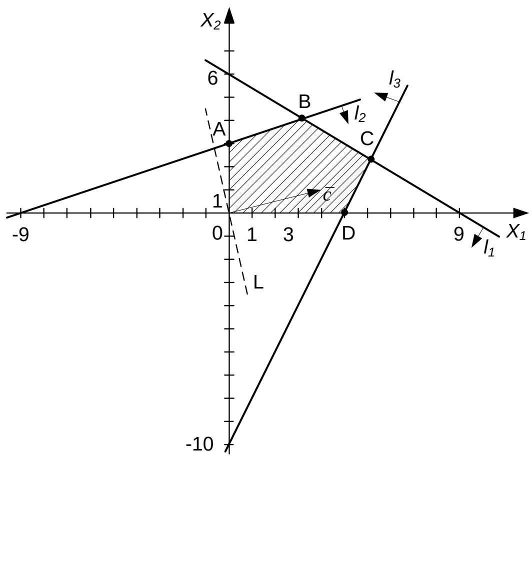
МИНИСТЕРСВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Е.А. Подолько

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

Учебное пособие для направлений бакалавриата



**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2015**

УДК 519.8 (075.8)
ББК 22.18

Подолько, Е.А. Сборник заданий по дисциплине «Методы оптимальных решений»: учебное пособие / сост. Е.А. Подолько. – Благовещенск: ДальГАУ, 2015. – с. 24

Содержание сборника заданий полностью соответствует программе обучения бакалавров по направлению «Экономика». Тематика заданий максимально приближена к соответствующим разделам рабочей программы дисциплины «Методы оптимальных решений».

Пособие включает семь глав, для каждой представлен ряд упражнений для проведения как практических занятий, так и для самостоятельной работы студентов экономических специальностей очной и заочной форм обучения.

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета (Протокол № 3 от 19 ноября 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2015

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить экономико-математическую модель задачи линейного программирования:

1.1. Для изготовления трех видов продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ используется три вида ресурсов S_1, S_2, S_3. Запас ресурсов составляет соответственно 20, 9, 14. На изготовление единицы продукции $П_1$ затрачивается 5 ед. ресурса S_1, 4 ед. S_2, 2 ед. S_3. На производство единицы $П_2$ затрачивается соответственно 3, 2, 4. На производство единицы $П_3$ соответственно 3, 2, 3. Прибыль, получаемая от реализации продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$ составляет соответственно 5, 2, 4 денежных единиц за одно изделие. Составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

1.2. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции представлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабрикатов
	П1	П2	
1 2	1 5	3 2	600 2200
Прибыль	15	40	

Определите план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

1.3. В течение месяца мастерская может выполнять три вида работ А, В, С при средней трудоемкости работ: А-2 часа, В-3 часа, С-3 часа. Мастерской установлен план прибыли не менее 1700 денежных единиц и план обслуживания услугой B не менее 400 клиентов. Прибыль от выполнения работ: A- 3 денежные единицы, B- 2 денежные единицы, C- 4 денежные единицы. Количество сырья составляет 4000 денежных единиц, а нормы расходов сырья на единицу продукции равны: A- 1 ед., B-3 ед., C-2 ед. Составьте план выполнения услуг в количестве и ассортименте, обеспечивающий наименьшие трудозатраты.

1.4. На предприятии, в состав которого входят четыре производственных цеха, изготавливаются два вида изделий. Производственные мощности цехов (в часах) в расчете на сутки, нормы времени, необходимого для изготовления единицы изделий в соответствующих цехах, приведены в таблице

Цеха	Изделия		Производственные мощности цехов
	I	II	
1	3	2	12
2	1	4	8
3	8	0	16
4	0	4	12

Прибыль от продажи единицы первого изделия составляет 4 денежные единицы, а от единицы второго изделия – 3 денежные единицы. Определите тот из возможных вариантов производственного плана, при котором обеспечивается максимальная прибыль.

1.5 Предприятие должно выпускать два вида продукции A и B, используя при этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе приведены в таблице. Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Станок	Производительность за 1 ед. продукции		Фонд времени, час
	A	B	
1	5	3	15
2	3	6	18
3	4	0	16
4	4	2	8
Прибыль за ед. продукции (денежные единицы)	2	5	

1.6. Производство трех видов продукции должно пройти две операции. Затраты времени на каждой операции на единицу продукции, прибыль от реализации единицы продукции, фонд времени на каждой операции даны в таблице.

