соответствующий выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока).

1.2 Матричные игры

1.2.1.Чистые и смешанные стратегии

Наибольшее практическое значение имеют парные игры. Поэтому рассмотрим только их. Участников игры обозначают через A и B.

Игра называется с *нулевой суммой*, если один игрок выигрывает столько, сколько второй проигрывает в той же партии.

Каждая фиксированная стратегия, которую может выбрать игрок, называется его *чистой стратегией.*

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно, то оптимальная стратегия должна обеспечивать максимальный средний выигрыш.

Для выбора оптимальной стратегии используют *принцип максимина*, который предполагает выбор той стратегии, при которой минимальный выигрыш для различных стратегий максимален. Данный принцип является основным принципом теории матричных игр.

Для пояснения принципа максимина рассмотрим пример матричной игры с платежной матрицей, приведенной на рисунке 1.2.1.

Пример 1.

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	α_i
A_1	5	6	7	4	5	4
A_2	3	10	6	5	6	3
A_3	12	5	3	9	8	3
A_4	6	7	5	6	10	5
β_j	12	10	7	9	10	

максимин $\max_i \min_j a_{ij}$

минимакс $\min_j \max_i a_{ij}$

Рис. 1.2.1

Какой стратегией игроку *A* воспользоваться? Есть выигрыш 12, при применении стратегии A_3. Но при этом противник может выбрать стратегию B_3, и игрок *A* получит выигрыш, равный всего трем.

Для определения оптимальной стратегии в соответствии с принципом максимина, запишем в правом добавочном столбце платежной матрицы минимальное значение α_i в каждой строке (минимум строки). Из всех значений α_i (правый столбец) выделим наибольшее. Ему соответствует стратегия A_4.

При выборе этой стратегии при любом поведении противника выигрыш будет не менее пяти.

Эта величина - гарантированный выигрыш. Он называется *нижней ценой игры* (или «максимином» - максимальный из минимальных выигрышей). Будем обозначать его α. В данном примере $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = 5$.

Выбирая стратегию игрока *B*, он хотел бы отдать поменьше, но должен рассчитывать на наихудшее для него поведение игрока *A*.

Припишем к платежной матрице (рис.1.2.1) нижнюю строку и в ней запишем наихудшее для игрока *B* возможные результаты (максимумы столбцов β_j.

Очевидно, осторожный противник должен выбрать стратегию, при которой величина β_j минимальна. Эта величина называется *верхней ценой игры* (или «минимаксом» - минимальный из максимальных проигрышей). Будем обозначать ее β. В нашем примере $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 7$.

Итак, исходя из принципа осторожности, игрок *A* должен выбрать стратегию A_4, а его противник - B_3. Такие стратегии называются максиминными или минимаксными стратегиями (вытекающие из принципа максимина).

До тех пор, пока обе стороны в примере будут придерживаться своих максиминных стратегий, выигрыш игрока *A* и проигрыш игрока *B* будет равен a_{43}=5.

Нижняя цена игры никогда не превосходит верхней цены игры $\beta \geq \alpha$, т.е.

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} \geq \max_{i} \min_{j} a_{ij}.$$

Случай $\beta = \alpha$, соответствует наличию у платежной матрицы так называемой *седловой точки.*

То есть, если игра имеет седловую точку, то выполняется следующее равенство:

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} = \max_{i} \min_{j} a_{ij}.$$

Пример 2. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет следующий вид:

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	0	-1	-2	-2
A_2	3	2	-1	-1
A_3	6	3	0	0
β_i	6	3	0	

Определим $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ и $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ и запишем их в таблицу.

Нижняя цена игры $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \ \min\limits_j a_{ij} = 0.$

Верхняя цена игры $\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\limits_j \ \max\limits_i a_{ij} = 0.$

Так как α=β=0, то платежная матрица и матричная игра имеют седловую точку. Оптимальными стратегиями для игрока A является стратегия A_3, а для игрока B - B_3.

Легко заметить, что отклонение игрока A от оптимальной стратегии приводит к уменьшению его выигрыша, а одностороннее отклонение игрока B - к увеличению его проигрыша.

Могут встречаться случаи, когда платежная матрица имеет несколько седловых точек, однако это не изменит характера решений, поскольку все ситуации равновесия имеют одну и ту же цену, а следовательно, эквиваленты.

Стратегии, при котором выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются *оптимальными чистыми стратегиями,* а их совокупность - *решением игры*. Игра в этом случае решается в чистых стратегиях.

Величина $\nu = \alpha = \beta,$ называется *ценой игры*.

Если ν>0, то игра выгодна для игрока A, если ν<0 - для игрока B; при ν=0 игра справедлива, т.е. является одинаково выгодной для обоих участников.

Пример 3. Найти решение игры, платежная матрица которой имеет вид:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	7	6	9	6	6
A_2	8	4	3	4	3
A_3	7	6	8	6	6
β_j	8	6	9	6	

Определим α_i и β_j и запишем их в таблицу.

Находим нижнюю и верхнюю цену игры: $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = 6$; $\beta = \min\limits_j \beta_j = 6$.

Видно, что игра имеет четыре седловые точки с соответствующими парами оптимальных стратегий: A_1B_2; A_1B_4; A_3B_2 и A_3B_4. Цена игры равна 6.

При этом необходимо отметить, что в данной игре принцип максимина используется обоими игроками.

Игры, которые имеют седловую точку, решаются в чистых стратегиях и называются играми с полной информацией.

Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий.

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией.*

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков A и B соответственно

$$S_A = ||p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_m||,$$

$$S_B = ||q_1,\ q_2,\ \dots,\ q_n||,$$

где p_i - вероятность применения игроком A чистой стратегии A_i; $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$;

q_j - вероятность применения игроком B чистой стратегии B_j; $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна - единице, смешанная стратегия превращается в чистую.

Применение смешанных стратегий осуществляется таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными p_i и q_j.

Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A = ||p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_m||$, а игрок B смешанную стратегию $S_B = ||q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n||$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока A определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i \cdot q_j$$

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока B равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш v.

1.2.2 Решение матричной игры (2x2)

Пусть матричная игра имеет платежную матрицу

A_i \ B_j	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Предположим, что игра не имеет седловой точки, т.е. $\alpha \neq \beta$.

Игра имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = ||p_1,\ p_2||$ и $S_B = ||q_1,\ q_2||$, где вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям

$$p_1 + p_2 = 1; \qquad (1.2.1)$$

$$q_1 + q_2 = 1. \qquad (1.2.2)$$

Оптимальная смешанная стратегия обладает тем свойством, что обеспечивает игроку максимальный средний выигрыш, равный цене игры ν, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если тот не выходит за пределы своих активных стратегий. В частности, если игрок *A* использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок *B* - свою чистую активную стратегию B_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = \nu, \qquad (1.2.3)$$

а при использовании игроком *B* чистой активной стратегии B_2, выигрыш будет равен

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \nu. \qquad (1.2.4)$$

Уравнения (1.2.1), (1.2.3) и (1.2.4) образуют систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестным: p_1, p_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.5)$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.6)$$

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.7)$$

Если игрок *B* использует свою оптимальную смешанную стартегию, а игрок *A* - свою чистую активную стратегию A_1, то цена игры ν равна

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \nu, \qquad (1.2.8)$$

а при использовании игроком *A* чистой активной стратегии A_2, выигрыш будет равен

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \nu. \qquad (1.2.9)$$

Уравнения (1.2.2), (1.2.8) и (1.2.9) образует систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: q_1; q_2 и ν.

Решая ее, легко находим, что

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.10)$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.11)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}. \qquad (1.2.12)$$

Естественно, что в обоих случаях цена игры (выражения (1.2.7) и (1.2.12)) получилась одна и та же.

Чтобы соотношения (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7), (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) имели смысл, необходимо потребовать, чтобы

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} > 0; \\ a_{11} - a_{12} > 0; \\ a_{22} - a_{12} > 0; \\ a_{11} - a_{21} > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{22} - a_{21} < 0; \\ a_{11} - a_{12} < 0; \\ a_{22} - a_{12} < 0; \\ a_{11} - a_{21} < 0. \end{cases}$$

Тогда $0<p_1<1$; $0<p_2<1$; $0<q_1<1$; $0<q_2<1$.

Нетрудно заметить, что в этих неравенствах отражено предположение об отсутствии в рассматриваемой игре седловой точки. Действительно, ни один из четырех выигрышей a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} не может удовлетворить этим неравенствам, будучи минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце.

Решения системы уравнений (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7) и (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12), полученные алгебраическим методом, удобно получать и графическим методом (рисунок 1.2.2). Для нахождения вероятностей p_1, p_2 и цены игры v в прямоугольной системе координат по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, а по оси ординат - соответствующие этой вероятности - выигрыши игрока A.

При p_1=0, игрок A применяет чистую стратегию A_2. Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока A равен a_{21} (уравнение (1.2.3)), а если игрок B применяет чистую стратегию B_2, то выигрыш игрока A равен a_{22} (уравнение (1.2.4)). При p_1=1, игрок A применяет чистую стратегию A_1.

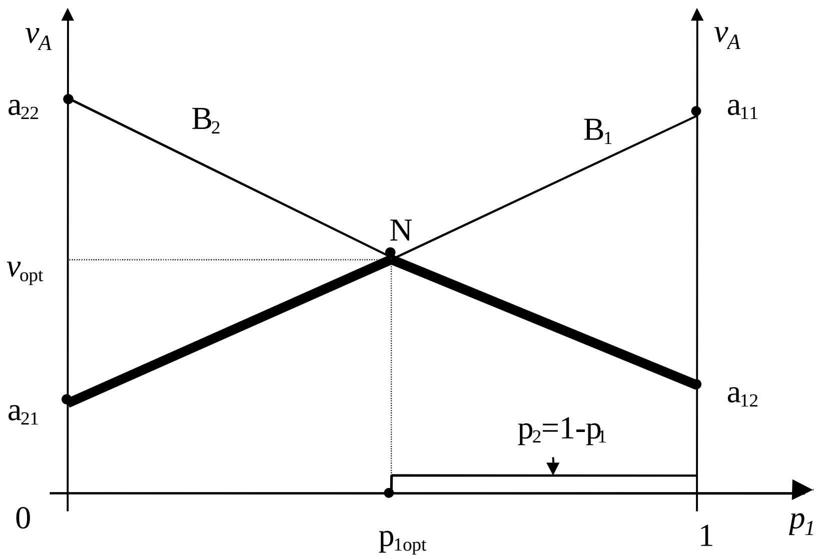

Рис. 1.2.2

Если при этом игрок B применяет чистую стратегию B_1, то выигрыш игрока A равен a_{11}, а при применении чистой стратегии B_2 - a_{12}. Так как значения p_1 лежат в пределах [0,1], то соединяя крайние точки для стратегий B_1 и B_2 (строя графики функций $v_A=(a_{11}-a_{21})p_1+a_{22}$ и $v_A=(a_{12}-a_{22})p_1+a_{22}$), получаем значения выигрышей игрока A для всех промежуточных значений p_1.

В соответствии с принципом максимина, игрок A должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его минимальный выигрыш максимален. Точка N пересечения отрезков прямых (рисунок 1.2.2) и определяет как оптимальную цену игры v_{opt}, так и оптимальные вероятности p_{1opt} и $p_{2opt}=1-p_{1opt}$, соответствующие оптимальной смешанной стратегии игрока A, т.е. дает решения системы уравнений (1.2.1), (1.2.3), (1.2.4).

