МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**Учебно-методическое пособие
для выполнения контрольных работ**

*для студентов заочной формы обучения
всех направлений бакалавриата*

**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2015**

УДК 519.8(075.8)
ББК 22.18

Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие для студентов заочной формы обучения всех направлений бакалавриата / сост.: Н.П. Кидяева, Е.А. Подолько – Благовещенск: ДальГАУ, 2015. – 83 с.

Учебно-методическое пособие составлено в соответствии с требованиями государственных стандартов высшего профессионального образования, реализуемых в ДальГАУ.

Предназначено для студентов заочной формы обучения всех направлений бакалавриата

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд.физ.-мат.наук, доцент

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета ДальГАУ (Протокол №3 от 19 ноября 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящего учебно-методического пособия – оказание помощи студентам факультета заочного обучения, слушателям факультета повышения квалификации в изучении курса теории вероятностей и математической статистики.

Пособие содержит методические указания по темам: элементы теории вероятностей и математической статистике. По каждой теме кратко изложены теоретические вопросы, подробное решение типового примера, индивидуальные контрольные задания.

При выполнении контрольной работы студент должен придерживаться следующих требований:

1. выполнять контрольную работу строго по своему варианту, номер которого определяется по таблицам № 1, 2, приведённым ниже;
2. контрольная работа выполненная (полностью или частично) по чужому варианту не зачитывается;
3. контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради с полями 3 – 4 см для замечаний преподавателя;
4. обложка тетради должна быть оформлена по приведённому образцу (*приложение 1*)
5. решения задач нужно располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях. Перед решением задачи надо полностью записать её условие. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и выполняя необходимые чертежи;
6. контрольную работу необходимо сдать до экзаменационной сессии;
7. контрольная работа, выполненная с нарушениями каких либо требований и с ошибками в решенных задачах, не зачитывается и возвращается студенту для устранения недоработок;
8. студент, не выполнивший контрольную работу, к зачёту (экзамену) не допускается;

9. на зачёте или экзамене студент обязан представить зачтённую контрольную работу. При необходимости (по требованию преподавателя) студент должен дать устные пояснения ко всем или некоторым задачам, содержащимся в этой работе.

Варианты контрольных работ приведены в таблицах №1, 2. Студент выполняет вариант контрольной работы в соответствии с номером учебного шифра. Если последняя цифра – не чётное число (1,3,5,7,9), то номер задач для этого варианта приведён в таблице № 1, если же предпоследняя цифра учебного шифра – чётная и ноль (2,4,6,8,0), номера соответствующего варианта в таблице № 2.

Таблица 1

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы								
1	1	21	41	61	81	101	121	141	161	181
2	2	22	42	62	82	102	122	142	162	182
3	3	23	43	63	83	103	123	143	163	183
4	4	24	44	64	84	104	124	144	164	184
5	5	25	45	65	85	105	125	145	165	185
6	6	26	46	66	86	106	126	146	166	186
7	7	27	47	67	87	107	127	147	167	187
8	8	28	48	68	88	108	128	148	168	188
9	9	29	49	69	89	109	129	149	169	189
0	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190

Таблица 2

Номер варианта	Номера задач для контрольной работы								
1	11	31	51	71	91	111	131	151	171	191
2	12	32	52	72	92	112	132	152	172	192
3	13	33	53	73	93	113	133	153	173	193
4	14	34	54	74	94	114	134	154	174	194
5	15	35	55	75	95	115	135	155	175	195
6	16	36	56	76	96	116	136	156	176	196
7	17	37	57	77	97	117	137	157	177	197
8	18	38	58	78	98	118	138	158	178	198
9	19	39	59	79	99	119	139	159	179	199
0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основная литература

1. Курс высшей математики. Теория вероятностей. Лекции и практикум: учебное пособие; доп. М-вом образ. РФ / под общ. ред. И.М. Петрушко. – 3-изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 346 с.
2. Кремер, Н.Ш. Теория вероятности и математическая статистика: учебник; рек. Мин-ом образования РФ для студ. вузов, обучающихся по экономическ. спец.- 3-е изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ, 2007.- 550 с.
3. Математическая статистика [Текст]: учебное пособие / сост.: Г.Н. Фролова и др. – Благовещенск: ДальГАУ, 2013. – 103 с.

Дополнительная литература

1. Вентцель, Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятности. – М.: Издательский центр «Академия». 2003. – 442 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. – 479с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003. – 405с.
4. Каньшина З.И. Теория вероятностей. Благовещенск Изд-во ДальГАУ 2006. – 183с.
5. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике. математическому программированию с решениями: учебное пособие / А.С. Шапкин. - 5-е изд. - М.: Издат.-торговая корпорац. "Дашков и К ", 2008. - 431 с.

Тематика контрольных работ

1. Основные понятия теории вероятностей
2. Теоремы сложения и умножения вероятностей
3. Повторные испытания
4. Случайная величина и её числовые характеристики
5. Простейшие приемы обработки выборочных данных и оценка параметров распределения.

Тема 1. Элементы теории вероятностей

Теория вероятностей – раздел математики изучающий общие закономерности случайных явлений и методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления.

Методы теории вероятностей применяются в различных отраслях науки, в том числе и в экономической теории.

1 Случайные события

§1. Основные понятия теории вероятностей. Элементы комбинаторики

Размещениями A_n^k из n различных элементов по k называются такие соединения, каждое из которых содержит k элементов (из данных n элементов) и отличается от любого другого или составом элементов, или порядком расположения этих элементов

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-k+1). \qquad (1)$$

Перестановками P_n из данных n элементов называются соединения, каждое из которых содержит все n данных элементов и отличается от другого только порядком расположения этих элементов

$$P_n = A_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!. \qquad (2)$$

Итак, число всех перестановок из данных n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно. Такое произведение сокращенно обозначается символом $n!$ (читается: n факториал).

Сочетаниями C_n^k из данных n элементов по k называются такие соединения, каждое из которых содержит k элементов (из данных n элементов) и отличается от любого другого составом элементов (хотя бы одним элементом). Порядок расположения элементов при этом не имеет значения:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Применяя формулу (3), следует иметь в виду, что $0! = 1$.

Испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий. Результатом испытания является *событие*. События обозначают заглавными буквами: *A, B, C*.

Событие, которое при наличие некоторого комплекса условий может произойти или не произойти, называется *случайным* событием.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно произойдет при осуществлении определенной совокупности условий.

Событие называется *невозможным*, если оно при выполнении определенного комплекса условий заведомо не произойдет.

События называются *несовместными*, если наступление одного из них в условиях испытания исключает всякую возможность появления остальных событий.

События называются *совместными*, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает возможность появления другого.

События называют *единственно возможными* в данном испытании, если появление одного и только одного из них является достоверным событием.

События называются *равновозможными*, если нет основания считать, что одно из них имеет большую возможность появления, чем все остальные.

Два единственно возможных и несовместных события называются *противоположными*. Если одно из взаимно противоположных событий обозначено *A*, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ при данных условиях являются несовместными и единственно возможными, то говорят, что они образуют *полную группу* событий.

Классическое определение вероятности

Вероятность события *A* равна отношению числа исходов m, благоприятствующих появлению события *A*, к числу всех исходов n, при условии, что всевозможные исходы являются несовместными, равновозможными и единственно возможными, то есть

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{4}$$

где $P(A)$ - вероятность события A.

Из определения вероятности вытекают следующие свойства:

1. Вероятность любого события есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей.
2. Вероятность достоверного события равна 1.
3. Вероятность невозможного события равна 0. Итак, $0 \le p \le 1$.

Задача 1. Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных от 1 до 35, наудачу извлекают один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

Решение. Испытание состоит в том, что извлекается один билет. Так как билет вытягивается наудачу, то все исходы испытания равновероятны, кроме того, несовместны. Число возможных исходов равно 35. Событие А означает, что номер взятого билета кратен 3. Этому событию благоприятствуют исходы испытания: 3, 6, 9, $12,\ldots,33$. Число таких исходов равно 11. Следовательно, по формуле (4) вероятность равна: $P(A)=\frac{11}{35}$.

Задача 2. Слово «Москва» составлено из букв разрезной азбуки. Карточки с отдельными буквами тщательно перемешиваются, после чего наудачу берут 4 из них и кладут в ряд друг за другом в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово «сова»?

Решение. Обозначим через A событие – четыре карточки в порядке выхода составили слово «сова». Всего можно набрать столько четверок различных букв из шести данных (м.о.с.к.в.а.), сколько может быть составлено размещений из шести букв по четыре, т.е. $A_6^4=6\cdot5\cdot4\cdot3=360$. Таким событию A лишь один исход: $m=1$. Искомая вероятность равна: $P(A)=\frac{1}{360}$.

Задача 3. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно взять 3 детали из 15, т.е. числу сочетаний из 15 элементов (деталей) по 3: $n = C_{15}^{3}$. Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию A – взятыми окажутся 3 окрашенных детали. 3 окрашенных детали можно взять из 10 окрашенных деталей C_{10}^{3} способами. Искомая вероятность равна: $P(A) = \dfrac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}} = \dfrac{24}{91}$.

Задача 4. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 6 отличников.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать 9 студентов из 12 студентов, то есть числу сочетаний из 12 элементов по 9: $n = C_{12}^{9}$.

Число способов отбора 6 отличников из 8 равно C_{8}^{6}. Каждая такая шестерка может сочетаться с каждой тройкой из $12-8=4$ студентов, а число этих троек равно C_{4}^{3}. Следовательно, число исходов благоприятствующих событию A – из девяти отобранных студентов 6 отличников – равно произведению $C_{8}^{6} \cdot C_{4}^{3}$, а вероятность искомого события будет равна:

$$P(A) = \frac{C_{8}^{6} \cdot C_{4}^{3}}{C_{12}^{9}} = \frac{8! \cdot 4! \cdot 9! \cdot 3!}{6! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 12!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 4}{10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{28}{25}.$$

§2 Теорема сложения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в появлении события A или B, или обоих этих событий. Если же события A и B – несовместные, то $A + B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Теорема 2.1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равно сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (5)$$

Следствие 2.1. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C) \qquad (6)$$

Задача 5. Пассажир ждет автобуса № 2 или №7 возле остановки, у которой останавливаются автобусы шести маршрутов №2, №7, №5, №9, №11, №12. Принимая, что автобусы всех маршрутов появляются в среднем одинаково часто, найти вероятность того, что первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута.

Решение. Первый подошедший к остановке автобус будет нужного пассажиру маршрута, если он либо №2, либо №7. Вероятность появления автобуса №2 (событие А) будет: $P(A)=\frac{1}{6}$. Вероятность появления автобуса №7 (событие В) будет: $P(B)=\frac{1}{6}$. События A и B несовместны (появление первым автобуса №2 исключает появление первым автобуса №7), поэтому применима теорема сложения. Искомая вероятность вычисляется по формуле: $P(A+B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

Задача 6. В урне 30 шаров: 8 красных, 5 синих, 7 зеленых и 10 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного (событие A), либо синего (событие B), либо зеленого (событие C) шара. Вероятность появления события A (красного шара): $P(A)=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$.

Вероятность появления события B (синего шара): $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Вероятность появления события C (зеленого шара): $P(C)=\frac{7}{30}$.