Продукция	Затраты на единицу продукции		Прибыль, рубли
	Операция 1	Операция 2	
A	10	4	2
B	5	6	4
C	5	8	3
Фонд времени	500	720	

Сколько продукции каждого вида должно произвести предприятие, чтобы получить максимум прибыли, если продукции A должно быть не менее 20 единиц.

1.7. Из пункта A в пункт B ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице указан наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов.

Показатель		Количество вагонов		
		плацкартные	купейные	СВ
Поезд	Скорый	5	6	2
	Пассажирский	8	5	1
Парк вагонов		100	90	24
Число пассажиров в вагоне		58	40	32

Определить оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при котором число перевозимых пассажиров достигнет максимума.

1.8. Из двух сортов бензина составляют для различных целей 2 смеси –

А и В. Смесь А содержит 60% бензина 1 сорта и 20% бензина 2 сорта. Продажная цена 1 кг смеси А – 10 р., смеси В – 12 р.

Составить план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 т бензина 1 сорта и 30 т бензина 2 сорта.

Глава 2
ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти ОДР систем неравенств и определить координаты угловых точек ОДР.

1.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 0 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 10 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 - 6 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3, \\ 7x_1 + 4x_2 \ge 28, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 8x_1 - 4x_2 \ge -5, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

2. Решить ЗЛП графическим методом

2.1. $L = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

при ограничениях:

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1 \le 4 \\ 2x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

2.2. $L = 3x_1 + 5x_2 \to \max$

при ограничениях:

$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 3 \\ -3x_1 + x_2 \le 6 \\ x_2 \ge 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

2.3. $L = 4x_1 + 6x_2 \to \min$

при ограничениях:

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$

2.4. $L = -3x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях:

2.5. $L = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$

при ограничениях:

2.6. $L = x_1 + x_2 \to max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 12 \\ 3x_1-2x_2\le 6 \\ 3x_1+x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5_1-2x_2\ge 0 \\ -x_1+2x_2\le 8 \\ x_1-3x_2\le 3 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le x_1\le 1 \\ 0\le x_2\le 2 \\ 0\le x_1+x_2\le 3 \\ -1\le x_1-x_2\le 0 \end{cases}$$

2.7. $L=4x_1+3x_2\to\max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1-x_2\ge -2 \\ 5x_1+3x_2\le 15 \\ x_2\le 3 \\ x_1-2x_2\le 2 \\ 2x_1-x_2\ge -2 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

2.8. $L=2x_1+3x_2\to\min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\le 1 \\ -x_1+x_2\le 2 \\ 3x_1+x_2\le 9 \\ -2x_1+3x_2\ge 8 \\ 4x_1+3x_2\ge 0 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

2.9. $L=2x_1-3x_2\to\max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -4x_1+5x_2\le 20 \\ 2x_1+x_2\ge 6 \\ 5x_1+x_2\ge 6 \\ 5x_1-x_2\le 45 \\ x_1-x_2\le 6 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

2.10. Производственная мощность завода позволяет производить за месяц 20 тыс. изделий типа А или 16 тыс. изделий типа В. Прибыль, получаемая заводом при реализации одного изделия типа А, равна 800 денежных единиц, типа В- 1000 денежных единиц. Определить план выпуска изделий каждого типа, обеспечивающий наибольшую прибыль.

2.11. В суточный рацион включают два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем в стоимость продукта $П_1$ должно войти в дневной рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ составляет 2р., продукта $П_2$ - 4 р. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице.

Питательные вещества	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта		Минимальная норма потребления
	$П_1$	$П_2$	
А	0,2	0,2	120
В	0,4	0,2	160

Определить оптимальный рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

2.12. Оборудование фабрики позволяет выпускать фруктовые компоты в таре трех видов: 10 ц компота в стеклянной таре, 8 ц – в жестяной и 5 ц – в полиэтиленовой. Найти производственный план предприятия, максимизирующий прибыль, если себестоимость 1 ц компота составляет: в стеклянной и полиэтиленовой таре – 16 р., в жестяной – 10 р. Отпускная цена независимо от тары составляет 40 р. за 1ц.