Для графического решения системы уравнений (1.2.2), (1.2.8), (1.2.9) отложим по оси абсцисс вероятность $q_1 \in [0,1]$, а по оси ординат соответствующие этой вероятности выигрыши игрока B:

$$v_B=(a_{11}\text{-}a_{12})q_1+a_{12}; \qquad (1.2.13)$$

$$v_B=(a_{21}\text{-}a_{22})q_1+a_{22}. \qquad (1.2.14)$$

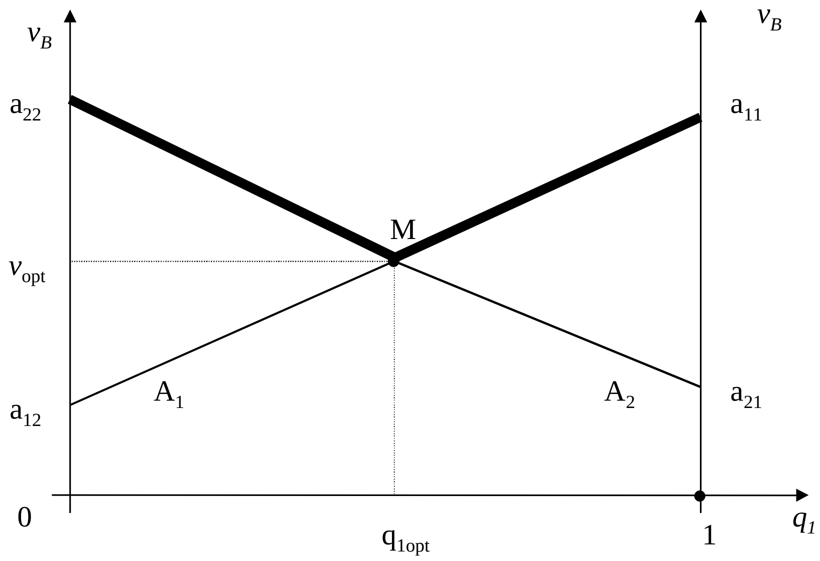

Рис. 1.2.3

Решением являются координат точки *M* пересечения прямых, описываемых уравнений (1.2.13) и (1.2.14): q_{1opt}; q_{2opt}=1-q_{1opt} и v_{opt}.

Это же следует и из принципа максимина, в соответствии с которым игрок *B* должен выбрать такую смешанную стратегию, при которой его максимальный проигрыш будет минимальным.

Для игры (2x2) с седловой точкой геометрическая интерпретация решения представлена на рисунке 1.2.4.

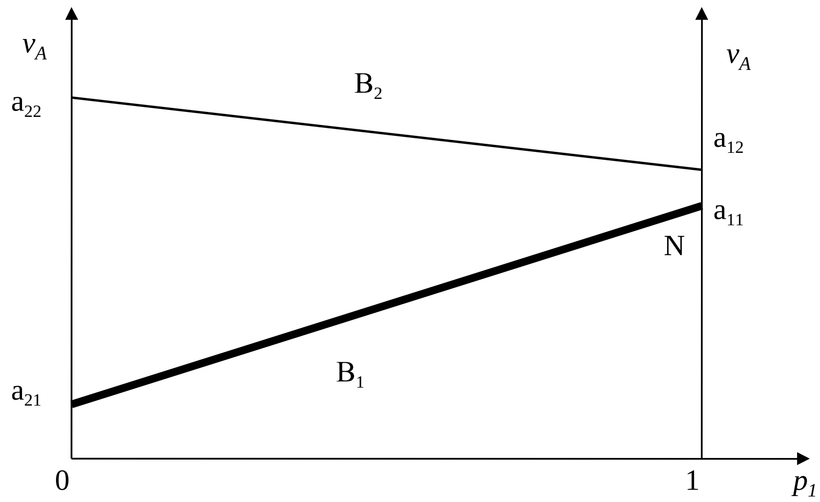

Рис. 1.2.4

Стратегия B_2 игрока B является для него явно невыгодной, так как, применяя ее, он в любой случае проигрывает больше, чем при применении стратегии B_1. В данной игре $p_{1opt}=1$; $p_{2opt}=0$; $v_{opt}=a_{11}$, т.е. игра имеет седловую точку N и решается в чистых стратегиях. Игрок A должен применять стратегию A_1, а игрок B - стратегию B_1.

На рисунке 1.2.5 показан случай, в котором решением игры для игрока A является чистая стратегия A_2, а для игрока B - стратегия B_1.

Игра имеет седловую точку N.

Пример 4. Найти алгебраическим и геометрическим методами решение игры, платежная матрица которой имеет вид

B_j / A_i	B_1	B_2	α_i
A_1	4	-2	-2
A_2	1	3	1
β_j	4	3	

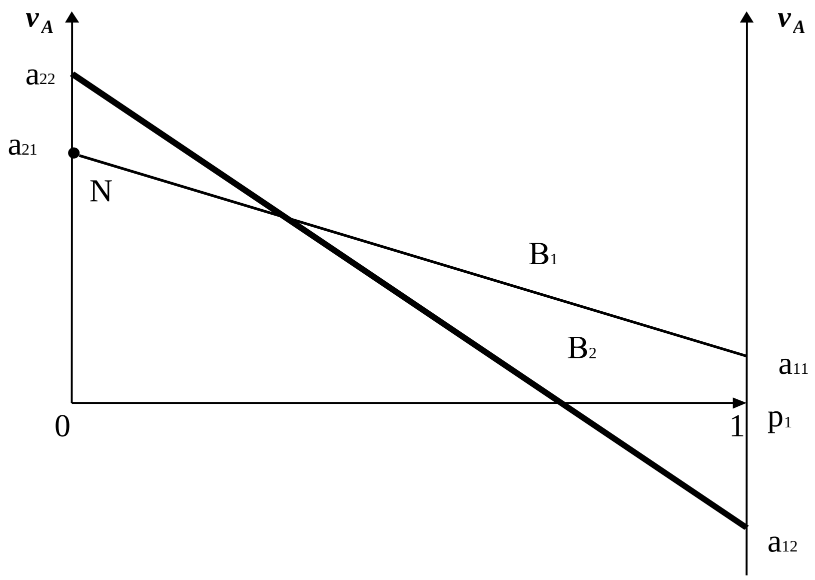

Рис. 1.2.5

В данной игре нижняя цена игры α=1 не равна верхней цены игры β=3, поэтому игра не имеет седловой точки и, в соответствии с основной теоремой матричных игр, имеет оптимальное решение в смешанных стратегиях.

Для игрока A, в соответствии с формулами (1.2.5) и (1.2.6), оптимальные вероятности применения стратегий A_1 и A_2 равны:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3-1}{4+3-1+2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4+2}{4+3-1+2} = \frac{3}{4}.$$

Для игрока B, в соответствии с формулами (1.2.10) и (1.2.11), оптимальные вероятности применения стратегий B_1 и B_2 равны:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{3+2}{4+3-1+2} = \frac{5}{8};$$

$$q_2 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A = \left\| \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\|$; $S_B = \left\| \frac{5}{8}; \frac{1}{8} \right\|$, а цена игры в соответствии с формулой (1.2.12) равна:

$$\nu = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{4 \cdot 3 - (-2) \cdot 1}{4+3-1+2} = \frac{7}{4}.$$

Так как ν>0, то игра выгодна для игрока A.

Графическое изображение игры для игрока A показана на рисунке 1.2.6.

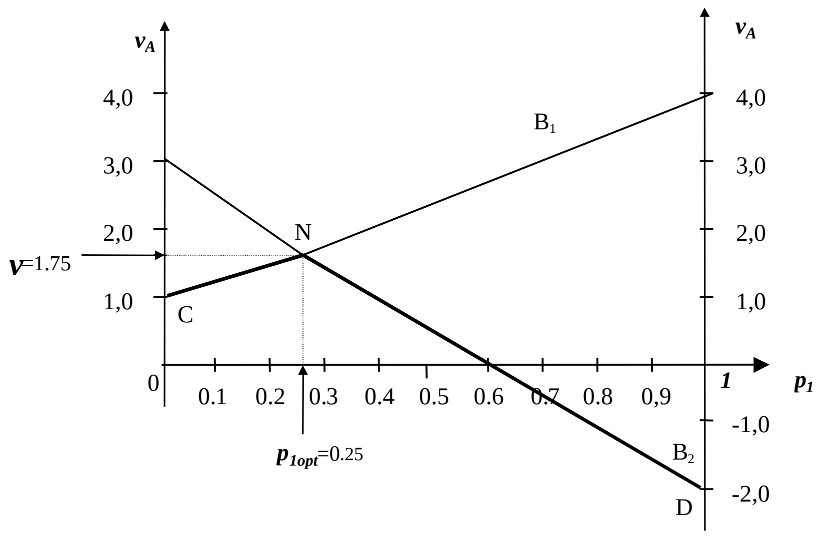

Рис. 1.2.6

Нижняя граница выигрыша игрока *A* определяется ломаной *CND*. Оптимальное решение, определяется точкой *N*, естественно, дает тоже решение, что и алгебраический метод: $S_A = \|0.25; 0.75\|, \quad v = 1.75$.

Геометрическое изображение игры для игрока *B* показано на рисунке 1.2.7.

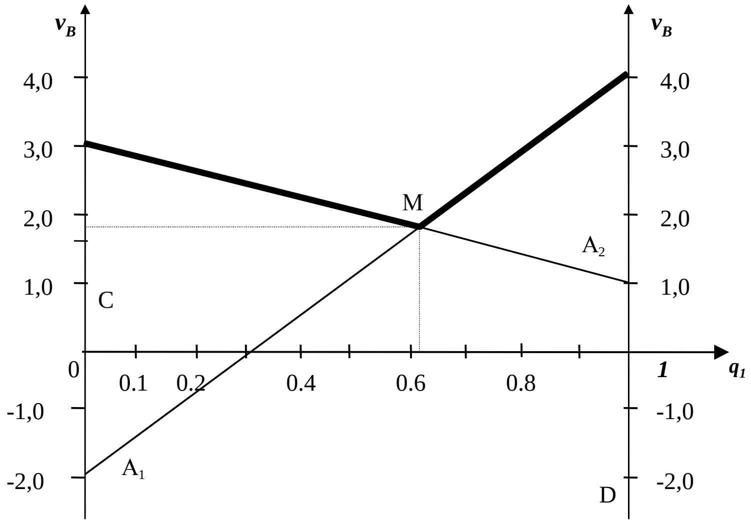

Рис. 1.2.7

Оптимальное решение, определяемое точкой *M*, дает решение $S_B = \|0.625; 0.375\|, \quad v = 1.75$.

1.3 Принятие решений в условиях неопределенности

1.3.1. Основные понятия

В рассмотренных выше матричных играх предполагалось, что в них принимают участие два игрока, интересы которых противоположны. Поэтому действия каждого игрока направлены на увеличение выигрыша (уменьшение проигрыша). Однако в некоторых задачах, приводящихся к игровым, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.)

Матричная игра, в которой игрок взаимодействует с окружающей средой, называется *статистической игрой* или «*игрой с природой*». Человек в играх с природой действует осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) – случайно. Игрок в этой игре называется лицом, принимающим решения (ЛПР).

Пусть S_i - состояние «природы», при этом $i=\overline{1,n}$, где n – число возможных состояний, R_j - множество управленческих решений (планов).

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческие решения) R_j, а столбцы – возможным состояниям «природы» S_i.

Предположим, каждому R_j-му действию и каждому возможному состоянию «природы» соответствует результат (исход), определяющий результат (выигрыш, полезность) при выборе j -го действия и реализации i-го состояния, - V_{ij}.

$$\begin{array}{c|cccccc} & S_1 & S_2 & \cdots & S_i & \cdots & S_n \\ \hline R_1 & V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1i} & \cdots & V_{1n} \\ R_2 & V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2i} & \cdots & V_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_j & V_{j1} & V_{j2} & \cdots & V_{ji} & \cdots & V_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_m & V_{m1} & V_{m2} & \cdots & V_{mi} & \cdots & V_{mn} \end{array} \qquad (1.3.1)$$

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{ji}\|$. В качестве результатов в отдельных задачах рассматривается матрица рисков $\|r_{ji}\|$.

Риск – мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ связаны с элементами матрицы полезностей (выигрышей) следующим соотношением:

$$r_{ji}=V_i-V_{ji}, \qquad (1.3.2)$$

где $V_i = \max_j V_{ji}$ - максимальный элемент в столбце i матрицы полезностей.