События A, B и C несовместны (берется один шар), поэтому по формуле (6) имеем: $P(A+B+C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{6}+\frac{7}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$

Теорема 2.2. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ образующих полную группу, равна единице

$$P(A_1)+P(A_2)+...P(A_n)=1 \qquad (7)$$

Так как противоположные события образуют полную группу, то справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \qquad (8)$$

Замечание 2.1. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого обозначают через q. Таким образом, формула (7) примет вид:

$$p+q=1 \qquad (9)$$

Задача 7. На книжной полке стоят 10 книг, из которых 4 учебника. Библиотекарь наудачу взял 3 книги. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых книг будет учебник.

Решение. Событие «хотя бы одна из взятых книг будет учебник» и событие «нет из взятых книг ни одного учебника» – противоположные. Обозначим первое событие через A, а второе через $\overline{A}$. Пользуясь следствием, т.е. формулой (8), получим: $P(A)=1-P(\overline{A})$. Найдем $P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно взять 3 книги из 10 книг, равно C_{10}^3. Учебников на полке $10-4=6$, из этого числа книг можно C_6^3 способами взять 3 учебника. Поэтому вероятность того, что из взятых книг нет ни одного учебника будет: $P(\overline{A})=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}$. Тогда искомая вероятность:

$$P(A)=1-p(\overline{A})=1-\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=1-\frac{6!\cdot 3!\cdot 7!}{3!\cdot 3!\cdot 10!}=1-\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

§3 Зависимые и независимые события. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Два события называют *независимыми*, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Два события называют *зависимыми*, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или не наступления другого события.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие А уже наступило.

Замечание 3.1. Из определения независимых событий следует, что появление одного из них не изменяет вероятности наступления другого. Поэтому для независимых событий справедливы равенства: $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$, то есть условные вероятности независимых событий равны их безусловным вероятностям.

Произведением двух событий *A* и *B* называют событие *AB*, состоящее в совместном появлении этих событий.

В общем случае, под произведением нескольких событий понимается событие, состоящее в одновременном осуществлении всех этих событий.

Теорема 3.1. Вероятность совместного появления событий *A* и *B* равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило, то есть

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (10)$$

Следствие 3.1. Для любых двух событий *A* и *B* справедливо равенство:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (11)$$

Следствие 3.2. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных, вычисленных в предположении, что все предыдущие события уже наступили, т. е.

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot ... \cdot P_{A_1 A_2 ... A_n}(A_n). \qquad (12)$$

Теорема 3.2. Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \qquad (13)$$

Данная формула получается из формулы (10) согласно предыдущему замечанию: $P_A(B) = P(B)$ для независимых событий.

События называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любая комбинация остальных событий есть события независимые. Например, если события A_1, A_2, A_3 независимые в совокупности, то независимыми будут события: A_1 и A_2; A_1 и A_3; A_2 и A_3; A_1 и $A_2 \cdot A_3$; A_2 и $A_1 \cdot A_3$; A_3 и $A_1 \cdot A_2$. Тогда формула из следствия 2 примет вид:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n), \qquad (14)$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ - события, независимые в совокупности.

Задача 8. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре 10 дней бывают дождливыми. Хозяйство должно в течение первых трех дней сентября выполнить определенную работу. Определить вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым.

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что 1 сентября дождя не будет, событие A_2 состоит в том, что 2 сентября дождя не будет событие A_3 - что 3 сентября дождя не будет. Тогда событие $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ состоит в том, что в течение первых трех дней сентября дождя не будет ($A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 -$ произведение трех зависимых событий). Применяя формулу (12) (три сомножителя), имеем:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3).$$

Вероятность того, что 1 сентября не будет дождя равна: $P(A_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

Найдем условную вероятность, $P_{A_1}(A_2)$ т.е. вероятность того, что дождя не будет 2 сентября, если 1 сентября его не было: $P_{A_1}(A_2)=\frac{19}{29}$. Условная вероятность того, что 3 сентября дождя не будет, если его не было ни 1 сентября, ни 2 сентября, равна: $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{18}{28}=\frac{9}{14}$.

Таким образом, $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)=\frac{2}{3}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{18}{28}=\frac{57}{203}$.

Задача 9. В трех ящиках находится по 10 деталей. В первом ящике 9, во втором 8, в третьем 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу берут по одной детали. Найти вероятность того, что три взятые детали будут стандартными.

Решение. Обозначим через A, B, C события, состоящие в том, что из каждого ящика соответственно взята стандартная деталь, тогда A, B, C - события, состоящие в том, что все 3 взятые детали будут стандартными (события A, B и C - независимые). Следовательно, имеет место формула (14) (три сомножителя): $P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

Найдем вероятности событий A, B и C: $P(A)=\frac{9}{10}$; $P(B)=\frac{8}{10}$; $P(C)=\frac{7}{10}$. Искомая вероятность будет: $P(A\cdot B\cdot C)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10}=0{,}504$.

§4 Вероятность появления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания может появиться n событий независимых в совокупности, либо некоторые из них, причем вероятности появления каждого из них известны. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. 4.1. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n \qquad (15)$$

Если данные события A_i $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ имеют одинаковую вероятность, тогда:

$$P(A) = 1 - q^n \qquad (16)$$

Задача 10. Вероятность попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: $p_1 = 0{,}7$; $p_2 = 0{,}9$; $p_3 = 0{,}6$. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности. Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3:

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Искомая вероятность вычисляется по формуле (15):

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 04 = 0{,}988.$$

§5 Совместное применение теорем сложения и умножения

Рассмотрим, как найти вероятность появления только одного из двух независимых событий A_1 и A_2, если известны их вероятности: $P(A_1) = p_1$; $P(A_2) = p_2$. Введем обозначения событий: B_1 - появилось только событие A_1; B_2 - появилось только событие A_2. Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2}$ (появилось первое событие и не появилось второе), т. е. $B_1 = A_1 \cdot \overline{A_2}$. Появление события B_2 равносильно появлению события $\overline{A_1} \cdot A_2$ (появилось второе событие и не появилось первое), т. е. $B_2 = \overline{A_1} \cdot A_2$. Таким образом, чтобы найти вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2, достаточно найти вероятность появления одного, безразлично какого, из событий B_1 и B_2. События B_1 и B_2 несовместны, поэтому применим теорему сложения (5): $P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2)$.

Остается найти вероятности каждого из событий B_1 и B_2. События A_1 и A_2 независимы, следовательно, независимы события A_1 и $\overline{A_2}$, а также A_2 и $\overline{A_1}$, поэтому, применяя формулу (13) (теорему умножения), получим:

$$P(B_1) = P(A_1 \cdot \overline{A_2}) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) = p_1 \cdot q_2;$$

$$P(B_2) = P(\overline{A_1} \cdot A_2) = P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = p_2 \cdot q_1.$$

Подставляя эти вероятности в предыдущее соотношение, найдем искомую вероятность появления только одного из событий A_1 и A_2:

$$P(B_1 + B_2) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1. \qquad (17)$$

Аналогично можно получить формулы для вычисления вероятности появления только одного из трех независимых событий A_1, A_2 и A_3 (событие A); только двух из трех независимых событий A_1, A_2 и A_3 (событие B):

$$P(A) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3; \qquad (18)$$

$$P(B) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3. \qquad (19)$$

Задача 11. Студент разыскивает нужную ему формулу в двух справочниках. Вероятность того, что формула содержится в первом, во втором справочниках, соответственно равны $0{,}7$ и $0{,}8$. Найти вероятность того, что формула содержится только в одном справочнике.

Решение. Обозначим события: A_1 – нужная формула содержится в первом справочнике. A_2 - во втором справочнике. Появление только первого события равносильно появлению события $A_1 \cdot \overline{A_2}$. Появление только второго события равносильно появлению события $\overline{A_1} \cdot A_2$. Тогда искомая вероятность может быть вычислена по формуле (17):

$$P(A_1 \cdot \overline{A_2} + \overline{A_1} \cdot A_2) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}38,$$

где $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Задача 12. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого их них равны соответственно: $0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$. Найти вероятность того, что:

1. в цель попадет только один стрелок;
2. в цель попадут только два стрелка.

Решение. 1) Рассмотрим следующие события: A_1 - попал в цель первый стрелок, A_2 - попал в цель второй стрелок, A_3 - попал в цель третий стрелок, B – попал в цель только один стрелок.

Тогда $B = A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$.

Отсюда в силу несовместимости событий слагаемых и независимости событий – сомножителей по формуле (18) имеем

$P(B) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}092$;

где $p_1 = P(A_1) = 0{,}7$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}8$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}9$;

$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

2) Пусть событие C – попадут только два стрелка. Тогда

$C = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$. По формуле(19) получим:

$P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}398$.

§6 Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступать при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу, причем известны вероятности этих событий и условные вероятности события A. Тогда вероятность события A находится по следующей теореме.

Теорема 6.1. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A). \qquad (20)$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности*.

Задача 13. Имеются три партии радиоламп, в каждой из которых соответст - венно по 20, 30, 50 штук. Вероятности того, что радиолампа проработает заданное время, равны соответственно для этих партий $0{,}7$; $0{,}8$; $0{,}9$. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа проработает заданное время?

Решение. Испытание состоит в том, что наудачу извлекается одна радиолампа. Обозначим через A – событие, состоящее в том, что извлеченная лампа проработает заданное время. Извлеченная лампа могла принадлежать 1, 2 и 3 партиям, поэтому B_1, B_2, B_3 - события означают соответственно, что наудачу выбранная лампа принадлежит I, II, III партиям (они являются несовместными и образуют полную группу событий). Вероятность события A, которое может осуществиться лишь совместно с одним из событий B_1, B_2, B_3 вычислим по формуле полной вероятности. Найдем сначала вероятности событий B_1, B_2, B_3.

$P(B_1)=\dfrac{20}{100}=0{,}2$; $\quad P(B_2)=\dfrac{30}{100}=0{,}3$; $\quad P(B_3)=\dfrac{50}{100}=0{,}5$.

По условию задачи: $P_{B_1}(A)=0{,}7$; $\quad P_{B_2}(A)=0{,}8$; $\quad P_{B_3}(A)=0{,}9$.

Тогда $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}8+$

$+0{,}5\cdot 0{,}9=0{,}83$.

Задача 14. В первой коробке содержится 20 деталей, из них 18 стандартных, во второй коробке 10 деталей, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята одна деталь и переложена в первую. Найти вероятность того, что после перекладывания, деталь, наудачу извлеченная из первой коробки, будет стандартная.

Решение. Обозначим через A – событие – из первой коробки после перекладывания извлечена стандартная деталь. Из второй коробки могла быть переложена в первую либо стандартная деталь (событие B_1) либо нестандартная (событие B_2). Вероятность того, что из второй коробки переложена в первую стандартная деталь. $P(B_1)=\frac{9}{10}$.

Вероятность того, что из второй коробки переложена в первую нестандартная деталь: $P(B_2)=\frac{1}{10}$. Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена стандартная деталь, равна $P_{B_1}(A)=\frac{19}{21}$. Условная вероятность того, что из первой коробки извлечена стандартная деталь, при условии, что из второй коробки в первую была переложена нестандартная деталь, равна $P_{B_2}(A)=\frac{18}{21}$. Искомая вероятность того, что из первой коробки будет извлечена стандартная деталь, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0{,}9.$$

§7 Вероятность гипотез. Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \qquad (i=1,2,3,...,n), \qquad (21)$$

где $P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$.