2.13. Для изготовления изделий *A* и *B* фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. Указанные изделия производят с помощью токарных и фрезерных станков. Определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль. Исходные данные приведены в таблице:

Вид ресурса	Нормы расхода на одно изделие		Вид ресурса
	A	*B*	
Сталь, кг	10	70	570
Цветные металлы, кг	20	50	420
Токарные станки, с/ч	300	400	5600
Фрезерные станки, с/ч	200	100	3400
Прибыль, ден.ед.	3	8	

2.14. Для нарезки заготовок длиной 20, 25 и 35 см используются прутки длиной 75 см. Требуется за смену нарезать следующее число заготовок: длиной 20 см – 300 шт., длиной 25 см – 270 шт., 35 см – 350 шт. Из одного прутка можно нарезать заготовки различной длины, при каждом варианте раскроя будут различные остатки. Составить таблицу вариантов разреза и определить количество прутков, нарезаемых каждым способом, при которых была бы выполнена заданная программа, а общая длина остатков была бы наименьшей.

3. Решить задачи линейного программирования с n переменными графическим методом

3.1. $L = x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -2 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

3.2. $L = 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 32 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

3.3. $L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

3.4. $L = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

3.5. $Z = 6x_1 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 4 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.6. $Z = 3x_1 - 8x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 4x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -22 \\ -6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 17 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.7. $Z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 4 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.8. $Z = 2x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 4 \\ 7x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.9. $Z = 11x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 18 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.10. $Z = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ 4x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

3.11. $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \to \min$

3.12. $Z = -x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ x_1-x_2-x_4=2 \\ x_2+x_3=0{,}5 \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1;5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_4-x_5=-3 \\ x_1-3x_3+x_4=6 \\ x_2+x_3+2x_4=7 \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1;5} \end{cases}$$

3.13. $Z=3x_2+x_3+2x_4\to\min$

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-x_4=5 \\ 3x_1-x_2+2x_3+4x_4=1 \\ x_j\ge 0 \end{cases}$$

3.14. $Z=x_1-x_4\to\max$

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=5, \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=1, \\ x_j\ge 0. \end{cases}$$

Глава 3
СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Решить ЗЛП табличным симплексным методом.

1.1. $Z=x_1+5x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 8, \\ x_1+3x_2\le 7, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.2. $Z=5x_1+4x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1+x_2\le 8, \\ x_1+3x_2\le 6, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.3. $Z=x_1+x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1+x_2\le 20, \\ 2x_1+3x_2\le 30, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.4. $Z=2x_1+x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1+6x_2\le 15, \\ 4x_1+3x_2\le 11, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.5. $Z=x_1+3x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1+8x_2\le 17, \\ x_1\le 3, \\ x_2\le 2, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.6. $Z=4x_1+6x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+2x_2\le 4, \\ x_1\le 3, \\ x_2\le 1, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

1.7. $Z=x_1-2x_2\to\max;$

при ограничениях:

1.8. $Z=2x_1-x_2\to\max;$

при ограничениях:

1.9. $Z=2x_1+x_2+2x_3\to\min;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1-3x_2-2x_3=1, \\ x_i\ge 0\ (i=1,\dots,3). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+x_4=-1, \\ x_1+x_2+x_5=1, \\ x_i\geq 0\ (i=1,\ldots,5). \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+x_4=-1, \\ x_1+x_2+x_5=2, \\ x_i\geq 0\ (i=1,\ldots,5). \end{cases}$$

1.10. $Z=-x_1+4x_2-x_3\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=3, \\ 2x_1+x_2-x_3=0, \\ x_i\geq 0\ (i=1,\ldots,3). \end{cases}$$

1.11. $Z=x_1+3x_2\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3\leq 3, \\ 2x_1+x_2+x_3=2, \\ 3x_1+x_2+x_3\geq 3, \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,3. \end{cases}$$

1.12. $Z=x_1-x_2+x_3\to\min;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+3x_3\leq 3, \\ -2x_1+3x_2+x_3\geq -4, \\ x_j\geq 0{,}1=1,2,3. \end{cases}$$

1.13. $Z=x_1+x_2-x_3\to\max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1+x_2+x_3\leq 1, \\ -x_1+2x_2+2x_3\leq 7, \\ x_1-3x_2+x_3\leq 1, \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,3. \end{cases}$$

1.14. $Z=x_1-x_2-2x_3\to\min;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3\geq 1, \\ -2x_1+3x_2=1, \\ -3x_1+4x_2+2x_3\leq 1, \\ x_j\geq 0,\ j=1,2,3. \end{cases}$$

1.15. Фирма изготавливает два вида красок для внутренних (B) и наружных (H) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице.