Если матрица возможных результатов $\|V_{ji}\|$ представляет собой матрицу потерь (затрат), то элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$ определяются по формуле

$$r_{ji} = V_{ji} - V_i, \tag{1.3.3}$$

где $V_i = \min_j V_{ji}$ - минимальный элемент в столбце i матрицы потерь (результатов).

Таким образом, риск – это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при j-й стратегии.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

1.3.2. Критерий Лапласа

Данный критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» S_i, $i = \overline{1, n}$, полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию S_i ставится вероятность q_i, определяемая по формуле

$$q_i = \frac{1}{n}. \tag{1.3.4}$$

При этом исходной может рассматриваться задача принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие R_j, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого действия R_j вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша:

$$M_j(R) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{ji}. \tag{1.3.5}$$

Среди $M_j(R)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии R_j.

Другими словами, находится действие R_j^*, соответствующее

$$\max_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}V_{ji}\right\}. \qquad (1.3.6)$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков $\|r_{ji}\|$, то критерий Лапласа принимает вид:

$$\min_{R_j}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}r_{ji}\right\}. \qquad (1.3.7)$$

Пример 1. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10, 15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам, либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Ниже приводится таблица, определяющая, возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей:

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Решение. Согласно условию задачи, имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: S_1, S_2, S_3, S_4. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: R_1, R_2, R_3, R_4. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре S_i и R_j заданы следующей матрицей (таблицей):

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	6	12	20	24
$V = R_2$	9	7	9	28
R_3	23	18	15	19
R_4	27	24	21	15

Принцип Лапласа предполагает, что S_1, S_2, S_3, S_4 равновероятны. Следовательно, $P\{S = S_i\} = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0,25,\ i = 1,2,3,4$ и ожидаемые затраты при различных действиях R_1, R_2, R_3, R_4 составляют

$$W\{R_1\} = 0,25 \cdot (6 + 12 + 20 + 24) = 15,5;$$
$$W\{R_2\} = 0,25 \cdot (9 + 7 + 9 + 28) = 13,25;$$
$$W\{R_3\} = 0,25 \cdot (23 + 18 + 15 + 19) = 18,75;$$
$$W\{R_4\} = 0,25 \cdot (27 + 24 + 21 + 15) = 21,75.$$

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет R_2.

1.3.3. Критерий Вальда (минимаксный или максимальный критерий)

Данный критерий основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий R_j.

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется минимаксный критерий. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т.е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \min_j \max_i \{V_{ji}\}. \qquad (1.3.8)$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат V_{ji} представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий*.

Для определения оптимальной стратегии R_j в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min_i \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j (строка j), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т.е. действие, определяющее результат, равный

$$W = \max_j \min_i \{V_{ji}\}.$$

(1.3.9)

Пример 2. Рассмотрим пример 1. Так как V_{ji} в этом примере представляет потери (затраты), применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в следующей таблице:

Состояние S_i / Стратегия R_j	Затраты, д.е. (V_{ji})				$\max_i \{V_{ji}\}$	$W=\min_j \max_i \{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	-
R_2	9	7	9	28	28	-
R_3	23	18	15	19	23	23
R_4	27	24	21	15	27	-

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья, т.е. R_3.

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

1.3.4 Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формулам (3.2.), (3.3.), которые перепишем в следующем виде:

$$r_{ji} = \begin{cases} \max\limits_{j}\{V_{ji}\} - V_{ji}, \; \textit{если} \;\; V - \textit{выигрыш} \\ V_{ji} - \min\limits_{j}\{V_{ji}\}, \; \textit{если} \;\; V - \textit{потери} \end{cases} \qquad (1.3.10)$$

Это означает, что r_{ji} есть разность между наилучшим значением в столбце i и значениями V_{ji} при том же i. Можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию R_j, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Пример 3. Рассмотрим пример 1. Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (1.3.10) вычислим элементы матрицы рисков $\|r_{ji}\|$

$$\|r_{ji}\| \quad \begin{array}{c|cccc} & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ \hline R_1 & 0 & 5 & 11 & 9 \\ R_2 & 3 & 0 & 0 & 13 \\ R_3 & 17 & 11 & 6 & 4 \\ R_4 & 21 & 17 & 12 & 0 \end{array}$$

Результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в следующей таблицы:

Состояние S_i / Стратегия R_j	Затраты, д.е. (V_{ji})				$\max\limits_{i}\{V_{ji}\}$	$W=\min\limits_{j}\max\limits_{i}\{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	-
R_3	17	11	6	19	17	-
R_4	21	17	12	0	21	-

Введение величины риска r_{ji} привело к выбору первой стратегии R_1, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большого проигрыша (потерь).

1.3.5 Критерий Гурвица

Критерий Гурвица основан на следующих двух предположениях: «природа» может находится в самом невыгодном состоянии с вероятностью (1-α) и в самом выгодном состоянии с вероятностью α, где α – коэффициент доверия. Если результат – прибыль, полезность, доход и т.п., то критерий Гурвица записывается так:

$$W = \max_j \left\lfloor \alpha \max_i V_{ji} + (1-\alpha)\min_i V_{ji} \right\rfloor \tag{1.3.11}$$

Когда r_{ji} представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее:

$$W_{\min} = \min_j \left\lfloor \alpha \min_i r_{ji} + (1-\alpha)\max_i V_{ji} \right\rfloor \tag{1.3.12}$$

Если $\alpha = 0$, получим пессимистический критерий Вальда.

Если $\alpha - 1$, то приходим к решающему правилу вида

$$\max_j \min_i V_{ji}$$

или к так называемой стратегии «здорового оптимиста», т.е. критерий слишком оптимистичный.

Критерий Гурвица устанавливает баланс между случаями крайнего пессимизма и крайнего оптимизма путем взвешивания обоих способов поведения соответствующими весами (1-α) и α, где 0< α <1. Значение α от 0 до 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решения, к пессимизму или к оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности α = 0,5 представляется наиболее разумной.

Пример 4. Критерий Гурвица используем в примере 1. Положим α = 0,5. Результаты необходимых вычислений приведены ниже:

W_j	$\min\limits_i V_{ji}$	$\max\limits_i V_{ji}$	$\alpha \min\limits_i V_{ji} + (1-\alpha) \max\limits_i V_{ji}$	$\min\limits_j V_{ji}$
W_1	6	24	15	15
W_2	7	28	17,5	-
W_3	15	23	19	-
W_4	15	27	21	-

Оптимальное решение заключается в выборе W_1.

Таким образом, в примере предстоит сделать выбор, какого из возможных решений предпочтительнее:

по критерию Лапласа – выбор стратегии R_2;

по критерию Вальда – выбор стратегии R_3;

по по критерию Сэвиджа – выбор стратегии R_i;

по критерию Гурвица при α = 0,5 – выбор стратегии R_1, а если лицо, принимающее решение, пессимист (α = 0), то выбор стратегии R_3.

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций.

Выбор критерия должно производить лицо, принимающее решение (ЛПР), с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии со своими целями, а также опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерии Вальда. Если, наоборот, определенный риск вполне приемлем и ЛПР намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом оно не сожалело, что вложено слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите седловую точку и максиминные стратегии игроков для следующих матричных игр:

1.

3	7	5
3	8	4
1	8	3
2	1	9

2.

3	6	1	8
3	4	4	9
6	8	5	9
7	2	3	5

3.

4	7	4	8	3
7	6	5	6	9
9	9	6	8	8
5	7	3	4	3
4	8	2	3	7

4.

5	9	7
5	10	6
3	10	5
4	3	11

5.

6	12	2	16
6	8	8	18
12	16	10	18
14	4	6	10

6.

7	13	3	17
7	9	9	19
15	17	11	19
15	5	7	11

7.

3	5	9
4	7	8
2	1	5

8.

3	5	6	4
4	8	4	3
6	8	5	5
2	7	4	2

9.

4	6
5	2
8	7
3	1

10.

1	3	8	4	2
8	5	5	9	11
8	3	6	7	2

2. Определите алгебраическим и геометрическим методами оптимальные решения следующих игр *2x2*:

1.

	B_1	B_2
A_1	5	2
A_2	-1	0

2.

	B_1	B_2
A_1	-3	-6
A_2	-4	-5

3.

	B_1	B_2
A_1	6	9
A_2	7	8

4.

	B_1	B_2
A_1	0	7
A_2	10	4

5.

	B_1	B_2
A_1	8	6
A_2	4	7

6.

	B_1	B_2
A_1	0	-1
A_2	-3	0

7.

	B_1	B_2
A_1	-10	-16
A_2	-12	-14

8.

	B_1	B_2
A_1	7	9
A_2	13	11

9.

	B_1	B_2
A_1	1	2
A_2	4	3

10.

	B_1	B_2
A_1	-3	-2
A_2	0	-2

11.

	B_1	B_2
A_1	0	2
A_2	3	1

12.

	B_1	B_2
A_1	-1	1
A_2	2	0

3. Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля R_j=(j=1,4). Определена экономическая эффективность V_U каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_U(i=1,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице (ден. ед.) Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии: Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при α=0,1. Сравните решение и сделайте выводы.

1.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

2.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	27	25	18
R_2	28	24	10
R_3	15	24	12
R_5	9	30	26

3.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	22	18
R_3	16	28	12
R_4	9	30	20

4.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	10
R_2	18	29	15
R_3	8	28	12
R_5	9	30	20

5.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	23	15
R_2	25	24	13
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

6.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	24	20	17
R_3	15	24	12
R_5	19	30	20

7.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	17
R_3	16	25	12
R_4	16	30	20

8.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	15	24	20
R_3	25	18	12
R_5	9	30	20

9.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	29	24	10
R_3	15	25	12
R_4	17	30	21

10.

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	18
R_2	25	24	10
R_3	15	26	12
R_5	13	30	20

ГЛАВА 2 ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ (СМО)

Это раздел теории вероятностей, который изучает потоки требований на обслуживание, поступающих в систему массового обслуживания, длительности ожидания, длины очередей и другие характеристики, определяемые потоком требований, зависимость этих характеристик от правил обслуживания.

2.1 Формулировка задачи и классификация СМО

В различных сферах деятельности человека, в промышленности, науке, торговле, быту, очень часто возникает *массовый спрос* на различные услуги. Термин «массовое» предполагает многократную повторяемость и статистическую устойчивость процесса в целом.

Непосредственное взаимодействие с клиентом, нацеленное на удовлетворение его спроса, называется *обслуживанием.*

Система, в которой, с одной стороны, возникают массовые требования на выполнения каких-либо видов услуг, а с другой стороны, происходит удовлетворение этих требований (обслуживание), называется *системой массового обслуживания* (СМО).

Примерами процессов массового обслуживания являются:

-обслуживание покупателей в сфере мелкооптовой и розничной торговли;

-транспортное обслуживание;

-работа телекоммуникационных сетей;

-медицинское обслуживание;

-гостиничный бизнес;

- обслуживание в бистро, кафе, ресторанах;

-обработка документов в системе управления;

-туристический бизнес и многое др.

Главной особенностью процессов массового обслуживания является случайность. Выделяются две взаимодействующие стороны, одна из которых обслуживает, а вторая выступает в качестве обслуживаемой. Присутствие случайности в поведении одной из сторон приводит к случайному протеканию всего процесса обслуживания. Причины случайности заключаются в массовом характере потребностей, а также в случайности работы обслуживающей системы.

Цель изучения СМО состоит в том, чтобы взять под контроль некоторые характеристики системы, установить зависимость между числом обслуживаемых единиц и качеством обслуживания. Качество обслуживания тем выше, чем больше число обслуживающих единиц. Но экономически невыгодно иметь лишние обслуживающие единицы.

В промышленности СМО применяются при поступлении сырья, материалов, комплектующих изделий на склад и выдаче их со склада; обработке широкой номенклатуры деталей на одном и том же оборудовании; организации наладки и ремонта оборудования; определении оптимальной численности обслуживающих отделов и служб предприятий и т.д.