Задача 15. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго автомата. Первый автомат производит в среднем 78% деталей отличного качества, а второй - 87%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Решение. Обозначим через A – событие – деталь отличного качества. Можно сделать два предположения (гипотез): B_1 - деталь произведена первым автоматом, причем (поскольку первый автомат производит вдвое больше деталей, чем второй) $P(B_1)=\frac{2}{3}$; B_2 - деталь произведена вторым автоматом, причем $P(B_2)=\frac{1}{3}$. Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена первым автоматом, $P_{B_1}(A)=0,78.$ Условная вероятность того, что деталь будет отличного качества, если она произведена вторым автоматом, $P_{B_2}(A)=0,87.$ Вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется отличного качества, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0,78+\frac{1}{3}\cdot 0,87=0,81.$$

Искомая вероятность того, что взятая отличная деталь произведена первым автоматом, по формуле Бейеса равна:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0,78}{0,81}=\frac{52}{81}.$$

§8 Повторные испытания

Если производятся испытания, при которых вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A. Рассмотрим независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события одинакова.

Сложным событием будем называть такое событие, которое состоит из нескольких простых событий.

Формула Бернулли

Пусть произведено n независимых испытаний, причем вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же и равна p. Следовательно, вероятность не наступления события A в каждом испытании постоянна и равна $q=1-p$. Вычислим вероятность $P_n(k)$, того, что в n испытаниях событие A появится ровно k раз и не появится $n-k$ раз. Вероятность одного сложного события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n-k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна $p^k \cdot q^{n-k}$. Таких сложных событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, то есть C_n^k. Так как эти сложные события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных сложных событий. Но так как вероятность каждого сложного события одна и та же, то искомая вероятность равна вероятности одного сложного события, умноженного на их число:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \qquad \text{или}$$

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \tag{22}$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

а) менее k раз;

б) более k раз;

в) не менее k раз;

г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k-1), \tag{22.1}$$

$$P_n(k+1)+P_n(k+2)+...+P_n(k), \tag{22.2}$$

$$P_n(k)+P_n(k+1)+...+P_n(n), \tag{22.3}$$

$$P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(k). \tag{22.4}$$

Задача 16. Произведены четыре независимых выстрела по одной мишени. Найти вероятность того, что мишень будет поражена три раза, если вероятность попадания при одном выстреле равна $0{,}6$.

Решение. Положив в формуле Бернулли $p = 0{,}6$; $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$; $n = 4$; $k = 3$ находим: $P_4(3) = C_4^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot 0{,}4 = \dfrac{4!}{3!\cdot(4-3)!} = 0{,}216 \cdot 0{,}4 = 0{,}3456$.

Задача17. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что мишень будет поражена:

а) не менее трех раз;

б) менее трех раз.

Решение. А) не менее трех раз – это значит: или три раза, или четыре раза. Применяя формулу (22.3) получим: $P_4(k \ge 3) = P_4(3) + P_4(4)$.

Вычислим: $P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \dfrac{4!}{4!} \cdot (0,6)^4 = 0{,}1296;$ $\qquad P_4(3) = 0,3456.$

Тогда $P_4(k \ge 3) = 0,3456 + 0{,}1296.$

б) менее трех раз – это значит: или 0 раз, или 1 раз, или 2 раза.

Применяя формулу (22.1),получим: $\qquad P_4(k < 3) = P_4(0) + P_4(1) + P_4(2).$

Вычислим каждое слагаемое:

$P_4(0) = C_4^0 (0,6)^0 \cdot (0,4)^4 = 0,0256;$

$P_4(1) = C_4^1 \cdot (0,6)^1 \cdot (0,4)^3 = 0{,}1536;$

$P_4(2) = C_4^2 \cdot (0,6)^2 \cdot (0,4)^2 = 0,3456.$

Тогда: $\qquad P_4(k < 3) = 0,0256 + 0{,}1536 + 0,3456 = 0,5248.$

§9 Формула Пуассона

I. Если число испытаний велико, в вероятность P появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (23.1)$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях,

$\lambda = n \cdot p$ (среднее число появлений события в n испытаниях),

$e \approx 2{,}7182$.

Замечание 9.1. Значения функции Пуассона $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ приведены в *приложении 4*.

Задача 18. Среди семян пшеницы $0{,}02\%$ сорняков. Какова вероятность того, что при случайном отборе 10000 семян будет обнаружено 6 семян сорняков?

Решение. Так как $p = 0{,}0002$ – малое число, то применим формулу Пуассона. По условию задачи $p = 0{,}0002$, $n = 10000$, $k = 6$.

Тогда $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$ и $P_{10000}(6) \approx \frac{2^6}{6!} \cdot e^{-2} = \frac{64}{720} \cdot 0{,}1353 \approx 0{,}012.$

II. Последовательность событий, которые наступают и случайные моменты времени, называют *потоком событий*. *Интенсивностью* потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени. Если постоянная интенсивность потока λ известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}. \qquad (23.2)$$

Данная формула применяется для простейшего (пуассоновского) потока событий.

Задача 19. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 мин. Поступит: а) 2 вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее 2-х вызовов.

Решение. По условию $\lambda = 2$; $t = 5$; $k = 2$.

Воспользуемся формулой Пуассона (23.2).

а) вероятность того, что за 5 мин. Поступит 2 вызова:

$$P_5(2) = \frac{10^2 e^{-10}}{2!} = \frac{100 \cdot 0{,}000045}{2} = 0{,}00225.$$

Это событие практически невозможно.

б) менее двух вызовов – это или один, или ни одного, эти события несовместны. Тогда по теореме сложения имеем:

$$P_5(k<2)=P_5(0)+P_5(1)=e^{-10}+\frac{10e^{-10}}{1!}=0,000495.$$

Это событие практически невозможно.

в) события «не менее двух вызовов» и «менее двух вызовов» - противоположны, поэтому:

$$P_5(k\geq 2)=1-P_5(k<2)=1-0,000495=0,999505.$$

Это событие практически достоверно.

§10 Локальная теорема Лапласа

Если число испытаний n велико, то применение формулы Бернулли приводит к громоздким вычислениям. Использование этой формулы становится практически невозможно. В таких случаях применяют приближенную формулу, которая выражает локальную теорему Лапласа.

Теорема 10.1. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна $P(0<p<1)$, а число n достаточно велико, то вероятность $P_n(k)$ того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности) приближенно равна (тем точнее, чем больше n).

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \qquad (24)$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$; $\qquad \varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Таблица значений функции $\varphi(x)$ для положительных x приведена в приложении (*приложение 2*), для отрицательных x пользуются этой же таблицей (функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x)=\varphi(x)$). Для значений $x>5$ считают, что $\varphi(x)=0$.

Задача 20. Вероятность всхожести семян пшеницы равна $0{,}9$. Найти вероят - ность того, что из 400 посеянных семян взойдут 350 семян.

Решение. Так как $n=400$ и $k=350$ достаточно велики, то для вычисления $P_{400}(350)$ применим локальную теорему Лапласа, то есть формулу (24).

Из условия задачи $p=0{,}9$; $q=1-0{,}9=0{,}1$; $n=400$; $k=350$.

Тогда $$x=\frac{350-400\cdot 0{,}9}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}=-\frac{10}{\sqrt{36}}=-\frac{10}{6}\approx -1{,}67.$$

Из таблицы приложений, находим $\varphi(-1{,}67)=\varphi(1{,}67)=0{,}0989$.

Искомая вероятность равна: $P_{400}(350)\approx \dfrac{1}{\sqrt{400\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}}\cdot 0{,}0989\approx 0{,}0165$.

§11 Интегральная теорема Лапласа

Рассмотренные формулы Бернулли, Пуассона и формула, выражающая локальную теорему Лапласа позволяют найти вероятность появления события A ровно k раз при n независимых испытаниях. На практике часто требуется определить вероятность того, что событие A наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, то есть число k определено неравенствами $k_1\le k\le k_2$. В таких случаях применяют интегральную теорему Лапласа.

Теорема 11. 1. Если вероятность наступления события A в каждом из n испытаний постоянна и равна $p(0<p<1)$, то вероятность $P_n(k_1\le k\le k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз определяется по формуле:

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}}dx, \qquad (25)$$

где $x'=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad x''=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varPhi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ называется функцией Лапласа.

В приложениях (*приложение 3*) даны значения этой функции для $0\le x\le 5$.

При $x > 5$ функция $\Phi(x) = 0{,}5$. При отрицательных значениях x в силу нечетности функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Используя функцию Лапласа, имеем:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'). \tag{26}$$

Задача 21. Из большой, поступившей партии зерна (пшеницы с рожью), в которой ржи 20%, берут для пробы 900 случайных зерен. Какова вероятность того, что число зерен ржи в пробе от 180 до 210?

Решение. По условию задачи $n = 900$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $k_1 = 180$, $k_2 = 210$.

По приведенным выше формулам находим x' и x''.

$$x' = \frac{180 - 900 \cdot 0{,}2}{\sqrt{900 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 0; \qquad x'' = \frac{210 - 900 \cdot 0{,}2}{\sqrt{900 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{30}{12} = 2{,}5.$$

Тогда $P_{900}(180 \le k \le 210) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(0) = 0{,}4938 - 0 = 0{,}4938.$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется событием? Приведите примеры событий, достоверных событий, невозможных событий.
2. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными? Приведите примеры.
3. Сформулируйте классическое определение вероятности события.
4. Что называется относительной частотой события?
5. Сформулируйте определение суммы событий. Запишите теоремы сложения для совместных и несовместных событий.
6. Сформулируйте статистическое определение вероятности.
7. Как найти вероятность противоположного события $\overline{A}$ по известной вероятности события A?
8. Сформулируйте определение произведения событий, независимых и зависимых событий.
9. Что называется условной вероятностью события?
10. Сформулируйте и запишите теоремы умножения вероятностей для зависимых и независимых событий.

11. Напишите формулу полной вероятности. В каких случаях она применяется?
12. Напишите формулу Бейеса. В каких случаях она применяется?
13. Напишите формулу Бернулли. При решении, какого типа задач она применяется?
14. Что означает наивероятнейшее число наступлений события при повторных испытаниях? Как вычисляется это число?
15. Сформулируйте локальную и интегральную теоремы Лапласа.
16. Напишите формулу Пуассона. При каких условиях она применяется?

2 Случайные величины

§12 Случайные величины и их числовые характеристики

Случайной величиной (*СВ*) называется величина X, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее (до опыта) неизвестное.

Число яиц, полученных от одной несушки за год – случайная величина, может принимать значения $0,1,2,3,\ldots$. Глубина заделки семян при посеве – случайная величина, может принимать любые значения из интервала $(0;a)$.

Дискретной СВ называется величина X, которая принимает отдельные числовые значения с определенными вероятностями.

Число яиц, полученных от одной несушки за год – дискретная *СВ*.

Непрерывной СВ называется величина *X*, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Глубина заделки семян – непрерывная *СВ*.

Случайные величины будем обозначать большими буквами X, Y, $Z,\ldots$, а их возможные значения – малыми $x, y, z\ldots$.

Законом распределения *СВ* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями *СВ* и соответствующими их вероятностями.

Закон распределения *СВ* можно задать в виде таблицы, графика, аналитического выражения.

Для дискретной *СВ* закон распределения задается таблицей:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Задача 22. При бросании игральной кости может выпасть от 1 до 6 очков. Рассматривая количество выпавших очков как случайную величину, составить закон распределения.