Расход и суточные запасы исходных продуктов

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 т краски		Суточный запас, т
	краска H	краска B	
Пигмент	a_{11}	a_{12}	b_1
Олифа	a_{21}	a_{22}	b_2

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает b_3 т в сутки. Цена продажи 1 т краски для наружных работ - c_1 денежных единиц, для внутренних работ - c_2 денежных единиц.

Какое количество краски каждого вида должна произвести фирма, чтобы доход от реализации был максимальным?

Значение коэффициентов условий задачи

	№ варианта									
Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1	3	1	1	2	3	2	1	3	2	4
c_2	2	1	4	2	2	1	2	4	3	5
a_{11}	1	2	3	3	1	3	3	1	1	1
a_{12}	2	1	2	1	1	4	1	1	1	2
b_1	6	6	12	3	4	24	6	6	7	8
a_{21}	2	1	1	3	4	2	1	2	2	4
a_{22}	1	2	2	2	1	1	1	1	1	3
b_2	8	6	6	12	8	8	5	8	10	24
k_1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
k_2	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
b_3	2	2,5	3,5	4	4	3	1	4,5	6	3

Решить задачу симплексным методом.

Глава 4
ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Составить двойственные задачи для следующих задач:

1.1 $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8 \\ x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1.2. $Z = x_1 + 5x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1.3. $Z = 3x_1 + 3x_2 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.4. $Z = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 8, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

1.5. $Z = 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

1.6. $Z = 2x_1 - x_3 + x_4 \to \max;$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 18 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

2. Составить математические модели двойственных задач и по решению исходной найти оптимальное решение двойственной:

2.1. $Z = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 2 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 \ge -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

2.2. $Z = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to \max,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x - x_4 \le 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

3. Составить математическую модель двойственных задач и по её решению найти оптимальное решение исходной:

3.1. $Z = 1{,}5x_1 + 2x_2 \to \max,$

при ограничениях:

3.2. $Z = x_1 - 2x_2 + x_4 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 + 2x_2 \ge 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

3.3. $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 8 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.4. $Z = 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.5. $Z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3.6. $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 3 \\ x_2 + 3x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4. Для исходной задачи составить двойственную. Решить обе задачи симплексным методом или двойственным симплексным методом и по решению каждой из них найти решение другой. Одну из задач решить графическим методом:

4.1. $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_2 - x_3 \ge 2 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,3. \end{cases}$$

4.2. $Z = 6x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,3. \end{cases}$$

4.3. $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \ge 1 \\ -2x_1 + 3x_2 \ge 8 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.4. $Z = 2x_1 + 6x_2 + 12x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \ge 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge -2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

4.5. $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,3. \end{cases}$$

4.6. $Z = 4x_1 + 6x_2 + x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,3. \end{cases}$$

4.7. $Z = 3x_1 + x_2 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

4.8. $Z = 2x_1 + x_2 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

4.9. $Z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \le -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,3. \end{cases}$$

4.10. $Z = x_1 + x_2 + 7x_3 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge -2 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,3. \end{cases}$$

4.11. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 2 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,...,4. \end{cases}$$

4.12. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max,$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$$

Глава 5
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти целочисленное решение ЗЛП двумя способами:

а) графическим методом; б) методом Гомори.