Основными элементами СМО являются *источники заявок,* их *входящий поток, каналы обслуживания* и *выходящий поток.* Схематически это изображено на рис. 2.1.1.

Рис. 2.1.1

В каждую СМО поступает *входящий поток* заявок на обслуживание, результатом работы СМО является *выходящий поток* обслуженных заявок.

Множество упорядоченных во времени требований (заявок), поступающих в систему с целью получения определенных услуг, образуют *входящий поток требований. Выходящим потоком* является поток обслуженных и необслуженных требований, покидающих систему.

Если в СМО одновременно может обслуживаться несколько заявок, то СМО называется *многоканальной*, в противном случае – *одноканальной*.

Как одноканальные СМО, так и многоканальные СМО делятся на СМО *с отказами* и СМО *с очередью (ожиданием).*

В СМО *с отказами* заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, получает «отказ» в обслуживании и покидает СМО.

В СМО *с очередью* заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты, становится в очередь из заявок, ожидающих обслуживания. Как только один из каналов обслуживания освобождается, к обслуживанию принимается *одна из заявок*, стоящих в очереди.

СМО *с очередью* различаются *по принципу построения (дисциплине)* очереди. Принципом построения очереди называется схема, в соответствии с которой заявки из очереди выбираются на обслуживание. Чаще всего при этом используется:

1.*Случайный выбор* заявки из очереди;

2.Выбор заявки из очереди в зависимости от ее *приоритета*;

3.Выбор заявки из очереди в зависимости от *порядка* ее поступления в очередь.

СМО *с очередью* делятся также на СМО *с неограниченным ожиданием* и СМО *с ограниченным ожиданием*.

В СМО *с неограниченным ожиданием* каждая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена.

В СМО *с ограниченным ожиданием* на пребывание заявок в очереди накладываются различного рода ограничения. Эти ограничения могут касаться, например*, длины очереди, времени пребывания заявки в очереди, общего времени пребывания заявки в СМО*.

В зависимости от расположения источника требований системы могут быть разомкнутыми (источник заявок находится вне системы) и замкнутыми (источник находится в самой системе).

2.2 Простейший поток событий и его свойства

Рассмотрим в отдельности элементы СМО.

Входящий поток: на практике наиболее распространенным является *простейший поток заявок*, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последействия.

Стационарность характеризуется тем, что вероятность поступления определенного количества требований (заявок) в течение некоторого промежутка времени зависит только от длины этого промежутка.

Ординарность потока определяется невозможностью одновременного появления двух или более заявок.

Отсутствие последействия характеризуется тем, что поступление заявки не зависит от того, когда и сколько заявок поступило до этого момента.

В этом случае вероятность того, что число заявок, поступивших на обслуживание за промежуток времени t, равно k, определяется по закону Пуассона

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{2.2.1}$$

где λ — *интенсивность потока заявок,* т.е. среднее число заявок в единицу времени:

$$\lambda = 1/\bar{\tau}(\text{чел./мин, р/ч, автом./дн., квт/ч}) \tag{2.2.2}$$

где $\bar{\tau}$ — среднее значение интервала времени между двумя соседними заявками.

Для такого потока заявок время между двумя соседними заявками распределено экспоненциально с плотностью вероятности

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (2.2.3)$$

Случайное время ожидания в очереди начала обслуживания считают распределенным экспоненциально:

$$f(t) = \nu e^{-\nu t} \qquad (2.2.4)$$

где ν — *интенсивность движения очереди,* т.е. среднее число заявок, приходящих на обслуживание в единицу времени:

$$\nu = 1/\bar{t}_{оч} \qquad (2.2.5)$$

где $\bar{t}_{оч}$ — среднее значение времени ожидания в очереди.

Выходящий поток заявок связан с потоком обслуживания в канале, где длительность обслуживания $\bar{t}_{обс}$ является случайной величиной и часто подчиняется показательному закону распределения с плотностью

$$f(t_{обс}) = \mu e^{-\mu t} \qquad (2.2.6)$$

где μ — *интенсивность потока обслуживания,* т.е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени:

$$\mu = 1/\bar{t}_{обс}\ (\text{чел./мин, р./дн., кг/ч, докум./дн.}) \qquad (2.2.7)$$

где $\bar{t}_{обс}$ — среднее время обслуживания.

Важной характеристикой СМО, объединяющей λ и μ, является *интенсивность нагрузки*

$$\rho = \lambda/\mu \qquad (2.2.8)$$

Рассмотрим *n*-канальные разомкнутые СМО.

2.3 СМО с отказами

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с отказами и нашедшая все каналы занятыми, получает отказ и покидает систему *необслуженной*. Показателем качества обслуживания выступает *вероятность получения отказа.*

Важнейшими показателями эффективности СМО с отказами являются следующие параметры: *абсолютная пропускная способность системы* и *относительная пропускная способность системы*.

Абсолютной пропускной способностью СМО называется среднее число заявок, которое может обслужить система за единицу времени. *Относительной пропускной способностью* СМО называется средняя доля поступивших заявок, которое может обслужить система за единицу времени, к среднему числу заявок, поступивших в систему за это время.

Кроме того используются другие показатели эффективности СМО с отказами: Среднее число занятых каналов, среднее относительное время простоя системы, среднее относительное время простоя отдельного канала.

Предполагается, что все каналы доступны в равной степени всем заявкам, входящий поток является простейшим, длительность (время) обслуживания одной заявки ($t_{обс}$) распределена по показательному закону.

Формулы для расчета установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n} \rho^k /k! \quad (2.3.1)$$

2. Вероятность отказа в обслуживании, когда поступившая на обслуживание заявка найдет все каналы занятыми (k = n):

$$P_{отк} = P_n = P_0\rho^n/n! \quad (2.3.2)$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк} \quad (2.3.3)$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_3 = \rho P_{обс} \quad (2.3.4)$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$k_3 = \bar{n}_3/n \quad (2.3.5)$$

6. Абсолютная пропускная способность СМО:

$$A = \lambda P_{обс} \quad (2.3.6)$$

7. Относительная пропускная способность СМО:

$$q = \frac{1}{\rho+1} \quad (2.3.7)$$

8. Среднее время обслуживания заявки:

$$t_{обс} = \frac{1}{M} \quad (2.3.8)$$

2.4 СМО с неограниченным ожиданием

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему *с неограниченным ожиданием* и нашедшая все каналы занятыми, становится в очередь, ожидая освобождения одного из каналов.

В качестве показателей эффективности СМО *с неограниченным ожиданием* применяются следующие параметры:

Среднее число заявок в очереди;

Среднее число обслуживаемых заявок;

Среднее время ожидания заявки в очереди;

Среднее время обслуживания заявки.

Для таких систем характерно отсутствие отказа в обслуживании, т.е. $P_{\text{отк}} = 0$ и $P_{\text{обс}} = 1$.

Поскольку в СМО *с неограниченным ожиданием* каждая заявка, в конце концов, обслуживается, то для таких систем *абсолютная пропускная способность* совпадает *с интенсивностью входящего потока заявок*.

Для систем с ожиданием существует дисциплина очереди:

1) обслуживание в порядке очереди по принципу: "первым пришел — первым обслужен";

2) случайное неорганизованное обслуживание по принципу: "последний пришел — первым обслужен";

3) обслуживание с приоритетами по принципу: "генералы и полковники вне очереди".

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1/\sum_{k=0}^{n}(\rho^k/k!) + e^{n+1}/n!\,(n-\rho) \qquad (2.4.1)$$

Предполагается, что $\rho/n < 1$.

2. Вероятность занятости обслуживанием k заявок:

$$P_k = \frac{\rho^k P_0}{k!}, \quad 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n} \qquad (2.4.2)$$

3. Вероятность занятости обслуживанием всех каналов:

$$P_n = \frac{\rho^n P_0}{n!} \qquad (2.4.3)$$

4. Вероятность того, что заявка окажется в очереди:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 \qquad (2.4.4)$$

5. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0 \qquad (2.4.5)$$

6. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \bar{L}_{оч}/\lambda \qquad (2.4.6)$$

7. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{смо} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} \qquad (2.4.7)$$

8. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = \rho \qquad (2.4.8)$$

9. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_з = n - \bar{n}_з \qquad (2.4.9)$$

10. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_з = \bar{n}_з/n \qquad (2.4.10)$$

11. Среднее число заявок в СМО:

$$\bar{z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}_з \qquad (2.4.11)$$

2.5 СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди

Основные понятия

Заявка, поступившая в систему с *ожиданием и с ограниченной длиной очереди* и нашедшая все каналы и ограниченную очередь занятыми, покидает систему необслуженной.

У СМО *с ограниченным ожиданием* в качестве показателей эффективности используются как показатели эффективности СМО с отказами, так и показатели эффективности СМО с неограниченным ожиданием.

Ограничения на длину очереди могут быть из-за:

1) ограничения сверху времени пребывания заявки в очереди;

2) ограничения сверху длины очереди;

3) ограничения общего времени пребывания заявки в системе.

Формулы для установившегося режима

1. Вероятность простоя каналов обслуживания, когда нет заявок (k = 0):

$$P_0 = 1 : \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \left[1 - \left(\frac{\rho}{n} \right)^m \right] \right\} \tag{2.5.1}$$

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = \frac{\rho^{n+m}}{n! n^m} \cdot P_0 \tag{2.5.2}$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - P_{отк} \tag{2.5.3}$$

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = P_{обс} \cdot \lambda \tag{2.5.4}$$

5. Среднее число занятых каналов:

$$\bar{n}_3 = \frac{A}{\mu} \tag{2.5.5}$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n * n!} \cdot \frac{(\rho/n)^m (m + 1 - \frac{m\rho}{n})}{(1-\rho/n)^2} P_0 \tag{2.5.6}$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{\bar{L}_{оч}}{\lambda} \tag{2.5.7}$$

8. Среднее число заявок в системе:

$$\bar{z} = \bar{L}_{оч} + \bar{n}_з \tag{2.5.8}$$

9. Среднее время пребывания в системе:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{\bar{z}}{\lambda} \tag{2.5.9}$$

2.6 Примеры определения эффективности использования трудовых и производственных ресурсов в системах массового обслуживания

Рассмотрим задачу с использованием СМО с отказами.

Пример 1. В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в

ОТК и течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, что деталь пройдет ОТК не обслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P*_{обс} \geq 0{,}95$ (* — заданное значение $P_{обс}$).

РЕШЕНИЕ. По условию задачи λ = 24дет./ч = 0,4дет./мин, $\bar{t}_{обс}$ = 5 мин, тогда μ = 0,2, $\rho = \lambda / \mu = 2$.

1. Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_o = \frac{1}{2^0/0! + 2^1/1! + 2^2/2! + 2^3/3!} = \frac{1}{1+2+2+1{,}3} = 0{,}1587,$$

где *0!=1*

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = 2^3 \cdot 0{,}1587/3! = 0{,}21$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79$$

4. Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$$\bar{n}_з = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58$$

5. Доля каналов, занятых обслуживанием:

$$K_з = 1{,}58/3 = 0{,}526$$

6. Абсолютная пропускная способность:

$$A=0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316$$

При n=3 $P_{обс} = 0{,}79 \leq P*_{обс} = 0{,}95$. Произведя аналогичные расчеты для n=4, получим

$$P_0 = 0{,}14 \qquad P_{отк} = 0{,}093 \qquad P_{обс} = 0{,}907$$

Так как $P_{обс} = 0{,}907 \leq P*_{обс} = 0{,}95$ то, произведя расчеты для $n=5$, получим

$$P_0 = 0{,}137 \qquad P_{отк} = 0{,}035 \qquad P_{обс} = 0{,}965 \geq P*_{обс} = 0{,}95$$

Ответ. Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

Рассмотрим задачу с использованием СМО с неограниченным ожиданием.

Пример 2. Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров (n = 3) для обслуживания вкладчиков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью λ = 30 чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{\text{обс}}$ = 3 мин. Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

Решение. Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{\text{обс}}$ = 1/3 = 0,333, интенсивность нагрузки ρ = 1,5.

1. Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^0}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!} + \frac{1{,}5^4}{3!\,(3 - 1{,}5)}} = 0{,}210$$

2. Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!} 0{,}21 = 0{,}118$$

3. Вероятность очереди:

$$P_{оч} = \frac{1{,}5^4}{3!\,(3 - 1{,}5)} 0{,}21 = 0{,}118$$

4. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{1{,}5^4}{(3 - 1)!\,(3 - 1{,}5)^2} 0{,}21 = 0{,}236$$

5. Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}236}{0{,}5} = 0{,}472\,мин.$$

6. Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{смо} = 0{,}472 + 3 = 3{,}472\,мин.$$

7. Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{св} = 3 - 1{,}5 = 1{,}5$$

8. Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_з = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5$$

9. Среднее число посетителей в сберкассе:

$$\bar{z} = 0{,}236 + 1{,}5 = 1{,}736 \text{ чел.}$$

Ответ. Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

Рассмотрим задачу с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.

Пример 3. Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью λ = 6 машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами (m = 2). В магазине работают три фасовщика (n = 3), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{обс}$ = 4 ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.

Решение. Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$$\rho = \lambda/\mu = 6/3 = 2 \qquad \mu = 1/\bar{t}_{обс} = 1 \cdot 12/4 = 3 \text{ авт./дн.}$$

1. Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 \colon \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!\,(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0{,}128$$

причем 0! = 1,0.

2. Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{отк} = P_{n+m} = 0{,}128 \frac{2^{3+2}}{3!\,3^2} = 0{,}075$$

3. Вероятность обслуживания:

$$P_{обс} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925$$

Так как $P_{обс} = 0{,}925 < P^*_{обс} = 0{,}97$, произведем аналогичные вычисления для m = 3, получим

$$P_o = 0{,}122 \qquad P_{отк} = 0{,}048 \qquad P_{обс} = 0{,}952$$

Так как $P_{обс} = 0{,}952 < P^*_{обс} = 0{,}97$, примем m = 4.

Для этого случая

$$P_o = 0{,}12 \qquad P_{отк} = 0{,}028 \qquad P_{обс} = 0{,}972$$

0,972 > 0,97, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до m = 4. Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для n = 4, 5 и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных помещений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при P_0 = 0,12, $P_{\text{отк}}$ = 0,028, $P_{\text{обс}}$ = 0,972.

4. Абсолютная пропускная способность:

$$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832 \text{ авт./дн.}$$

5. Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$$\bar{n}_{зан} = 5{,}832/3 = 1{,}944$$

6. Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \frac{1 - (2/3)^4(4 + 1 - 4 \cdot 2/3)}{(1 - 2/3)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548$$

7. Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{оч} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \text{ } дн.$$

8. Среднее число машин в магазине:

$$\bar{z} = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492 \text{ } авт.$$

9. Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{смо} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \text{ } дн.$$

О т в е т . Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами (m = 4), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{\text{обс}}$ = 0,972.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие задачи в предположении, что поток поступающих заявок является простейшим и длительность обслуживания одной заявки распределена по показательному закону.

2.1. Ателье по ремонту бытовой техники имеет четырехканальную телефонную линию. Интенсивность потока входящих телефонных звонков составляет 0,4 вызовов в минуту. Средняя продолжительность разговора сотрудника ателье с клиентом по телефону равна 4 минутам. Найти: 1) вероятность того, что в телефонной линии занято ровно 3 канала; 2)вероятность того, что клиент не смог соединиться с ателье; 3)относительную пропускную способность этой СМО; 4)абсолютную пропускную способность этой СМО; 5) среднее число занятых каналов. Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.

2.2. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.

2.3. АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в с. Определить характеристики АТС как объекта СМО.

2.4. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.

2.5. В службе "Скорой помощи" поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин. Определить основные показатели работы службы "Скорой помощи" как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.

2.6. Салон-парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин. Определить среднюю длину очереди на обслуживание, считая ее неограниченной.

2.7. На автозаправочной станции установлены 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин. Определить характеристики работы автозаправочной станции как объекта СМО.

2.8. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин. Определить вероятность того, что клиент получит отказ, будет обслужен, а также среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 ч, и среднее число занятых мастеров.

2.9. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин. Определить вероятность того, что заявка получит отказ, среднее число занятых каналов, абсолютную пропускную способность АТС.

2.10. На автозаправочной станции (АЗС) имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю станцию. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин. Определить вероятность отказа, абсолютную пропускную способность АЗС, среднее число машин, ожидающих заправку, среднее время ожидания машины в очереди, среднее время пребывания машины на АЗС (включая обслуживание).

2.11. В небольшом магазине покупателей обслуживают два продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя — 4 мин. Интенсивность потока покупателей — 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит. Определить вероятность того, что пришедший в магазин покупатель покинет магазин необслуженным.

2.12. Железнодорожную станцию дачного поселка обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно пользуется железной дорогой, интенсивность потока пассажиров составляет 0,9 чел./мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин. Определить среднее число пассажиров у кассы и среднее время, затрачиваемое пассажиром на приобретение билета.

ЗАДАНИЯ ПО ТЕМЕ «СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ»

2.1. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют *A* контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет *B* изд./ ч. Среднее время на проверку одного изделия — *C* мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq D$.

Значения коэффициентов условия задачи

№ / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	4	5	6	3	5	4	2	3	5
B	20	22	25	30	18	28	24	14	16	26
C	7	6	5	8	6	4	3	5	6	7
D	0,97	0,98	0,96	0,97	0,98	0,96	0,98	0,97	0,96	0,98

2.2. Приходная касса городского района с временем работы *A* часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от *B* человек в день. В приходной кассе работают *C* операторов-кассиров. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет *D* мин.

Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

Значения коэффициентов условия задачи

№ / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	11	10	10	9	8	9	8	11	7	7
B	220	220	300	300	280	270	240	300	200	240
C	2	2	3	3	4	4	3	3	2	4
D	4	3	4	3	4	3	5	5	2	5

2.3. На АЗС установлено *A* колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка на *B* автомашин для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем *C* маш./ч. Среднее время заправки одной автомашины — *D* мин.

Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Значения коэффициентов условия задачи

№ / Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	3	2	3	3	2	4	3	2	3	3
B	2	3	1	3	3	2	4	2	2	2
C	15	10	20	30	25	20	35	15	20	30
D	2	3	4	3	2,5	3,5	3	2	2,5	3

ГЛАВА 3 НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1 Предмет теории управления запасами

Теория управления запасами объединяет в себе методы анализа задач регулирования запасов некоторого продукта при независимом спросе на этот продукт.

В задачах такого рода необходимо найти рациональное количество запаса, учитывая, что потери возникают как из-за неудовлетворенного спроса, так и из-за того, что продукт хранится на складе.

Проблема управления запасами возникает при рассмотрении разнообразных экономических объектов. Широко распространены задачи управления запасами при анализе розничной торговли. В этом случае рассматриваются запасы некоторого продукта в магазине. Обычно спрос считается случайной величиной с заданным распределением. Запас пополняется за счет доставки товара с оптовой базы по заявке магазина, причем время доставки может быть фиксированным или же является случайной величиной. Перед управляющим встает вопрос: когда подавать заявку на пополнение запаса, и какое количество товара требовать в заявке? На подобные вопросы отвечает теория управления запасами.

Управлять запасами, как уже говорилось, необходимо и на производственных объектах, где нужно определять рациональный уровень запасов сырья, инструментов и т.п. Чрезмерный запас в этом случае приводит к нерациональному использованию оборотных средств, требует значительных затрат на хранение и уход за ним. С другой стороны, нехватка сырья, материалов или инструментов вызывает перебои в производстве. Поэтому установление рационального количества запаса является средством, позволяющим, с одной стороны, ликвидировать ненужные запасы, а с другой стороны - обеспечить ритмичность производства.

Управление запасами заключается в установлении моментов и объемов заказов на их восполнение.

Совокупность правил, по которым принимаются такие решения, называется *стратегией (системой) управления запасами*.

Оптимальной стратегией считается та, которая обеспечивает минимум затрат по доведению продукции до потребителей.

Нахождение оптимальных стратегий составляет *предмет теории оптимального управления запасами*.

Основные стратегии управления запасами

Любая стратегия регулирования запасов призвана отвечать на два основных вопроса: когда заказывать очередную партию продукции, и сколько товара заказать?

Выделяют две основные стратегии регулирования запасов:

1) система с фиксированным размером заказа;

2) система с фиксированной периодичностью заказа.

Возникновение теории управления запасами можно связать с работами Ф. Эджуорта и Ф. Харриса, появившимися в конце XIX — начале XX века, в которых исследовалась простая оптимизационная модель для определения экономичного размера партии поставки для складской системы с постоянным равномерным расходом и периодическим поступлением хранимого продукта.

Определение 3.1.1. Запасом называется любой ресурс, который хранится для удовлетворения будущих нужд.

Примерами запасов могут стать полуфабрикаты, готовые изделия, материалы, различные товары, а также денежная наличность, находящаяся в хранилище.

Существуют причины, побуждающие фирмы создавать запасы:

1) дискретность поставок при непрерывном потреблении;

2) упущенная прибыль в случае отсутствия запаса;

3) случайные колебания:

а) спроса за период между поставками;

б) объема поставок;

в) длительности интервала между поставками;

4) предполагаемые изменения конъюнктуры:

а) сезонность спроса;

б) сезонность производства.

Существуют также причины, побуждающие предприятия стремиться к минимизации запасов на складах:

1) плата за хранение запаса;

2) физические потери при хранении;

3) моральный износ продукта.

После того как вы выполните задания, предлагаемые в этой главе, вы будете уметь формулировать и использовать для экономического анализа следующие понятия:

- запас;
- заказ;
- издержки выполнения заказа (издержки заказа);
- издержки хранения;
- упущенная прибыль (издержки дефицита);
- срок выполнения заказа;
- точка восстановления.

Модели

Существует проблема классификации имеющихся в наличии запасов. Для решения этой задачи используется методика административного наблюдения. Цель ее заключается в определении той части запасов фирмы, которая требует наибольшего внимания со стороны отдела снабжения. Для этого каждый компонент запасов рассматривается по двум параметрам:

1) его доля в общем количестве запасов фирмы;

2) его доля в общей стоимости запасов.

Рассмотрим основные понятия теории управления запасами

Издержки выполнения заказа (издержки заказа) — накладные расходы, связанные с оформлением заказа. В промышленном производстве такими издержками являются затраты на переналадку оборудования и подготовительные операции.

Издержки хранения — расходы, связанные с физическим содержанием товаров на складе, плюс возможные проценты на капитал, вложенный в запасы. Обычно они выражены в абсолютных единицах или в процентах от закупочной цены и связаны с определенным промежутком времени.

Упущенная прибыль (издержки дефицита) — издержки, связанные с неудовлетворенным спросом, возникающим из-за отсутствия продукта на складе.

Совокупные издержки за период представляют собой сумму издержек заказа, издержек хранения и упущенной прибыли. Иногда к ним прибавляются издержки на закупку товара.

Срок выполнения заказа — время с момента заказа до момента его выполнения.

Точка восстановления — уровень запаса, при котором делается новый заказ.

3.2 Типы моделей управления запасами

Несмотря на то, что любая модель управления запасами призвана отвечать на два основных вопроса (когда и сколько), имеется значительное число моделей, для построения которых используется разнообразный математический аппарат.

Такая ситуация объясняется различием исходных условий. Главным основанием для классификации моделей управления запасами является характер спроса на хранимую продукцию (напомним, что с точки зрения более общей градации сейчас мы рассматриваем лишь случаи с независимым спросом).

Итак, в зависимости от характера спроса модели управления запасами могут быть:

- детерминированными;
- вероятностными.

В свою очередь детерминированный спрос может быть статическим, когда интенсивность потребления не изменяется во времени, или динамическим, когда достоверный спрос с течением времени может изменяться.