Решение. X - количество выпавших очков. Это дискретная *СВ*, ее возможные значения $1,2,3,4,5,6$. Найдем вероятности событий, состоящих в том, что *СВ* примет эти значения по формуле $P_1 = P(X = 1) = \frac{m_1}{n}$, где *n* – число всех возможных случаев, m_1 - число благоприятствующих.

Т.к. $n = 6$, а $m_1 = 1$ (т. е. одно очко только на одной грани), то $p_1 = P(X = 1) = \frac{1}{6}$.

Аналогично находим: $p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{6}$, $p_4 = P(X = 4) = \frac{1}{6}$, $p_5 = P(X = 5) = \frac{1}{6}$, $p_6 = P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Закон распределения запишем в виде таблицы:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

13 Функция распределения

Для задания любой случайной величины служит функция распределения.

Интегральной функцией распределения *СВ* X называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения *x* вероятность того, что случайная величина X примет значения, меньшее *x*, то есть

$$F(x) = P(X < x)$$

Она обладает следующими свойствами:

1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ - неубывающая функция, т.е. $F(x_2) > F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\qquad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.
4. Вероятность того, что *СВ* X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, находится по формуле
$$P(a < x < b) = F(b) - F(a). \tag{27}$$
5. $P(X = x_0) = 0$.
6. Если возможные значения *СВ* X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x < a$ и $F(x) = 1$ при $x > b$.

График функции распределения в общем случае представляет собой график неубывающей функции, значения которой начинаются от 0 и доходят до 1, причем в отдельных точках функция может иметь скачки.

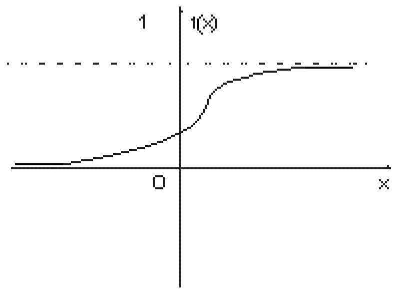

Рис. 1. График интегральной функции

§14 Плотность распределения вероятностей

Дифференциальной функцией распределения *СВ* X называют первую производную от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Свойства дифференциальной функции:

1. $f(x) \ge 0$, т.е. дифференциальная функция не отрицательна.
2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Вероятность того, что СВ примет значение, принадлежащее интервалу $(-\infty;+\infty)$, равна единице.

3. $P(a < x < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ (28)

Математическим ожиданием *СВ* X называется ее среднее значение, вычисляемое по формулам:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ - для дискретной СВ} \quad (29)$$

$$M(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ - для непрерывной СВ} \quad (30)$$

где $f(x)$ - плотность распределения вероятностей.

Свойства математического ожидания:

1. $M(c) = 0$, c - постоянная величина.
2. $M(cX) = cM(X)$.
3. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, если X и Y независимые *СВ*.

Дисперсией *СВ* X называется математическое ожидание квадрата отклонения *СВ* X от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\left[\, X - M(X) \,\right]^2 \quad (31)$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - M(\mathrm{X})\right]^2 \cdot p_i \text{ - для дискретной СВ} \quad (32)$$

$$D(\mathrm{X}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\mathrm{X} - M(\mathrm{X})\right]^2 f(x)dx \text{ - для непрерывной СВ} \quad (33)$$

Эти формулы можно преобразовать к виду:

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - \left[M(\mathrm{X})\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - M^2(\mathrm{X}) \text{ - для дискретной } \textit{СВ} \quad (34)$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X) \text{ - для непрерывной } \textit{СВ} \quad (35)$$

Приведем основные свойства дисперсии:

1. Для любой *СВ* X $D(X) > 0$.
2. $D(c) > 0$.

3. $D(cX) = c^2 D(X)$.

4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$, если X и Y независимые *СВ*.

Средним квадратическим отклонением *СВ* X называется корень квадратной из дисперсии: $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$.

Замечание 14.1. Использование σ_x часто удобнее, чем $D(X)$, так как σ_x имеет ту же размерность, что и *СВ*.

Задача 23. Заданы законы распределения двух независимых *СВ* X и Y:

x	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

y	1	4
p	0,2	0,8

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение для *СВ*. $Z = 3X - 2Y$.

Решение. Найдем математические ожидания и дисперсии для *СВ* X и Y по формулам: (29) и (34).

$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3$.

$M(Y) = 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3{,}4$.

Напишем законы распределения для *СВ* X^2 и Y^2.

x^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

y	1	16
p	0,2	0,8

$M(X^2) = 25 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}1 + 16 \cdot 0{,}2 = 15{,}3$.

$M(Y^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 0{,}8 = 13{,}0$.

Отсюда

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}21$

$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = 13{,}0 - (3{,}4)^2 = 1{,}44$.

Пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, а также независимостью *СВ* X и Y, получаем:

$M(Z) = M(3X - 2Y) = 3M(X) - 2M(Y) = 3 \cdot (-0{,}3) - 2 \cdot 3{,}4 = -7{,}7$.

$D(Z) = D(3X - 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) = 9 \cdot 15{,}21 + 4 \cdot 1{,}44 = 142{,}65$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_x = \sqrt{D(X)} = \sqrt{142{,}65} \approx 11{,}94$.

Задача 24. Случайная величина X задана интегральной функцией

распределения: $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x < 0, \\ x^3 \text{ } при \text{ } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ } при \text{ } x > 1. \end{cases}$ Найти:

1) вероятность попадания *СВ* в интервал $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$;

2) плотность распределения вероятностей $f(x)$;

3) математическое ожидание $M(x)$.

Решение. 1) Вероятность того, что *СВ* X примет значение, заключенное в интервале $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, равна приращению функции распределения на этом интервале (20): $P\left(\frac{1}{3} < \mathrm{X} < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216}$.

2) Найдем плотность распределения вероятностей по формуле $f(x) = F'(x)$.

Получим: $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x < 0, \\ 3x^2 \text{ } при \text{ } 0 \le x \le 1, \\ 0 \text{ } при \text{ } x > 1. \end{cases}$

3) Математическое ожидание *СВ* X находим по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$.

Так как функция $f(x)$ при $x > 1$ и при $x < 0$ равна нулю, то имеем:

$$M(X) = \int\limits_0^1 x \cdot f(x) dx = \int\limits_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \left.\frac{3x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Задача 25. Случайная величина X задана дифференциальной функцией:

$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ } при \text{ } x \le 0, \\ \frac{1}{2} x \text{ } при \text{ } 0 < x < 2, \\ 0 \text{ } при \text{ } x \ge 2. \end{cases}$ Найти:

1) математическое ожидание $M(x)$;

2) дисперсию $D(X)$;

3) среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Решение. $M(X)=\int_0^2 \frac{1}{2}xdx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{4}{3}$.

Дисперсию находим по формуле (35), в этом случае она имеет вид:

$$D(X)=\int_0^2 x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_0^2 x^2\frac{1}{2}xdx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}.$$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_x=\sqrt{\frac{2}{9}}=0{,}47$.

§15 Закон нормального распределения

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной *СВ* X, плотность которого имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (36)$$

где а – математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение.

График дифференциальной функции $f(x)$ нормального распределения (нормальная кривая или кривая Гаусса) имеет вид:

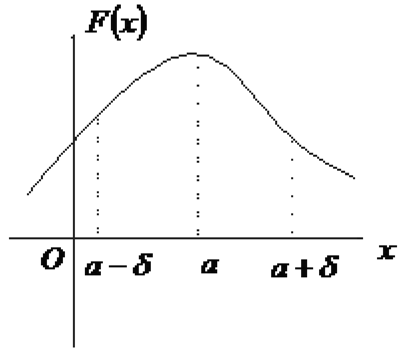

Рис. 2. График нормального распределения

Вероятность того, что нормально распределенная СВ X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, равна:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (37)$$

где $\Phi(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ - функция Лапласа.

Вероятность того, что нормальная СВ имеет отклонение от своего среднего значения меньше положительного числа σ.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (38)$$

Если $a=0$, то справедливо равенство:

$$P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (39)$$

Задача 26. Средняя длина рыбы 30 см, среднее квадратическое отклонение 5 см. Какой процент рыб имеет длину, превышающую 35 см, если принять, что *СВ* X – длина рыбы – подчинена нормальному закону.

Решение. Пользуясь формулой (29) и подставив $\alpha=35$, $\beta=\infty$, $a=30$ и $\sigma=5$ (X - длина рыбы подчинена нормальному закону), получим:

$$P(35<X<\infty)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{35-30}{5}\right)=0{,}5-\Phi(1)=0{,}5-0{,}3413=0{,}1587.$$

$\Phi(1)=0{,}3413$ (*приложение 3*).

Итак, получим, что около 16% рыб имеют длину, превышающую 35 см.

Задача 27. Считается, что отклонение изготавливаемых деталей от стандарта является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Стандартная длина, $a=40$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma=0{,}4$ см. Найти вероятность того, что отклонение длины от стандартной составит по абсолютной величине не более $0{,}6$ см.

Решение. Так как $a=40$, $\sigma=0{,}4$, $\delta=0{,}6$; то по формуле (38) имеем:

$$P(|X-40|<0{,}6)=2\Phi\left(\frac{0{,}6}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}5)=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664.$$

Следовательно, вероятность того, что изготавливаемые детали по длине будут в пределах от $39{,}4$ до $40{,}6$ см, составляет $0{,}8664$.

Задача 28. Диаметр деталей, изготовленных заводом является *СВ*, распреде - ленной по нормальному закону. Стандартная длина диаметра $a = 2{,}5$ см, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0{,}01$. Какую точность длины диаметра детали можно гарантировать с вероятностью $0{,}9973$?

Решение. По условию задачи имеем: $a = 2{,}5$; $\sigma = 0{,}01$; $P(|X - 2{,}5| < \delta) = 0{,}9973$.

Применяя формулу (30), получаем равенство:

$2\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}01}\right) = 0{,}9973$ или $\Phi\left(\frac{\delta}{0{,}01}\right) = 0{,}49865$.

По таблице *приложения 3* находим, что такое значение функция Лапласа имеет при $x = 3$. Следовательно $\frac{\delta}{0{,}01} = 3$, откуда $\delta = 0{,}03$. Таким образом, можно гарантировать, что длина диаметра будет изменяться в пределах от $2{,}47$ до $2{,}53$ см.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение случайной величины.
2. Какие случайные величины называются дискретными? Непрерывными? Приведите примеры дискретных и непрерывных СВ.
3. Что называется законом распределения СВ?
4. Что называется математическим ожиданием дискретной СВ? Перечислите основные свойства математического ожидания.
5. Дайте определение дисперсии дискретной СВ и перечислите ее основные свойства.
6. Что называется средним квадратическим отклонением СВ?
7. Дайте определение интегральной функции распределения и перечислите ее свойства.
8. Дайте определение дифференциальной функции распределения и перечислите ее свойства.

9. Что называется математическим ожиданием непрерывной СВ? Как оно вычисляется?
10. Как определяется дисперсия непрерывной СВ и как она вычисляется?
11. Какое распределение СВ называется нормальным распределением? Какие параметры характеризуют нормальное распределение и как они влияют на форму кривой этого распределения?
12. Как вычисляется вероятность попадания нормально распределенной СВ в заданный интервал?