1.1. $Z = 16x_1 + 9x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.2. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.3. $Z = 3x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.4. $Z = 4x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 3x_1 + 10x_2 \le 15 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.5. $Z = x_1 + x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 9 \\ -3x_1 + x_2 \le 0 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.6 $Z = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 4x_2 \le 11 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 13 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

1.7. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

1.8. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad = 10 \\ x_1 + 4x_2 \qquad\qquad + x_5 = 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad = 13 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1;5} \end{cases}$$

1.9. Для приобретения оборудования по сортировке зерна фермер выделяет 34 усл.ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 60м^2 . Фермер может заказать оборудование двух видов: менее мощные машины *A* стоимостью 3 усл.ед., требующие производственной площади 3 м^2 и обеспечивающие производительность за смену 2 т зерна, и более мощные машины *B* стоимостью 4 усл.ед., занимающие площадь 5 м^2 и обеспечивающие за смену сортировку 3 т зерна.

Определить оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий фермеру при данных ограничениях максимум общей производительности сортировки, если он может приобрести не более 8 машин типа B.

Глава 6
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

УПРАЖНЕНИЯ

1. Имеются по три пункта поставки и потребления однородного груза с данными возможностями и потребностями и матрицей тарифов доставки груза. Найти оптимальный план перевозки груза:

а)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	3	5	200
A_2	2	3	6	140
A_3	3	4	7	100
b_i	120	200	180	

б)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	2	4	6	150
A_2	3	6	5	150
A_3	5	4	1	200
b_i	160	160	120	

в)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	4	6	8	250
A_2	4	11	2	150
A_3	7	4	5	100
b_i	125	250	125	

г)

	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	1	8	1	120
A_2	2	2	4	180
A_3	4	6	9	200
b_i	135	200	165	

2. Автотранспортная фирма «Гринлайт» обеспечивает доставку одних и тех же строительных блоков с двух железобетонных заводов АО «Бетон» на три строительных площадки. На первую площадку требуется доставить b_1, на вторую – b_2 и на третью – b_3 бетонных блоков. С первого завода должны быть отгружены a_1, со второго – a_2 бетонных блока.

Выполните следующие задания:

1. Составьте математическую модель ТЗ.

2. Выпишите матрицу системы ограничений.

3. Определите ранг полученной матрицы.

4. Найдите первый опорный план

а) методом северо-западного угла;

б) методом минимальных тарифов.

5. Решите задачу методом потенциалов.

Тарифы на перевозку одного блока с каждого из заводов на соответствующую площадку приведены в таблице:

а)

Площадка	№ 1	№ 2	№ 3	Отгрузка
Завод 1	30	40	50	$a_1 = 120$
Завод 2	20	30	40	$a_2 = 100$
Заказ	$b_1 = 70$	$b_2 = 80$	$b_3 = 70$	

б)

Площадка	№1	№2	№3	Отгрузка
Завод 1	40	60	80	$a_1 = 150$
Завод 2	90	30	50	$a_2 = 100$
Заказ	$b_1 =110$	$b_2 = 80$	$b_3 = 60$	

в)

Площадка	№ 1	№ 2	№ 3	Отгрузка
Завод 1	70	40	60	$a_1 = 120$
Завод 2	30	80	50	$a_2 = 80$
Заказ	$b_1 = 70$	$b_2 = 80$	$b_3 = 50$	

г)

Площадка	№ 1	№ 2	№ 3	Отгрузка
Завод 1	90	40	70	$a_1 = 150$
Завод 2	60	80	50	$a_2 = 100$
Заказ	$b_1 = 50$	$b_2 = 80$	$b_3 = 120$	

3. Решить транспортную задачу распределительным методом и методом потенциалов:

а) Три завода выпускают комбайны, которые отправляются потребителям. Первый завод поставляет 50 комбайнов, второй – 40 комбайнов, третий – 70 комбайнов. Каждому из потребителей требуется соответственно 30, 50, 40 и 40 комбайнов. Стоимость перевозки одной единицы техники от поставщика потребителю задана матрицей стоимостей:

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 11 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составьте оптимальный план, обеспечивающий общую минимальную стоимость перевозки комбайнов.

б) На трех автобазах имеются автобусы в количестве 35, 45, 50 шт. соответственно для обслуживания четырех маршрутов. Для перевозки пассажиров каждому из маршрутов требуется автобусов в количестве 40, 25, 35 и 30 шт. соответственно. Расходы по эксплуатации каждой транспортной единицы заданы матрицей:

$$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 12 & 7 \\ 9 & 8 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

Распределить имеющиеся транспортные средства (автобусы) по маршрутам таким образом, чтобы общие расходы были минимальными.