Вероятностный спрос может быть стационарным, когда плотность вероятности спроса не изменяется во времени, и нестационарным, где функция плотности вероятности меняется в зависимости от времени. Приведенную классификацию поясняет рисунок 3.2.1.

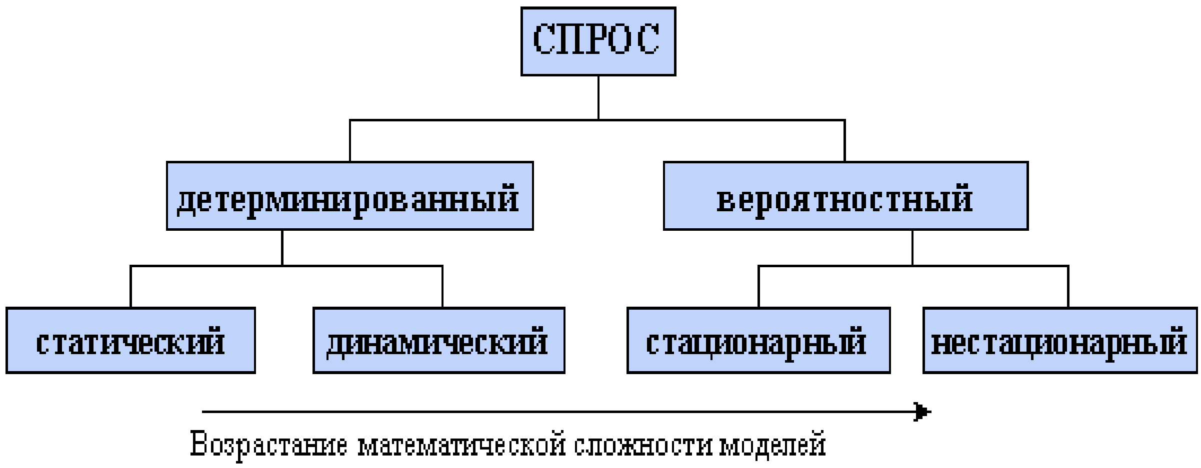

Рис. 3.2.1. Типы моделей управления запасами в зависимости от характера спроса

Наиболее простым является случай детерминированного статического спроса на продукцию. Однако такой вид потребления на практике встречается достаточно редко. Наиболее сложные модели - модели нестационарного типа.

Кроме характера спроса на продукцию при построении моделей управления запасами приходится учитывать множество других факторов, например:

- сроки выполнения заказов. Продолжительность заготовительного периода может быть постоянной либо являться случайной величиной;

- процесс пополнения запаса. Может быть мгновенным либо распределенным во времени;

- наличие ограничений по оборотным средствам, складской площади т.п.

3.3 Простейшие модели управления запасами

3.3.1 Детерминированные модели

1. Простейшая модель оптимального размера заказа

Предположим, что:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;

2) получение заказа мгновенно;

3) закупочная цена не зависит от размера заказа;

4) дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Размер заказа является постоянным. Заказ выполняется мгновенно. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает нулевого значения. В этот момент времени делается и мгновенно выполняется заказ и уровень запаса восстанавливается до максимального значения. При этом **оптимальным решением задачи** будет такой размер заказа, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения количества продукта S на складе показана на рисунке 3.3.1.

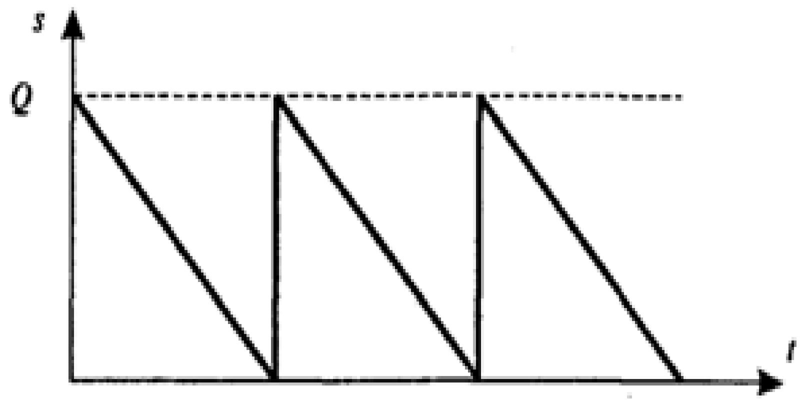

Рис. 3.3.1

Пусть Q — размер заказа; T — продолжительность периода планирования; D, d — величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K — издержки одного заказа; H, h — удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно. Тогда: $C_1 = \frac{D}{Q} \cdot K$ - издержки заказа за период планирования; $C_2 = \frac{Q}{2} \cdot H$ - издержки хранения за период планирования; $C = C_1 + C_2 = \frac{D}{Q} \cdot K + \frac{Q}{2} \cdot H$ - совокупные издержки.

Кривые издержек заказа C_1 издержек хранения C_2 и совокупных издержек C показаны на рисунке 3.3.2.

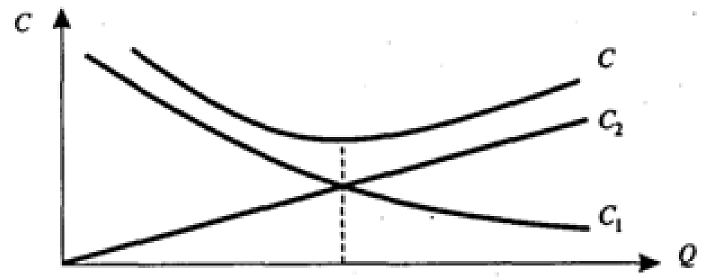

Рис.3.3.2.

Определив минимум функции совокупных издержек, получаем:

$Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h}} = \sqrt{\frac{2DK}{H}}$ — оптимальный размер заказа; $N = \frac{D}{Q^*}$ — оптимальное число заказов за период; $t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$ — время цикла (оптимальное время между заказами). Следует обратить внимание на то, что оптимальный размер заказа не зависит от цены продукта.

2. Модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения

Предположим, что:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;

2) время выполнения заказа известно и постоянно;

3) закупочная цена не зависит от размера заказа;

4) дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки. Размер заказа является постоянным. Время выполнения заказа постоянно. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью, пока не достигает точки восстановления *R*. В этот момент делается заказ, который выполняется за время *L*. К моменту поступления заказа размер запаса на складе равен нулю. **Оптимальным решением задачи** будет такой размер заказа *Q**, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек заказа.

Динамика изменения количества продукта *S* на складе показана на рисунке 3.3.3.

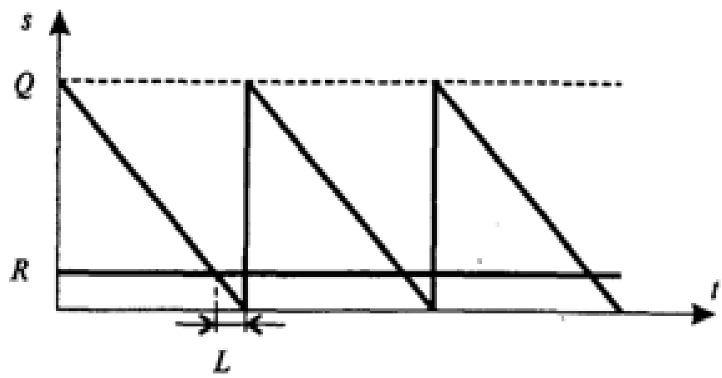

Рис.3.3.3

Пусть Q — размер заказа; T — продолжительность периода планирования; D, d — величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K — издержки одного заказа; H, h — удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно; L — время выполнения заказа. Тогда: $\frac{D}{Q}\cdot K$ — издержки заказа за период планирования; $\frac{Q}{2}\cdot H$ — издержки хранения за период планирования; $C=\frac{D}{Q}\cdot K+\frac{Q}{2}\cdot H$ — совокупные издержки; $Q^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}}=\sqrt{\frac{2DK}{H}}$ — оптимальный размер заказа; $R=dL$ — точка восстановления запаса; $N=\frac{D}{Q^*}$ — оптимальное число заказов за период; $t=\frac{Q^*}{d}=\frac{T}{N}$ — время цикла (оптимальное время между заказами).

Кривые издержек заказа C_1 издержек хранения C_2 и совокупных издержек C показаны на рисунке 3.3.2.

3. Модель оптимального размера заказа с производством

Предположим, что:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;
2) темп производства товара известен и постоянен;
3) время выполнения заказа известно и постоянно;
4) закупочная цена не зависит от размера заказа;
5) дефицит не допускается.

Исходные данные: темп спроса, темп производства, издержки заказа, издержки хранения, время выполнения заказа.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса. Фирма производит продукт самостоятельно, хранит его на складе и расходует с постоянным темпом. Если темп производства выше темпа спроса, то излишки продукта накапливаются на складе. Когда количество продукта на складе достигает максимального значения, производство прекращается и продукт расходуется со склада с постоянным темпом. Когда запас на складе достигает точки восстановления, производство возобновляется. При этом **Оптимальным решением задачи** будет такой размер заказа *Q*,* При котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения и издержек на возобновление (запуск) производства.

Динамика изменения количества продукта *S* на складе показана на рисунке 3.3.4, где $tg\alpha = P - D, \text{tg}\beta = \text{D}$.

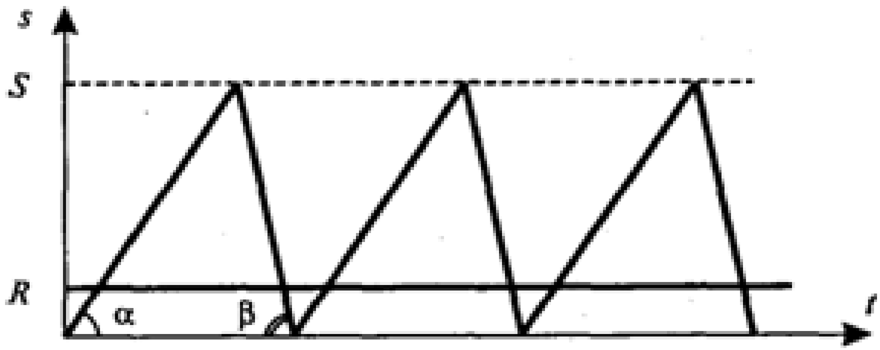

Рис.3.3.4

Пусть *Q* — размер заказа; *P* —темп производства;

T — продолжительность периода планирования; *D, d* — величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; *К* — фиксированные издержки на запуск производства; *H, h* — удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно; *L* — время, необходимое для запуска производства. Тогда: $\frac{D}{Q}\cdot K$ — издержки на запуск производства; $\frac{Q}{2}\cdot H(1-\frac{d}{p})$ — издержки хранения; $Q^* = \sqrt{\frac{2dK}{h(1-\frac{d}{p})}} = \sqrt{\frac{2DK}{H(1-\frac{d}{p})}}$ — оптимальный размер заказа; $S^* = Q^*(1-\frac{d}{p})$ — оптимальный максимальный уровень запасов; $R = dL$ — точка восстановления; $N = \frac{D}{Q^*}$ — оптимальное число заказов за период;

$t = \frac{Q^*}{d} = \frac{T}{N}$ — время цикла (оптимальное время между заказами).

В этой модели оптимальный размер заказа также не зависит от цены продукта.

4. Модель оптимального размера заказа с дефицитом

Предположим, что:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;

2) время выполнения заказа известно и постоянно;

3) закупочная цена не зависит от размера заказа.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, издержки дефицита.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, совокупные издержки. Размер заказа является постоянным. Уровень запасов убывает с постоянной интенсивностью. Допускается дефицит продукта. После получения заказа фирма компенсирует дефицит и восстанавливает запас продукта на складе. Заказ делается тогда, когда дефицит продукта на складе достигает оптимального размера. **Оптимальным решением задачи** будет такой размер заказа Q*, при котором минимизируются общие издержки за период, равные сумме издержек хранения, издержек заказа и издержек дефицита.