Тема 2. Основные понятия и методы математической статистики

Математическая статистика – раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

§1 Основные понятия математической статистики

Основными понятиями математической статистики являются *генеральная и выборочная совокупности*.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью, или просто, *выборкой,* называют совокупность случайно отобранных объектов.

Например: партия всех электрических лампочек, которая подлежит проверки, является генеральной совокупностью, а множество лампочек взятых для обследования, составляет выборочную совокупность.

Объёмом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

При составлении выборки можно поступить двумя способами: после того как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. В соответствии с этим выборки подразделяются на повторные и бесповторные.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. На практике чаще используется бесповторная выборка.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка $x_1, x_1, ..., x_2, x_2, ..., x_3, x_3, ... x_k, x_k, ...$, причём x_1 наблюдалось n_1 раз; x_2 - n_2 раза; x_k - n_k. При этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ - объём выборки. Значения $x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ...$ называются *вариантами.* Последовательность вариант, записанных в неубывающем порядке (*ранжирование*) называется *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют – *частотами*, а их отношение к объёму выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ - *относительными частотами*.

Перечень вариантов и соответствующих им частот или относительных частот называется *статистическим распределением выборки* или *статистическим рядом*.

Замечание: В теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами или относительными частотами.

Статистическое распределение выборки можно записать в виде таблицы, в первой строке которой указываются значения вариант, во второй – значения частот

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	$\dots$

или значения относительных частот (которые легко вычисляются по известным частотам и объёму выборки)

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$
W_i	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\dots$

Пример 1. Экономист, интересующийся тарифным разрядом (от 1 до 6) рабочих некоторого подразделения завода, выбрал документы 10 рабочих и выписал из них последовательность разрядов 5, 1, 4, 5, 4, 3, 2, 6, 2, 1.

Эта последовательность представляет собой статистические данные, которые подлежат обработке.

После *упорядочивания* по неубыванию статистических данных (*ранжирование* статистических данных) получим *вариационный ряд* из 100 чисел: 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, где $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 6$ - *варианты*.

1 повторяется 2 раза; 2 – 2 раз; 3 – 1 раз; 4 – 2 раз; 5 – 2 раза; 6 – 1 раз.

Подсчитав *частоту* и *относительную частоту* вариантов получим *статистическое распределение выборки*

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	2	2	1	2	2	1

$$\sum_{i=1}^{6} n_i = 10$$

x_i	1	2	3	4	5	6
W_i	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\sum_{i=1}^{6} W_i = 1$$

В случае, когда число значений некоторого признака (СВ X) велико или признак является непрерывным, составляют *интервальный статистический ряд*. Записывается также в виде таблицы. В первую строку таблицы вписывают частичные промежутки $[x_0; x_1)$, $[x_1; x_2)$, $[x_2, x_3)$, ..., $[x_{k-1}, x_k)$, которые берут обычно одинаковыми по длине Δx (h).

Для определения ширины интервала $\Delta x\,(h)$ используют формулу Стерджеса: $\Delta x = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + \log_2 n}$, где $x_{\max} - x_{\min}$ - разность между наибольшим и наименьшим значениями признака, $1 + \log_2 n = m$ - число интервалов ($\log_2 n = 3{,}322 \lg n$). За начало первого интервала берут величину $x_{нач} = x_{\min} - \dfrac{\Delta x}{2}$.

Во второй строчке вписывают количество наблюдений n_i (частоту), в третьей - относительную частоту.

Статистическое распределение изображается графически в виде полигона и гистограммы.

Полигоном – называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами $(x_1;n_1)$, $(x_2;n_2)$, …, $(x_k;n_k)$ или $(x_1;W_1)$, $(x_2;W_2)$, …, $(x_k;W_k)$. Варианты x_i откладываются на оси абсцисс, а частоты или относительные частоты по оси ординат.

Гистограммой – называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $\Delta x\,(h)$, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{\Delta x}$ - плотность частоты ($\frac{n_i}{n\cdot\Delta x}$ - плотность относительной частоты).

Задача 29. Результаты обследования 20 семей по числу членов оказались такими: 2; 5; 3; 4; 1; 3; 6; 2; 4; 3; 4; 1; 3; 5; 2; 3; 4; 4; 3; 3. Получить по этим данным вариационный ряд и построить полигон относительных частот.

Решение. Перепишем результаты наблюдений в порядке возрастания вариант. Получим ряд, который называется *ранжированным*:

1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 6.

По этому ряду определяем частоты различных вариант. Варианта 1 встречается в заданном ряде 2 раза, следовательно, ее частота $n_1 = 2$. Варианта 2 встречается 3 раза, следовательно, $n_2 = 3$; аналогично получаем $n_3 = 7$; $n_4 = 5$; $n_5 = 2$; $n_6 = 1$.

Определяем относительные частоты наблюдавшихся в выборке вариант. Они равны отношению соответствующей частоты варианты к общему числу наблюдений. Общее число наблюдений (объем выборки) есть $n = 20$, тогда относительная частота варианты 1 будет: $w_1 = \frac{h_1}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10$. Аналогично находим: $w_2 = \frac{h_2}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15$; $w_3 = \frac{h_3}{n} = \frac{7}{20} = 0{,}35$; $w_4 = \frac{h_4}{n} = \frac{5}{20} = 0{,}25$; $w_5 = \frac{h_5}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10$; $w_6 = \frac{h_6}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Проверим правильность расчетов, суммируем вычисленные относительные частоты: $\sum_{i=1}^{6} w_i = 0{,}10 + 0{,}15 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}10 + 0{,}05 = 1{,}00$.

Вычисления сделаны, верно, так как сумма относительных частот равна 1. Результаты вычислений занесем в таблицу, которая называется вариационным рядом.

Значение варианты X_i	1	2	3	4	5	6
Частота варианты h_i	2	3	7	5	2	1
Относительная частота варианты w_i	0,10	0,15	0,35	0,25	0,10	0,05

Построим график по данным таблицы:

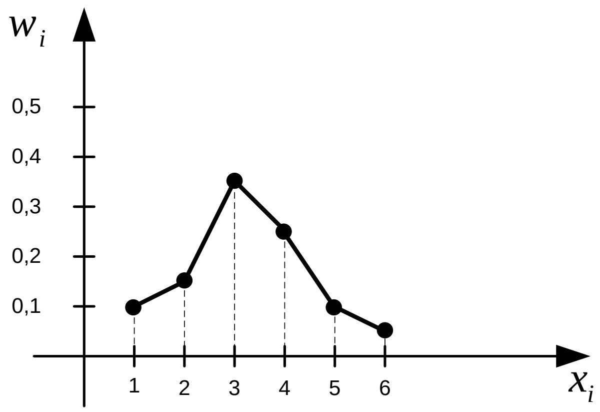

Рис. 3. Полигон распределения относительных частот

Концы ординат относительных частот соединяем прямыми линиями. Полученная фигура называется полигоном распределения относительных частот.

Задача 30. Известны урожайности в центнерах на один гектар яровой пшеницы в 20 колхозах: 13,9; 12,4; 13,1; 6,3; 11,8; 11,6; 10,5; 10,4; 10,6; 11,3;15,1; 11,7; 11,3; 10,2; 11,0; 10,7; 8,2; 9,6; 10,2; 15,1. Получить интервальный ряд распределения и построить гистограмму.

Решение. Записываем исходные данные в виде ранжированного ряда:

6,3; 8,2; 9,6; 10,2; 10,2; 10,4; 10,5; 10,6; 10,7; 11,0; 11,3;

11,6; 11,7; 11,8; 12,4; 13,1; 13,5; 15,1; 15,1;

Рассматривая этот ряд, видим, что диапазон изменения вариант в выборке составляет от 6 до 16. Весь диапазон изменения вариант в выборке разбиваем на несколько интервалов. Размер интервала выбирается произвольно, но следует иметь в виду, что чем меньше интервал, тем точнее результаты. В данной задаче примем размер интервала равным 2 единицам, получим 5 интервалов:

первый 6-8, второй 8-10, третий 10-12, четвертый 12-14, пятый 14-16.

Определим частоту попадания вариант выборки в каждый интервал. В первый интервал попадает одно значение из ряда (6,3), поэтому $m_1 = 1$. Во второй интервал попадают два значения из ряда (8,2 и 9,6) поэтому $m_2 = 2$. Аналогично получаем $m_3 = 12$, $m_4 = 3$, $m_5 = 2$.

Определяем относительные частоты попадания вариант выборки в каждый интервал:

в первый интервал $-w_1 = \frac{m_1}{n} = \frac{1}{20} = 0{,}05$;

во второй интервал $-w_2 = \frac{m_2}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10$;

в третий интервал $-w_3 = \frac{m_3}{n} = \frac{12}{20} = 0{,}60$;

в четвертый интервал $-w_4 = \frac{m_4}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15$;

в пятый интервал $-w_5 = \frac{m_5}{n} = \frac{2}{20} = 0{,}10$.

$\sum_{i=1}^{5} w_i = 1$ – сумма относительных частот равна единице, следовательно, вычисления произведены правильно.

Определим плотность относительных частот вариант как отношение относительной частоты w_i к размеру интервала:

для первого интервала $-P_1 = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$;

для второго интервала $-P_2 = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05$;

для третьего интервала $-P_3 = \frac{0{,}6}{2} = 0{,}30$;

для четвертого интервала $-P_4 = \frac{0{,}15}{2} = 0{,}075$;

для пятого интервала $-P_5 = \frac{0{,}10}{2} = 0{,}05$.

По полученным результатам составим таблицу.

Таблица 1

Интервальный ряд распределения урожайности яровой пшеницы.

Интервал значений	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
Частота вариант	1	2	12	3	2
Относительная частота	0,05	0,10	0,60	0,15	0,10
Плотность относительных частот	0,025	0,050	0,300	0,075	0,050

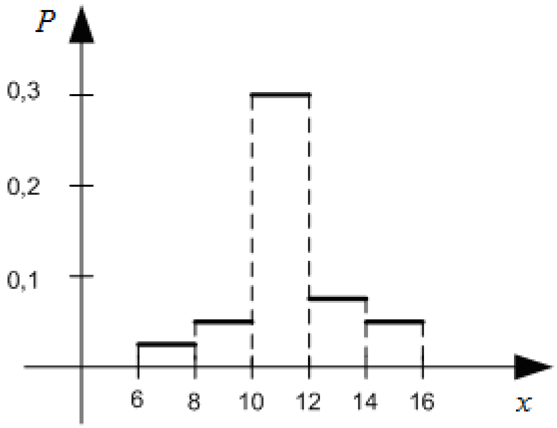

Рис. 4. Гистограмма распределения плотности относительных частот

Построения выполняем следующим образом: на О*X* откладываем шкалу возможных значений вариант, по оси ординат мощность относительных частот. Полученная ступенчатая диаграмма называется гистограммой распределения плотности относительных частот. Построенная гистограмма показывает зависимость плотности относительных частот от значения вариант.

§2 Числовые характеристики статистического распределения

Выборочной средней $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности.

Если значения $x_1, x_2, ..., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (40)$$

Если же значения признака $x_1, x_2, ...x_n$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем, $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$\overline{x_в} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + ... + n_kx_k}{n} \quad \text{или} \quad \overline{x_в} = \frac{\sum_{i+1}^{k} n_ix_i}{n}. \qquad (41)$$

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения.