в) На трех складах оптовой базы находится товар в количествах, равных соответственно 140, 300 и 180 т. Этот товар необходимо завезти в пять магазинов, каждый из которых должен получить соответственно 90, 120, 230, 180 и 60 т. С первого склада товар не предоставляется возможным перевозить во второй и пятый магазины, а из второго склада в третий магазин было завезено 100 т. товара. Зная стоимости перевозки 1 т. товара с каждого из складов в соответствующие магазины, которые определяются матрицей:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

г) Овощи, хранящиеся на четырех складах в количестве 50, 60, 45 и 65 т соответственно, необходимо вывезти трем магазинам. Каждый магазин должен получить овощи в количестве 100, 80 и 40 т соответственно. Со второго склада овощи не вывозятся в третий магазин, а с четвертого склада – во второй. Стоимость перевозки 1т овощей с каждого из складов в соответствующие магазины задана матрицей:

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составьте план перевозок, обеспечивающий минимальную общую стоимость перевозок.

Глава 7
ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Фирма имеет три механизма A_1, A_2, A_3, каждый из которых может быть использован на каждом из трех видов работ B_1, B_2, B_3 с производительностью, заданной матрицей (в условных единицах)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Распределить механизмы по одному на каждую из работ так, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

2. Пять человек должны выполнить четыре работы, причем каждый из работников с разной производительностью может выполнить любую из этих работ. Предусматривается, что каждый работник в состоянии сделать только одну работу. Производительности работников при выполнении работ заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Распределить людей на работу так, чтобы выполнить ее с максимальной производительностью.

3. Фирма, имеющая четыре склада, получила четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы имеют вполне достаточное количество товара, чтобы выполнить любой один из этих заказов.

Расстояния между каждой базой и каждым потребителем приведены в матрице

$$\begin{pmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

4. Фирма объединяет три предприятия, каждое из которых производит 3 вида изделий. Себестоимости каждого изделия в усл. ед. при изготовлении на каждом предприятии указаны в матрице

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 13 & 11 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы изделия имели минимальную себестоимость.

5. Компания разрабатывает план выпуска трех новых видов продукции. Она уже владеет пятью предприятиями, и теперь на трех из них должны производиться новые виды продукции — по одному виду на одно предприятие. Даны издержки производства единицы продукции, усл. ед.:

$$\begin{array}{cc} & \text{Предприятие} \\ \text{Вид продукции} & \begin{pmatrix} 20 & 23 & 38 & 15 & 35 \\ 8 & 29 & 6 & 35 & 35 \\ 5 & 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Издержки сбыта единицы продукции, усл. ед.:

$$\begin{pmatrix} 20 & 50 & 20 & 10 & 13 \\ 7 & 90 & 8 & 35 & 60 \\ 5 & 5 & 4 & 15 & 6 \end{pmatrix}.$$

Плановый объем годового производства, который позволил бы удовлетворить спрос, и себестоимость единицы продукции каждого вида приведены в таблице.

Таблица

Вид продукции	Плановый объем производства, шт.	Себестоимость, усл. ед.
1	35000	55
2	160000	50
3	54000	30

Закрепить выпуск продукции между предприятиями, обеспечивающий получение наибольшей прибыли за год.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. [Текст] / И.Л. Акулин. – М.: Высшая школа, 1986.- 320с.

2. Емельянов, А.М. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие. [Текст] / А.М. Емельянов, Л.Г. Крючкова. – Благовещенск: ДальГАУ, 2010. – ч.1. – 58 с.

3. Калихман И.Л. Сборник по математическому программированию. [Текст] / И.Л. Калихман.- М.: Высшая школа, 1975.- 272с.

4. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.-М.: Дело, 2001.-688с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов [Текст] / В. И. Ермаков, Г. И. Бобрик и др.- М.: ИНФРА-М, 2003. - 575 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 3
Глава 2 ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 6
Глава 3 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 10
Глава 4 ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 12
Глава 5 ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ 16
Глава 6 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА 17
Глава 7 ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ 20
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 23

Подолько Е.А.

СБОРНИК ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ»

Учебное пособие

В редакции составителей

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 13.01.2015 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 1,1. Усл.-п.л. – 1,8.
Тираж 100 экз. Заказ 9.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86