Динамика изменения количества продукта *S* на складе показана на рисунке 3.3.5.

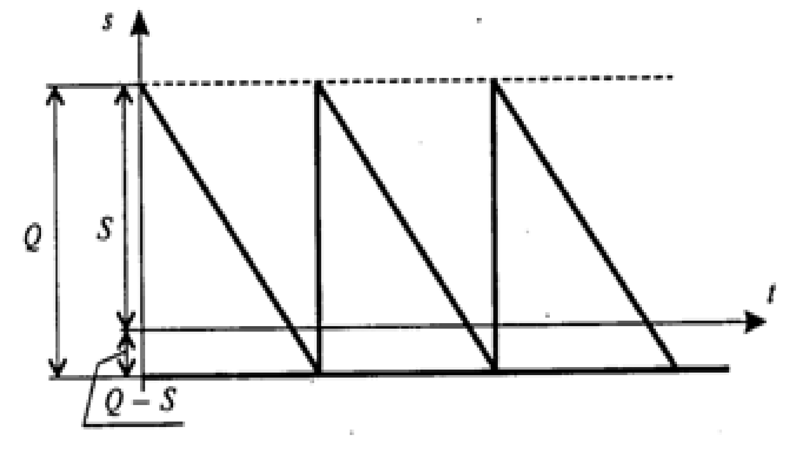

Рис.3.3.5

Пусть Q — размер заказа; T — продолжительность периода планирования; D, d — величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K — издержки одного заказа; H, h — удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно; B, b — упущенная прибыль, возникающая вследствие дефицита одной единицы продукта, за период и в единицу времени соответственно; S — максимальный запас продукции; L — время выполнения заказа. Тогда:

$\frac{D}{Q}\cdot K$ — издержки заказа за период планирования;

$\frac{(Q-S)^2}{2Q}\cdot B$ — издержки дефицита за период планирования;

$C=\frac{D}{Q}\cdot K+\frac{S^2}{2Q}\cdot H+\frac{(Q-S)^2}{2Q}\cdot B$ - совокупные издержки;

$Q^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}\cdot\frac{b+h}{b}}=\sqrt{\frac{2DK}{H}\cdot\frac{B+H}{B}}$ - оптимальный размер заказа;

$S^*=\sqrt{\frac{2dK}{h}\cdot\frac{b}{b+h}}=\sqrt{\frac{2DK}{H}\cdot\frac{B}{B+H}}$ - оптимальный максимальный размер запаса;

Q^*-S^* - оптимальный максимальный дефицит;

$R=dL$ — точка восстановления запаса.

5. Модель оптимального размера заказа с количественными скидками

Предположим, что:

1) темп спроса на товар известен и постоянен;

2) время выполнения заказа известно и постоянно.

Исходные данные: темп спроса, издержки заказа, издержки хранения, цена товара, количественные скидки в случае закупки крупных партий товара.

Результат: оптимальный размер заказа, время между заказами, точка восстановления запаса, количество заказов за фиксированный период времени, совокупные издержки.

Пусть Q — размер заказа; T — продолжительность периода планирования; D, d —величина спроса за период планирования и в единицу времени соответственно; K — издержки одного заказа; H, h — удельные издержки хранения за период и в единицу времени соответственно.

Предположим, что известны числа $c_i, a_i, \mathrm{i}=1,...,\mathrm{n}$, где c_i — цена продукта при размере заказа Q в интервале $a_{i-1} < Q < a_i$. Будем считать, что $a_0 = 0, a_n = \infty$.

Тогда: $\frac{D}{Q} \cdot K$ — издержки заказа за период планирования; $\frac{Q}{2} \cdot H$ — издержки хранения за период планирования; $c_i \cdot D$ - издержки на закупку товара.

$$C_i = \frac{D}{Q} \cdot K + \frac{Q}{2} \cdot H + c_i \cdot D$$

Оптимальный размер заказа определяется в результате решения n задач. Каждая из этих задач сводится к определению такого размера заказа $Q_i, \mathrm{i}=1,...,\mathrm{n}$, при котором функция совокупных (общих) издержек $C_i = \frac{D}{Q} \cdot K + \frac{Q}{2} \cdot H + c_i \cdot D$ достигает минимума при ограничениях $a_{i-1} \le Q_i \le a_i$.

Решение исходной задачи определяется из условия $Q^* = \arg\min\limits_{\mathrm{i}} \min\limits_{\mathrm{Q_i}} \{C_i(Q_i)\}$.

На рисунке 3.3.6 изображены функции совокупных издержек для трех значений цен продукта. Значение цены C_1 определено на интервале $0 < Q < a_1$, цены C_2 — на интервале $a_1 < Q < a_2$, цены C_3 — на интервале $a_2 < Q < \infty$.

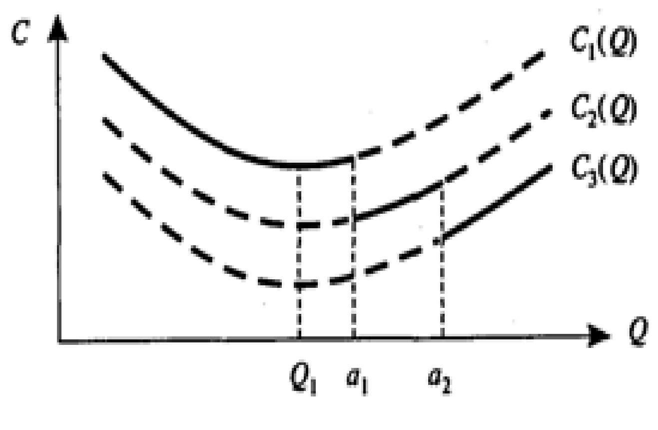

Рис. 3.3.6

Соответственно, функция общих издержек $C_1(Q)$ определена при значении цены C_1 на интервале $0<Q<a_1$, функция $C_2(Q)$ — при значении цены C_2 — на интервале $a_1<Q<a_2$, функция $C_3(Q)$ — при значении цены C_3 — на интервале $a_2<Q<\infty$. Минимальное значение функции $C_1(Q)$ в области ее допустимых значений достигается в точке Q_1, функции $C_2(Q)$ — в точке a_1, функции $C_3(Q)$ — в точке a_2. Оптимальный размер заказа следует выбирать из величин Q_1, a_1 и a_2 по формуле $Q^* = \arg\min\{C_1(Q_1), C_2(a_2), C_3(a_3)\}$.

3.3.2 Стохастическая модель

1. Дискретная стохастическая модель оптимизации начального запаса

Мы отказываемся от предположения о постоянстве и детерминированности величины спроса на товар и предполагаем известным распределение величины спроса.

Пусть S — размер запаса на начало периода планирования; D — величина спроса за период планирования (целое число); H — удельные издержки хранения за период; B — удельные издержки дефицита за период; $P(D)$— вероятность того, что величина спроса за период планирования составит D.

Функция распределения величины спроса $F(X)=P(D<x)=\sum_{D=0}^{x-1} p(D)$. В случае когда величина спроса за период планирования превышает размер запаса $(D > S)$, возникает дефицит и соответствующие издержки дефицита. Если запас больше, чем величина спроса ($S>D$), то возникают издержки хранения. Математическое ожидание $C_1(S)$ величины издержек хранения за период планирования для размера начального запаса S можно оценить следующим образом:

$$C_1(S)=H\sum_{D=0}^{S}(S-D)\cdot p(D).$$

Математическое ожидание $C_2(S)$ величины издержек дефицита за период планирования для размера начального запаса *S* можно оценить следующим образом:

$$C_2(S) = B\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S)\cdot p(D)\,.$$

Математическое ожидание *C(S)* совокупных издержек в этом случае имеет вид

$$C(S) = C_1(S) + C_2(S)\,.$$

В стохастической модели **оптимальным** является такой размер начального запаса *S**, при котором математическое ожидание совокупных издержек *C(S*)* имеет минимальное значение, т. е. такой размер запаса *S**, который удовлетворяет условию

$$F(S^*) < \frac{B}{H+B} < F(S^*+1)\,.$$

Если $F(S^*) = \dfrac{B}{H+B}$, тт $C(S^*) = C(S^*+1)$ и оптимальными являются как размер запаса S^*, так и размер запаса S^*+1.

Пример 1. Поставка товара с фиксированным интервалом времени.

Магазин «Лада» закупает духи «Ландыш» на одной из парфюмерных фабрик. Годовой спрос на этот продукт составляет 600 шт. Издержки заказа равны 850 руб., издержки хранения — 510 руб. за одну упаковку (20 шт.) в год. Магазин заключил договор на поставку с фиксированным интервалом времени.

Количество рабочих дней в году — 300. Время поставки товара — б дней. Стоимость одного флакона — 135 руб.

Найти. 1. Чему равно оптимальное число заказов в течение года? 2. Чему равна точка восстановления запаса? 3. Каковы минимальные совокупные издержки?

Решение. Оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\dfrac{2DK}{H}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 600\cdot 850}{25{,}5}} = 200$ шт.

Число заказов в течение года $N = \dfrac{D}{Q^*} = \dfrac{600}{200} = 3.$ Поскольку среднесуточный спрос равен $\dfrac{600}{300} = 2$ шт., точка восстановления запаса составит $2\cdot 6 = 12$

шт. Минимальные издержки заказа и хранения $C = \frac{D}{Q} \cdot K + \frac{Q}{2} \cdot H = 3 \cdot 850 + 100 \cdot 25{,}5 = 5100$ руб.

Ответы: 1.3. 2.12шт. 3.5100руб.

Пример 2. Производство деталей.

На первом станке производятся детали в количестве 12 000 единиц в год. Эти детали используются для производства продукции на втором станке производительностью 3600 единиц в год. Оставшиеся детали образуют запас. Издержки хранения составляют 0,5 руб. за одну деталь в год. Стоимость производственного цикла на первом станке равна 800 руб. Определите оптимальный размер партии на первом станке.

Решение. Оптимальный размер партии $Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H(1-\frac{d}{p})}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3600 \cdot 800}{0{,}5(1-\frac{3600}{12000})}} = 4056{,}7$ шт.

Пример 3. Планирование дефицита.

Вернемся к примеру 1 и рассмотрим вариант планирования дефицита. Допустим, по оценке менеджера, упущенная прибыль, связанная с отсутствием товара и утратой доверия клиентов, составляет 20 руб. в год за один флакон духов «Ландыш» при условии, что издержки заказа и хранения остаются без изменения. Определите оптимальный размер заказа при плановом дефиците. Нужно ли менеджеру вводить систему с плановым дефицитом?

Решение. Оптимальный размер заказа $Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{H} \cdot \frac{B+H}{B}} = 200 \cdot 1{,}5 = 300$ шт. Максимальный размер запаса за один цикл

$$S^* = \sqrt{\frac{2DK}{H} \cdot \frac{B}{B+H}} = 200 \cdot 0{,}66 = 132 \text{ шт.}$$

Совокупные издержки

$$C = \frac{D}{Q} \cdot K + \frac{S^2}{2Q} \cdot H + \frac{(Q-S)^2}{2Q} \cdot B = 1700 + 740{,}5 + 940{,}8 = 3381{,}3 \text{ руб.}$$

Совокупные издержки при плановом дефиците меньше издержек без дефицита на 1718,7 руб. Следовательно, целесообразно ввести систему с плановым дефицитом.

Пример 4. Продажи со скидками.

Магазин «Медвежонок» продает игрушечные гоночные машинки. В зависимости от размера заказа фирма предлагает скидки:

Вариант скидки	1	2	3
Размер заказа, шт.	0+1000	1000+2000	Более 2000
Размер скидки, %	0	4	5
Цена со скидкой, руб.	5,00	4,80	4,75

Издержки заказа составляют 49 руб. Годовой спрос на машинки равен 5000. Годовые издержки хранения в процентном отношении к цене составляют 20%. Найдите размер заказа, минимизирующий общие издержки.

Решение. Рассчитаем Q^* для каждого вида скидок: $Q_1^* = 700$, $Q_2^* = 714$, $Q_3^* = 718$.