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^2}{n}, \qquad (42)$$

если все значения признака выборки объема n различны.

Если же значения признака $x_1, x_2, ...x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..., n_k$, причем $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \overline{x}_в)^2}{n}. \qquad (43)$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется квадратный корень из выборочной дисперсии

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}. \qquad (44)$$

Доверительным называется такой интервал, который с заданной надежностью γ покрывает оцениваемый параметр.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенной случайной величины по выборочной средней $\overline{X}$ при известном σ служит доверительный интервал

$$\overline{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{45}$$

где t такое значение аргумента функции Лапласа $\Phi(x)$, при котором $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma$.

Другими характеристиками вариационного ряда являются: мода, медиана, размах варьирования, коэффициент вариации.

Модой, в обозначении M_o, называют варианту, имеющую наибольшую частоту.

Медианой, в обозначении, M_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две равные части по числу вариант. Если вариационный ряд имеет нечетное число вариант $n = 2k+1,$ то $M_e = x_{k+1}$, при четном $n = 2k$ в качестве медианы принимают

$$M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}. \tag{46}$$

Размахом варьирования R называется разность между максимальными значениями признака

$$R = X_{\max} - X_{\min}. \tag{48}$$

Коэффициент вариации вычисляется по формуле:

$$V = \frac{\sigma_в}{X} \cdot 100\%, \qquad \text{где } \sigma_в = \sqrt{D_в}. \tag{49}$$

Величина $M_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i x_i^k}{n}$ называется *начальным эмпирическим моментом* порядка k, где n – объем выборки.

Величина $m_k = \frac{\sum\limits_{i-1}^{S} m_i (x_i - \overline{x})^k}{n}$ есть *центральный эмпирический момент* порядка k.

Задача 31. Задана выборка значений признака X, имеющего нормальное распределение

X_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Найти: а) выборочную среднюю $\overline{X}$ и исправленное среднее квадратичное отклонение s; б) указать доверительный интервал, покрывающий с надежностью 0,95 среднее квадратическое отклонение σ признака X.

Решение. а) Определим объем выборки: $n = \sum n_i = 2+1+2+2+2+1 = 10$,

тогда $\overline{X} = \dfrac{1}{10}\sum n_i \cdot x_i = \dfrac{1}{10}(-2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2 + 5\cdot 2) = 2$.

$s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \overline{x})^2$,

$s^2 = \dfrac{1}{9}\left[(-2-2)^2\cdot 2 + (1-2)^2\cdot 1 + (2-2)^2\cdot 2 + (3-2)^2\cdot 2 + (4-2)^2\cdot 2 + (5-2)^2\cdot 1\right] = 5{,}76$.

$s = 2{,}4$.

б) Искомый доверительный интервал для математического ожидания a имеет вид: $\overline{X} - t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{X} + t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}}$, где t_γ находится по таблице *приложения 6*.

При $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ получается $t_\gamma = 2{,}26$.

Тогда $\overline{X} - t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2 - 2{,}26\dfrac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 0{,}3$; $\overline{X} + t_\gamma \dfrac{s}{\sqrt{n}} = 2 + 2{,}26\dfrac{2{,}4}{\sqrt{10}} = 3{,}7$.

Таким образом, $0{,}3 < a < 3{,}7$.

в) Доверительный интервал для генерального среднего квадратического отклонения σ имеет вид: $s\cdot(1-q) < \sigma < s\cdot(1+q)$, если $q<1$ и $0 < \sigma < s\cdot(1+q)$, если $q \ge 1$.

Значение q находим по таблице (*приложение 5*). По заданным $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ находим $q = 0{,}65$.

Следовательно, доверительный интервал запишется в виде

$$s\cdot(1-0{,}65) < \sigma < s\cdot(1+0{,}65) \qquad \text{или} \qquad 0{,}84 < \sigma < 3{,}96.$$

Задача 32. Из крупного стада коров произведена случайная выборка, получено 20 вариант удоя коров за 300 дней лактации (в д.)

35,9; 35,3; 42,7; 45,2; 25,9; 35,3; 33,4; 27,0; 35,9; 38,8;

33,7; 38,6; 40,9; 35,5; 44,1; 37,4; 34,2; 30,8; 38,4; 31,3.

Требуется:

1) записать вариационный ряд;
2) найти основные выборочные характеристики: $\bar{x}$, s^2, s, V, $s_{\bar{x}}$;
3) с надежностью 95% указать интервал для оценки генеральной средней $x_г$.

Решение. Запишем исходные данные в виде ранжированного ряда, т.е., располагая их в порядке возрастания: 25,9; 27,0; 30,8; 31,3; 33,4; 33,7; 34,2; 35,3; 35,2; 35,5; 35,9; 35,9; 37,4; 38,4; 38,6; 38,8; 40,9; 42,7; 44,1; 46,2.

Основные выборочные характеристики вычисляются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i+1}^{k} n_i x_i}{n} \text{ – выборочная средняя;} \quad (50)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum n_i (x_i - \bar{x})^2 \text{ – дисперсия;} \quad (51)$$

$$s = \sqrt{s^2} \text{ – среднее квадратичное отклонение;} \quad (52)$$

$$s_x = \frac{s}{\sqrt{n}} \text{ – ошибка средней;} \quad (53)$$

$$V = \frac{\sigma_в}{X} \cdot 100\% \text{ – коэффициент вариации.} \quad (54)$$

Расчеты $\bar{x}$ и s^2 удобно проводить с помощью таблиц.

№ п/п	Результат исследования x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	*2*	*3*	*4*
1	35,9	- 0,1	0,01
2	35,3	- 0,7	0,49
3	42,7	6,7	44,89
4	45,2	9,2	84,64
5	25,9	- 10,1	102,01
6	35,3	- 0,7	0,40

7	33,4	- 2,6	6,76
8	27,0	- 9,0	81,00
9	35,9	- 0,1	0,01
10	38,8	2,8	7,84
11	33,7	- 2,3	5,29
12	38,6	2,6	6,76
13	40,9	4,9	24,01
14	35,5	- 0,5	0,25
15	44,1	8,1	65,61
16	37,4	1,4	1,86
17	34,2	- 1,8	3,24
18	30,8	- 5,2	27,04
19	38, 4	2, 4	5, 76
20	31, 3	- 4, 7	22, 09
Σ	720, 3	0	490, 05

Найдем сумму x_i и результат занесем в таблицу. Разделив эту сумму на 20, получим: $\bar{x} = 36{,}015 \approx 36{,}0$.

Заполним третий столбец таблицы.

Для контроля вычислим сумму этих разностей, если их сумма равна 0, то вычисления сделаны правильно. Возведем эти разности в квадрат и заполним последний столбец таблицы.

Найдем значение дисперсии: $s^2 = \dfrac{490{,}05}{19} = 25{,}79$.

Среднее квадратичное отклонение: $s = \sqrt{25{,}79} = 5{,}08$.

Найдем ошибку средней: $s_{\bar{x}} = \dfrac{5{,}08}{\sqrt{20}} \approx \dfrac{5{,}08}{4{,}47} \approx 1{,}34$.

Вычислим коэффициент вариации: $V = \dfrac{5{,}08}{36} \cdot 100\% = 14\%$.

Поскольку $10\% < V < 20\%$, то изменчивость удоев за 300 дней следует считать средней.

3) Доверительный интервал для оценки генеральной средней определяется как

$$\overline{X} - t_\gamma s_{\overline{x}} < x_г < \overline{X} + t_\gamma s_{\overline{x}},$$

где величина t_γ при заданной надежности γ определяется с помощью таблицы (*приложение 6*)

$$t_\gamma = t(\gamma; n) = t(0{,}95;20) = 2{,}10.$$

Вычислим радиус доверительного интервала

$$t_\gamma s_{\overline{x}} = 2{,}10 \cdot 1{,}34 \approx 2{,}8.$$

Таким образом, с надежностью 95 % можно утверждать, что во всем стаде средний удой за 300 дней (генеральная средняя) заключен в пределах от

$$\overline{X} - t_\gamma s_{\overline{x}} = 36 - 2{,}8 = 33{,}2ц \text{ (гарантированный минимум),}$$

до

$$\overline{X} + t_\gamma s_{\overline{x}} = 36 + 2{,}8 = 38{,}8ц \text{ (возможный максимум).}$$

§3 Методы нахождения точечных оценок

Наиболее распространёнными методами получения точечных оценок параметров распределения являются: метод наименьших квадратов, метод моментов, метод максимального правдоподобия.

Метод наименьших квадратов

Производится n наблюдений $(x_1; y_1), \ldots, (x_n; y_n)$ переменных x и y. Предполагая, что между x и y существует зависимость вида $y = f(x)$, требуется найти значения параметров функции, при которых она наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными. Полученная формула $y = f(x)$ называется эмпирической.

Согласно методу наименьших квадратов параметры функции $y = f(x)$ следует подобрать так, чтобы система точек эксперимента «сглаживалась» или другими словами, чтобы погрешность была как можно меньше по абсолютной величине.

Параметры функции $y = f(x)$ находятся из *системы нормальных уравнений* (таблица 2)

Таблица 2

Вид функции	Система нормальных уравнений
Линейная функция $y = ax + b$	$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$	$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$
Гиперболическая функция $y = a + \frac{b}{x}$	$\begin{cases} an + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} + b\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{x_i}. \end{cases}$
Показательная функция вида $y = a \cdot b^x$	$\begin{cases} \lg a\sum_{i=1}^{n} x_i + n\lg b = \sum_{i=1}^{n} \lg y_i, \\ \lg a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lg b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \lg y_i. \end{cases}$

Задача 33. Торговое предприятие имеет сеть, состоящую из 12 магазинов, данные о которых представлены в таблице. Полагая, что размер годового товарооборота Y *млн руб.* и торговая площади магазина X *тыс. м*^{2} связаны зависимостью $y = ax + b$, найти её коэффициенты методом наименьших квадратов.

X	0,24	0,31	0,55	0,48	0,78	0,98	0,94	1,21	1,29	1,12	1,29	1,49
Y	19,76	38,09	40,95	41,08	56,29	68,51	75,01	89,05	91,13	91,26	99,84	108,55

Решение.

Результаты вспомогательных вычислений для получения коэффициентов системы нормальных уравнений поместим в таблицу.

n	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
1	0,24	19,76	0,0576	390,4576	4,7424
2	0,31	38,09	0,0961	1450,8481	11,8079
3	0,55	40,95	0,3025	1676,9025	22,5225
4	0,48	41,08	0,2304	1687,5664	19,7184
5	0,78	56,29	0,6084	3168,5641	43,9062
6	0,98	68,51	0,9604	4693,6201	67,1398
7	0,94	75,01	0,8836	5626,5001	70,5094
8	1,21	89,05	1,4641	7929,9025	107,7505
9	1,29	91,13	1,6641	8304,6769	117,5577
10	1,12	91,26	1,2544	8328,3876	102,2112
11	1,29	99,84	1,6641	9968,0256	128,7936
12	1,49	108,55	2,2201	11783,1025	161,7395
	10,68	819,52	11,4058	650008,554	858,3991

Так как размер годового товарооборота Y *млн руб.* и торговая площади магазина X *тыс.* $м^2$ связаны зависимостью $y = ax + b$, то система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 10{,}68 \cdot a + 12b = 819{,}52, \\ 11{,}4058 \cdot a + 10{,}68b = 858{,}3991. \end{cases}$$

Решая систему, найдём $a = 67{,}889$; $b = 7{,}87179$, а искомая функциональная зависимость имеет вид: $y = 67{,}889x + 7{,}87179$.