Так как Q_1^* находится в интервале между 0 и 1000, то его необходимо взять равным 700. Оптимальный объем со скидкой Q_2^*. Меньше количества, необходимого для получения скидки, следовательно, его необходимо принять равным 1000 единиц. Аналогично Q_3^* берем равным 2000 единиц.

Получим: $Q_1^* = 700$, $Q_2^* = 1000$, $Q_3^* = 2000$. Далее необходимо рассчитать общие издержки для каждого размера заказа и вида скидок, а затем выбрать наименьшее значение. Расчеты приведены в следующей таблице:

Вариант скидки	1	2	3
Цена со скидкой, руб.	5,00	4,80	4,75
Размер заказа, шт.	700	1000	2000
Стоимость товара за год, руб.	25000	24000	23750
Годовые издержки заказа, руб.	350,0	245,0	122,5
Годовые издержки хранения, руб.	350	480	950
Общие годовые издержки, руб.	25700,0	24725,0	24822,5

Выберем тот размер заказа, который минимизирует общие годовые издержки. Из таблицы видно, что заказ в размере 1000 игрушечных машинок будет минимизировать совокупные издержки.

Пример 5. Создание запаса продукции при дискретном спросе.

Небольшой салон специализируется на продаже видеомагнитофонов стоимостью 2000 руб. Затраты на хранение единицы продукции составляют 500 руб. Изучение спроса, проведенное в течение месяца, дало следующее распределение числа покупаемых видеомагнитофонов:

Спрос, шт.	3	4	5	6	7
вероятность	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найдите оптимальный размер запаса.

Решение. Доказано, что при дискретном случайном спросе суммарные затраты

$C\ (S) = H\sum_{D=0}^{S}(S-D)\cdot p(D) + B\sum_{D=S+1}^{\infty}(D-S)\cdot p(D)$. Минимальны при размере запаса $S*$, удовлетворяющем неравенству $F(S^*) < \frac{B}{H+B} < F(S^*+1)$, где $\frac{B}{B+H} = \rho$ — плотность убытков, $F(S) = P(D < S)$ — функция распределения величины спроса. Вычислим плотность убытков: $\frac{B}{B+H} = \rho = \frac{2000}{2500} = 0{,}8$.

Найдем значения функции распределения величины спроса:

Запас, шт.	3	4	5	6	7	Более 7
Спрос, шт.	3	4	5	6	7	Более 7
$F(S)$	0,0	0,1	0,3	0,6	0,9	1,0

Оптимальный размер запаса продукции удовлетворяет неравенству $F(6) < 0{,}8 < F(7)$. Следовательно, размер запаса в 6 единиц будет оптимальным.

УПРАЖНЕНИЯ

1. В течение 10 дней наблюдалось следующее изменение запасов: первоначальный запас равен нулю, в следующие двое суток товары поступали на склад непрерывно и равномерно по 500 шт. в день, расходования запасов не происходило; в следующие четыре дня спрос на имеющиеся в запасе товары был непрерывным и равномерным и равнялся 250 шт. в день, пополнения запасов не происходило; в следующие четыре дня потребность в товарах изменилась до 200 шт. в день, с целью удовлетворения спроса и пополнения запасов ежедневно на склад доставлялось 300 шт. (поставки на склад и со склада происходили равномерно и непрерывно). Нарисуйте график изменения запасов для 10-дневного периода, определите величину запасов на складе к концу периода. Вычислите средний уровень запасов для всего периода.

2. Фирме по строительству судов требуется 20000 заклепок в год, расходуемых с постоянной интенсивностью. Организационные издержки составляют 0,5 тыс. р. за партию, цена одной заклепки — 10 р. Издержки на хранение одной заклепки оценены в 12,5% ее стоимости. Найти оптимальный размер партии поставки, оптимальную продолжительность цикла и оптимальное число поставок за год.

3. Известно, что издержки выполнения заказа — 2 ден. ед., количество товара, реализованного за год, — 1000 шт., закупочная цена единицы товара — 5 ден. ед., издержки хранения — 20% от закупочной цены. Определить наиболее оптимальный размер заказа.

4. Система управления запасами некоторого товара подчиняется основной модели. Каждый год с постоянной интенсивностью спрос составляет 15000 ед. товара, издержки на организацию поставки составляют 10 р. на партию, цена единицы товара — 30 р., а издержки на ее хранение — 7,5 р. в год. Найти оптимальный размер партии, число поставок, продолжительность цикла.

5. Интенсивность равномерного спроса — 2000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии — 20 тыс. р., цена единицы товара — 1 тыс. р., издержки содержания запаса — 100 р. за единицу товара в год. Найти оптимальный размер партии, предполагая, что система описывается основной моделью.

6. Предприниматель имеет стабильный месячный спрос на товар в количестве 50 ед. Товар он покупает у поставщика по цене 6 ден. ед. за штуку, причем издержки на оформление поставки и другие подготовительные операции составляют в каждом случае 10 ден. ед. Как часто предприниматель должен пополнять свой запас товаров, если затраты на хранение равны 20% цены товара?

7. Фирма вместо оптимального значения партии товара Q в основной модели поставок заказала на 50% больше. На сколько изменятся общие издержки на содержание запасов и организацию поставок по сравнению с оптимальным вариантом поставок товара?

8. Фирма вместо оптимального значения партии товара Q в основной модели поставок заказала на 50% меньше. На сколько изменятся общие издержки на содержание запасов и организацию поставок по сравнению с оптимальным вариантом поставок товара?

9. Известно, что издержки выполнения заказа равны 10 ден. ед., годовой спрос на товар — 1470 т, оптимальный размер партии поставки — 35 т. Определить годовые затраты на выполнение заказа.

10. Пользующийся спросом товар продается со средней скоростью 45 ед. в день, а производится со скоростью 450 ед. в день. Затраты на организацию и доставку товара составляют 5 тыс. р. за партию, издержки хранения запасов равны 20% стоимости товара. Стоимость товара складывается следующим образом: заработная плата обслуживающего персонала составляет 0,4, расходы на материалы — 0,5, накладные расходы — 0,6 (р. за единицу товара, для каждой единицы товара эти значения суммируются). Найти оптимальный размер партии и минимальные общие затраты, связанные с образованием запаса (в расчете на единицу товара в течение года). В году — 300 рабочих дней.

11. Интенсивность спроса в модели производственных поставок составляет четверть скорости производства, которая равна 20000 ед. товара в год. Организационные издержки для одной партии равны 150 р., а издержки хранения единицы товара в течение года — 5р. Определить оптимальный размер партии.

12. Система управления запасами описывается моделью производственных запасов. Спрос товара — 1500 шт. в год, цена — 200 р., издержки товара в течение года — 20 р., организационные издержки — 1000 р. В течение года может быть произведено 4500 шт. товара при полной загрузке производственной линии. Нарисуйте график изменения запасов, вычислите оптимальный размер партии, продолжительность поставки, продолжительность цикла и средний уровень запасов.

13. Фирма, выступающая в качестве посредника, обязуется поставлять заводу по производству двигателей 5 коленчатых валов в день. Руководство фирмы решает доставлять коленчатые валы на свой склад партиями, причем в каждой содержится 150 шт. и они рассчитаны на 30-дневный срок. За один просроченный день в поставке коленчатого вала заводу фирма выплачивает штраф 200 р. Издержки хранения одного коленчатого вала были оценены в 250 р. за неделю, организационными затратами можно пренебречь. Найти оптимальный уровень запасов и продолжительность соответствующего ему периода дефицита. Вычислите уменьшение затрат при оптимальной политике управления запасами по сравнению с политикой, когда в начале каждого периода на склад поступает 150 коленчатых валов.

14. Андрей, торговый агент компании Volvo, занимается продажей последней модели этой марки автомобиля. Годовой спрос на эту модель оценивается в 4000 единиц. Цена каждого автомобиля равна 90 тыс. руб., а годовые издержки хранения составляют 10% от цены самого автомобиля. Анализ показал, что средние издержки заказа составляют 25 тыс руб. на заказ. Время выполнения заказа – 8 дней. Ежедневный спрос на автомобили равен 20. Чему равны оптимальный размер заказа, точка восстановления, совокупные издержки, оптимальное количество заказав в год.

15. Мистер Бобров приобретает в течение года 1500 телевизоров для розничной продажи в своем магазине. Издержки хранения каждого телевизора равны 45 руб. в год. Издержки заказа — 150 руб. Количество рабочих дней в году равно 300, время выполнения заказа — 6 дней. Каков оптимальный размер заказа? Чему равны годовые издержки заказа? Чему равна точка восстановления запаса?

16. Анна Васильева из компании «Сюрприз» продает 400 водяных кроватей в год, причем издержки хранения равны 1 тыс. руб. за кровать в день, а издержки заказа — 40 тыс. руб. Количество рабочих дней равно 250, время выполнения заказа — 6 дней. Каков оптимальный размер заказа? Чему равна точка восстановления запаса? Каков оптимальный размер заказа, если издержки хранения равны 1,5 тыс. руб.?

17. Мекки Мессер владеет маленькой компанией, которая выпускает электрические ножи. В среднем она может производить 150 ножей в день. Дневной спрос на ножи примерно равен 40 шт. Фиксированные издержки производства составляют 100 руб., издержки хранения — 8 руб. за нож в год. В году 250 рабочих дней. Каков оптимальный размер производственного заказа? Чему равны издержки хранения? Чему равны совокупные издержки за год?

18. Годовой заказ на тостер «Слава» для магазина Марии Монеты — 3000 единиц, или 10 единиц в день. Издержки заказа равны 25 руб., издержки хранения — 0,4 руб. в день. Так как тостер «Слава» очень популярен, то в случае отсутствия товара покупатели обычно согласны подождать, пока не поступит следующая партия товара. Однако издержки вследствие дефицита равны 0,75 руб. за тостер в день. Сколько тостеров будет заказывать Мария? Каков максимальный дефицит? Чему равны совокупные издержки?

19. Мебельный салон «Антик» продает в год около 1000 спальных гарнитуров по цене 50 тыс. руб. Размещение одного заказа на поставку гарнитуров обходится в 40 тыс. руб. Годовая стоимость хранения гарнитура составляет 25% его цены. Салон может получить у поставщика скидку в 3%, если размер заказа составит не менее 200 гарнитуров. Следует ли салону воспользоваться этой скидкой?

20. Магазин «Все для дома» закупает линолеум размером $2 \times 3\,м^2$ в компании «Химические товары». В зависимости от размера заказа компания предлагает следующие скидки:

Размер заказа	9 кусков или менее	10-50 кусков	50 кусков и более
Цена 1 куска, тыс. руб.	18	17,5	17,25

Издержки заказа равны 45 тыс. руб. Годовые издержки хранения составляют 50% от закупочной цены, годовой спрос на линолеум равен 100 кускам. Определите оптимальный размер заказа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. – М.: Высш. шк., 2001. – 425с.
3. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, 1985. – 272 с.
4. Гармаш А.Н., Орлова И.В. Математические методы в управлении: Учеб. пособие. – М.: Вузовский учебник: ИНФРА-М, 2013. – 272с.
5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш., 2005. – 342с.
6. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: КомКнига, 2005. – 141с.
7. Красс М.С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов: Учебник для экономических вузов. - Санкт-Петербург: Питер, 2005. – 464 с.
8. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник. – 3-е изд. – М.: 2007. – 479 с.
9. Шелобаев С.И. Математические методы и модели. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 323с.
10. Фролова Г.Н. Математическая статистика. – Благовещенск: ДальГАУ, 2013. – 103с.

СОДЕРЖАНИЕ

Фролова Галина Николаевна,
Митрохина Олеся Павловна,
Подолько Евгения Александровна

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТЫ ПЛАНИРОВАНИЯ

Учебно-методическое пособие
для подготовки магистров

В редакции составителей

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 13.01.2015 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 3,2. Усл.-п.л. – 4,5.
Тираж 100 экз. Заказ 8.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86