§4 Корреляционная зависимость. Выборочный коэффициент корреляции

Корреляционной зависимостью $У$ от X называется функциональная зависимость условной средней y_x от x, т.е. $\overline{y_x} = f(x)$. Это уравнение называется уравнением регрессии $У$ на X. Аналогично определяется корреляционная зависимость X на $У$. Уравнение регрессии X на $У$ имеет вид $\overline{x_y} = \varphi(y)$. Если функции $f(x)$ и $\varphi(y)$ линейные, то корреляцию называют линейной.

В случае сгруппированных данных, выборочное уравнение прямой регрессии находится по формулам:

$$1)\ \overline{y_x} - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right) \quad (У \text{ на } X); \tag{55}$$

$$2)\ \overline{x_y} - \overline{x} = r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y - \overline{y}\right) \quad (X \text{ на } У). \tag{56}$$

Теория корреляции решает две основные задачи

1) Устанавливает форму корреляционной зависимости, т.е. вид функции регрессии.

2) Оценивает тесноту (силу) корреляционной связи.

Теснота корреляционной зависимости $У$ от X оценивается от величины рассеивания значений $У$ вокруг условного среднего $\overline{У_x}$. Чем больше рассеивание, тем слабее корреляционная зависимость. Определение тесноты корреляционной зависимости осуществляется с помощью коэффициента корреляции.

Выборочный коэффициент корреляции обозначается $r_в$ и находится по формуле

$$r_в = \frac{\sum n_{xy} \cdot x_y - n \cdot \overline{x} \cdot \overline{y}}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}, \tag{57}$$

где $x, y-$ варианты признаков X и $У$;

n_{xy} – частота наблюдаемой пары $(x; y)$;

n – объем выборки;

σ_x, σ_y – выборочные средние квадратические отклонения;

$\overline{x}, \overline{y}-$ выборочные средние.

1) Выборочный коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит 1, т.е. $|r_в| \le 1$.

2) Если $r_в = 0$, то корреляционная зависимость не является линейной.

3) При возрастании $r_в$ корреляционная зависимость усиливается и при $|r_в| = 1$, осуществляется переход в линейную функциональную зависимость.

В случае малых выборок расчет коэффициента корреляции можно проводить по формуле

$$r_в = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \overline{y})^2}}. \qquad (58)$$

Задача 34. Для 10 петушков 15-дневного возраста были получены следующие данные о весе их тела X $(гр)$ и весе гребня $У$ $(мг)$

x_i	83	72	69	90	90	95	95	91	75	70
y_i	56	42	18	84	56	107	90	68	31	48

Требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии.

Решение. 1) Коэффициент корреляции находим по формуле (58).

При вычислении коэффициента корреляции все промежуточные вычисления удобно записать в таблицу

№	x_i	y_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$y_i - \overline{y}$	$(y_i - \overline{y})^2$	$(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})$
1	85	56	0	0	-4	16	0
2	72	42	-11	121	-18	324	198
3	69	18	-14	196	-42	1764	588
4	90	84	7	49	24	576	168
5	90	56	7	49	-4	16	-28
6	95	107	12	144	47	2209	564
7	95	90	12	144	30	900	360
8	91	68	8	64	8	64	64
9	75	31	-8	64	-29	841	232
10	70	48	-13	169	-12	144	156
$\sum$	830	600	0	1000	0	6854	2302

Вычисляем средние:

$\bar{x} = \frac{830}{10} = 83$; $\bar{y} = \frac{600}{10} = 60$ и заполняем последние пять столбцов таблицы.

Суммируя элементы в соответствующих столбцах, находим

$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 1000$; $\sum (y_i - \bar{y})^2 = 6854$; $\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y}) = 2302$.

Подставим вычисленные значения в формулу для $r_в$, получаем

$$r_в = \frac{2302}{\sqrt{1000 \cdot 6854}} = 0{,}88.$$

Вывод: между весом тела X и весом гребня Y у 15-дневных петушков существует тесная положительная линейная корреляционная связь.

2) Коэффициент регрессии $в_{y/x}$ определяется по формуле

$$в_{y/x} = \frac{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)\cdot\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \qquad (58)$$

Используя данные таблицы, получим: $в_{y/x} = \frac{2302}{1000} \approx 2{,}3$.

Подставим в уравнение прямой регрессии: $\overline{y_x} - \bar{y} = в_{y/x}\left(x - \bar{x}\right)$,

найденные значения $\bar{y}$, $\bar{x}$ и $в_{y/x}$, получим уравнение

$$y - 60 = 2{,}3 \cdot \left(x - 83\right) \text{ или } y = 2{,}3x - 132{,}56.$$

Вопросы к экзамену

1. Понятие события в теории вероятностей. Классификация событий.
2. Классическое определение вероятности события. Статистическое определение вероятности. Относительная частота.
3. Полная группа событий. Противоположные события.
4. Элементы комбинаторики.
5. Теорема сложения вероятностей несовместных событий.
6. Теорема умножения вероятностей независимых событий.
7. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

8. Вероятность появления хотя бы одного события.
9. Формула полной вероятности. Формула Бейеса.
10. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Локальная теорема Муавра – Лапласа, интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.
11. Понятие случайной величины. Дискретная случайная величина. Закон распределения, числовые характеристики случайной величины и их свойства.
12. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях.
13. Понятие случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины.
14. Математическое ожидание дискретной случайной величины.
15. Дисперсия дискретной случайной величины.
16. Функция распределения случайной величины.
17. Непрерывные случайные величины. Интегральная функция распределения и её свойства.
18. Дифференциальная функция распределения и её свойства.
19. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.
20. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал.
21. Биноминальный закон распределения.
22. Закон распределения Пуассона.
23. Нормальный закон распределения.
24. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева.
25. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

26. Статистические оценки генеральной средней и доли. Погрешность оценки. Доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объёма выборки.
27. Понятие о критерии согласия.
28. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции.
29. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.
30. Определение параметров нелинейной регрессии методом наименьших квадратов.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В задачах **1 - 20** найти вероятности указанных событий, пользуясь классическим определением вероятности.

1. Автотракторный парк фермы содержит 50 машин, из них 10 комбайнов и 15 тракторов. Найти вероятность того, что взятая наудачу машина будет трактор.
2. Числа от 1 до 15 написаны на 15 мячах (по одному на каждом мяче). Выбирается наугад один мяч. Чему равна вероятность того, что число, написанное на этом мяче четное?
3. В результате ряда испытаний обнаружено, что при 200 выстрелах стрелок попадет в цель в среднем 190 раз. Какова вероятность P поражения цели этим стрелком.
4. Бросаются одна за другой две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков более 28?
5. Из букв слова УРАВНЕНИЕ выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет согласной?

6. Бросаются одна за другой две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков более 10 очков?
7. Числа от 1 до 15 написаны на 15 мячах (по одному на каждом мяче). Выбирается наугад один мяч. Чему равна вероятность того, что число, написанное на этом мяче, является простым?
8. Бросают игральную кость. Какова вероятность выпадения четного числа очков?
9. Фабрика выпускает сумки. В среднем на 180 качественных сумок приходится две сумки со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.
10. В среднем из 150 аккумуляторов, поступивших в продажу, 9 неисправны. Найдите вероятность того, что один купленный аккумулятор окажется исправным.
11. В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной.
12. Лотерея состоит из 1000 билетов, среди них 200 выигрышных. Наугад вынимается один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?
13. Из букв слова УРАВНЕНИЕ выбирается наугад одна буква. Какова вероятность, что эта буква будет гласной?
14. Из хорошо тасованной колоды, содержащей 52 карты, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что она окажется бубновой масти.
15. Бросаются одна за другой две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков равна 24?

16. Из хорошо тасованной колоды, содержащей 52 карты, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что она окажется черной масти.

17. Числа от 1 до 15 написаны на 15 мячах (по одному на каждом мяче). Выбирается наугад один мяч. Чему равна вероятность того, что число, написанное на этом мяче, делится на 5?

18. Бросают игральную кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?

19. Из хорошо тасованной колоды, содержащей 52 карты, наугад выбирается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта либо туз, либо король, либо дама, либо валет, либо десятка.

20. Бросаются одна за другой две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение выпавших очков более трех очков?

В задачах **21 - 40** найти вероятности указанных событий, пользуясь правилами сложения и умножения вероятностей.

21. В мастерской 2 мотора работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа 1-й мотор не потребует внимания мастера, равна 0,9; для второго – 0,85. Найти вероятность того, что в течение часа ни один из моторов не потребует внимания мастера.

22. Три крысы обучаются выполнению трех различных заданий (по одной крысе на каждое задание). Вероятность того, что крысы выполняют свои задания за одну минуту составляет соответственно $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Какова вероятность того, что все три крысы выполнят свои задания за одну минуту?

23. В тире 5 ружей, вероятности попадания, из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если, стреляющий берет одно из ружей наугад.

24. Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны 0,7 и 0,8. Найти вероятность поражения цели при выстрелах обоими орудиями.

25. Из аэровокзала отправились два автобуса – экспресса к трапам самолетов. Вероятность прибытия каждого автобуса в аэропорт равна 0,95. Найти вероятность того, что хотя бы один автобус прибудет вовремя.

26. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,85. Какова вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего.

27. Для сигнализации об аварии на поливной системе установлены два работающих независимо друг от друга сигнализатора. Для первого сигнализатора вероятность того, что он сработает при аварии, равна 0,95; для второго – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает один сигнализатор.

28. Рабочий обслуживает 3 станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,85. Какова вероятность того, что в течение часа все три станка потребуют внимания.

29. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для каждого из них соответственно равна 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что в цель попадет только один стрелок.

30. Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятность попадания в цель для каждого из них соответственно равна 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что в цель попадет только два стрелка.
31. Четыре пловца взяли старт на соревнованиях по плаванию. Вероятность уложения в рекордное время у 1-го – 0,95; у 2-го – 0,92; у 3-го – 0,9; у 4-го – 0,88. Найти вероятность того, что: все пловцы станут рекордсменами.
32. Четыре пловца взяли старт на соревнованиях по плаванию. Вероятность уложения в рекордное время у 1-го – 0,95; у 2-го – 0,92; у 3-го – 0,9; у 4-го – 0,88. Найти вероятность того, что: только два пловца станут рекордсменами.
33. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет либо в первую, либо во вторую область.
34. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что только один из стрелков поразит цель.
35. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что только два стрелка поразят цель.
36. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что все три стрелка поразят цель.

37. В ящике имеется 10 одинаковых деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает деталь, записывает цвет и возвращает деталь в ящик. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.

38. В ящике имеется 10 одинаковых деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает деталь, записывает цвет и не возвращает деталь в ящик. Найти вероятность того, что три извлеченные детали окажутся окрашенными.

39. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку, равна 0,1, второй - 0,15, третий - 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении будет допущена ошибка одним исследователем.

40. Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку, равна 0,1, второй - 0,15, третий - 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении будет допущена ошибка двумя исследователями.

В задачах **41 - 60** найти вероятности указанных событий, пользуясь формулой полной вероятности или формулой Бейеса.

41. В сборочный цех поступили детали с трех станков. На первом станке изготовлено 51% деталей от их общего количества, на втором станке 24% и на третьем 25%. При этом на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, на втором 80% и на третьем 70%. Используя формулу полной вероятности определить, какова вероятность того, что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

42. Сборщик получил три коробки деталей, изготовленных заводом №1 и две коробки - изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8; а завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь.

43. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготавливают детали одного наименования. На первом станке изготавливают 10%, на втором 30%, на третьем 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть, бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 - если на втором станке и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется бездефектной.

44. Двигатель может работать в двух режимах: нормальном и форсированном. Нормальный режим наблюдается в среднем в 80% всего времени работы, форсированный – в 20%. Вероятность выхода из строя двигателя при работе в нормальном режиме за некоторое время равна 0,1; в форсированном – 0,7. Какова вероятность того, что двигатель не выйдет из строя за это время?

45. Банк может выдать кредит одному из трех клиентов с вероятностью $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}3$; $p_3 = 0{,}3$ соответственно. Вероятность возврата кредита для первого клиента равна 0,99, для второго 0,91 и для третьего 0,89. Какова вероятность того, что клиент, получивший кредит, вернёт его?

46. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем первый завод поставляет – 60%, второй – 25% и третий - 15% изделий. Среди изделий первого завода - 80%, второго завода - 85%, третьего завода - 90% первосортных. Найти вероятность того, что наудачу купленное изделие будет первосортным.

47. В группе 40 стрелков, из них 10 человек стреляют отлично, 20 - хорошо, 6 -удовлетворительно, 4 - плохо. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0.9, для хорошего - 0.8, для удовлетворительного - 0.6, для плохого - 0.4. Вызывают наугад одного из стрелков. Он производит 1 выстрел. Найти вероятность того, что он попал в цель.

48. Три станка выпускают одинаковые детали. Дневная выработка первого станка составляет 6000 изделий, второго - 1000 изделий, третьего - 3000 изделий. Детали проверяются с точки зрения одного определенного признака, причем первый станок выпускает 10% деталей данного свойства, второй - 8%, третий -15%. На складе продукция трех станков смешивается. Какова вероятность выбора из этой суммарной партии детали с определенным свойством?

49. Для изготовления продукции используются детали, поступающие от четырёх фирм. Первая фирма поставила 2000 деталей, вторая – 1700, третья – 200 и четвертая поставила 2000. Известно, что процент бракованных деталей среди продукции первой фирмы составляет 2%, второй – 3%, третьей – 2% и четвертой – 5%. Какова вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бракованной?

50. В магазин привозят товары от трех поставщиков: первый привозит 20%, второй - 30% и третий - 50% всего поступающего товара. Известно, что 10% товара первого поставщика высшего сорта, для второго и третьего поставщика эти значения равны 5% и 20%. Найти вероятность того, что случайно выбранный товар окажется высшего сорта.

51. Пусть имеем три урны с шарами. В первой урне *7* белых и *3* черных шара. Во второй урне *7* белых и *7* черных шаров. В третьей урне *3* белых и *7* черных шаров. Наугад выбрали одну урну. Из этой урны наугад вынули шар. Какова вероятность, что вынули белый шар?

52. В мастерской на двух станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что вероятность изготовления стандартной детали на первом станке равна 0,92, а на втором – 0,8. Изготовленные на обоих станках детали хранятся на складе в нерассортированном виде. При этом деталей, изготовленных на первом станке в 3 раза больше, чем на втором. Определить вероятность того, что наугад взятая деталь окажется стандартной.

53. В вычислительной лаборатории имеются шесть клавишных автоматов и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчёта автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчёт на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчёта машина не выйдет из строя.

54. На Европейской территории России изучаются случаи весенних заморозков, полагая, что заморозки наблюдаются при температуре воздуха ниже - 2^0. Известно, что если перенос воздушных масс весной западный, то вероятность заморозков 0,03; при восточном переносе – 0,25; при северном (меридиональном) – 0,6 и комбинированных типах – 0,12. Известно также, что вероятность западного переноса воздушных масс весной – 0,65; восточного – 0,11; меридионального – 0,1; комбинированных – 0,14. Вычислить, какова вероятность заморозков весной.

55. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80% всех случаях работы прибора; ненормальный в 20%. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном – 0,7. Найти полную вероятность выхода прибора из строя за время t.

56. Вероятность обращения фирмы за кредитом в один из четырёх банков соответственно равны $p_1 = 0{,}3$; $p_2 = 0{,}2$; $p_3 = 0{,}4$ и $p_4 = 0{,}1$. Вероятность отказа в кредите в первом банке равна 0,4; во втором – 0,5, в третьем и четвёртом банках эти вероятности соответственно равны 0,2 и 0,7. Найти вероятность того, что фирма получит кредит после обращения в наугад взятый банк?

57. Два бухгалтера обрабатывают равное количество счетов. Вероятность того, что первый бухгалтер допустит ошибку равна 0,004, для второго эта вероятность равна 0,01. При проверке счетов была найдена ошибка. Найти вероятность того, что её допустил первый бухгалтер.

58. Акционер приобрёл акции трёх компаний. 50% акций составили акции компании A, 30% - компании B, 20% - компании C. Вероятность получения дивидендов в течении года в компании A составляет 0,8, в B – 0,7, в C – 0,5. В конце года акционер получит дивиденды только одной компании. Какова вероятность того, что это компания B?

59. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготавливают детали одного наименования. На первом станке изготавливают 10%, на втором 30%, на третьем 60% всех деталей. Вероятность каждой детали быть, бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке; 0,8 - если на втором станке и 0,9 – если на третьем станке. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь окажется дефектной.

60. На Дальнем Востоке 70% совместных предприятий занимаются экспортно-импортной деятельностью, остальные 30% - производители. В конце года 10% первых и 4% вторых не предоставили деклараций в налоговую инспекцию; предприятие нарушило законодательство. Найти вероятность того, что оно является компанией производителем.

В задачах **61 - 80** применить формулу Бернулли, локальную и интегральную теоремы Лапласа.

61. Вероятность того, что в данный день торговая база уложится норму расходов на транспорт, равна $\frac{3}{4}$. Какова вероятность того, что лишь в один из дней рабочей недели (6 дней) база уложится в норму?
62. В каждой из 6 колод карт выбирается наудачу по одной карте. Найти вероятность того, что 4 карты окажутся красной масти, а 2 - черной.
63. В цеху имеется 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включены 4 мотора; б) не менее 4 моторов.
64. При каждом выстреле из орудия вероятность поражения цели равна 0,8. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах будет сделано 3 промаха.
65. Известно, что $\frac{3}{5}$ всего числа изготовленных заводом телефонных аппаратов выпускается первым сортом. Изготовленные аппараты расположены один возле другого случайным образом. Приемщик берет первые, попавшиеся 250 штук. Чему равна вероятность того, что среди них первого сорта будет от 120 до 150 штук.
66. В магазин вошло 8 покупателей. Найти вероятность того, что 3 из них совершат покупки, если вероятность совершить покупку для каждого покупателя одна и та же - 0,3.
67. Статистикой установлено, что из каждой 1000 родившихся детей в среднем рождается 485 девочек и 515 мальчиков. В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди них не более трех девочек.

68. Вероятность допущения дефекта при производстве механизмов равна 0,4. Случайным образом отбираются 500 механизмов. Найти вероятность того, что число механизмов с дефектами окажется от 150 до 200.

69. Принимая одинаково вероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что из 4500 новорожденных будет 2300 мальчиков.

70. Вероятность того, что расход электроэнергии не превысит установленной нормы в течение одних суток, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии не превысит нормы в течение пяти суток.

71. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу поступят от 2 до 5 негодных изделий.

72. Что труднее выиграть у равносильного противника: 5 партий из 8 или 24 из 40?

73. Каждый моряк из экипажа прибывшего в порт судна с вероятностью, равной $\frac{1}{3}$, может осматривать город, остаться на корабле или находиться в ресторане. Найти вероятность того, что из 203 членов экипажа в данный момент 71 моряк осматривает город.

74. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10%.Вычислить вероятность того, что из 20 наблюдаемых телевизоров более 18 выдержат гарантийный срок.

75. Принимая одинаково вероятным рождение мальчика и девочки найти вероятность того, что из 4000 новорожденных мальчиков будет от 1980 до 2050.

76. Вероятность пройти через некоторый заболоченный участок, не промочив ноги, равна 0,6 .Какова вероятность того, что из 220 человек не

промочат ноги от 120 до 133 человек? (Предполагается, что прохожие не используют опыт друг друга).

77. Производятся независимые испытания: в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,8.Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие А появится более 79 раз.

78. Вероятность появления события А в каждом из 21 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится в большинстве испытаний.

79. Многие ботаники делали опыты по скрещиванию желтого гороха. По гипотезе Менделя вероятность появления зеленого гороха в таких опытах равна $\frac{1}{4}$. Какова вероятность того, что при 34153 скрещиваниях зеленый горох будет получен от 8493 до 8507 раз?

80. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 и не более 1500 раз.

В задачах **81 – 100** две независимые дискретные случайны величины *x* и *y* заданы своими законами распределения. Найти математическое ожидание и дисперсию для случайной величины $Z = 3X - 2Y$.

81.

X	–2	–1	0	3
p	0,2	0,5	0,1	0,2

Y	–3	2
p	0,3	0,7

82.

X	–5	–4	–2	3
p	0,1	0,5	0,2	0,2

Y	–8	–1
p	0,7	0,3

83.

X	–6	–3	2	1
p	0,3	0,3	0,2	0,2

Y	–2	8
p	0,2	0,8

84.

X	–4	–2	–1	3
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Y	–3	–1
p	0,4	0,6

85.

X	–2	0	1	4
p	0,5	0,1	0,2	0,2

Y	1	3
p	0,2	0,8

86.

X	–7	–5	–2	3
p	0,4	0,4	0,1	0,1

Y	–3	4
p	0,1	0,9

87.

X	–1	2	4	8
p	0,2	0,5	0,1	0,2

Y	–2	1
p	0,8	0,2

89.

X	–8	–6	–1	5
p	0,5	0,1	0,2	0,2

Y	3	7
p	0,2	0,8

90.

X	–2	1	3	–2
p	0,1	0,1	0,3	0,1

Y	7	10
p	0,1	0,9

91.

X	–7	0	2	6
p	0,5	0,1	0,3	0,1

Y	–3	2
p	0,3	0,7

92.

X	–4	–1	3	8
p	0,1	0,6	0,2	0,1

Y	1	4
p	0,6	0,4

93.

X	–5	–2	3	7
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Y	1	5
p	0,2	0,8

94.

X	–3	–1	0	2
p	0,3	0,2	0,2	0,3

Y	–3	2
p	0,5	0,5

95.

X	–8	–6	1	3
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Y	2	8
p	0,3	0,7

96.

X	–2	–1	3	8
p	0,1	0,5	0,2	0,2

Y	1	5
p	0,7	0,3

97.

X	–3	0	2	7
p	0,1	0,6	0,2	0,1

Y	3	4
p	0,2	0,8

98.

X	–5	1	2	4
p	0,2	0,3	0,1	0,4

Y	2	3
p	0,4	0,6

99.

X	–3	2	4	6
p	0,3	0,2	0,2	0,3

Y	3	7
p	0,9	0,1

100.

X	–3	–7	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Y	2	4
p	0,3	0,7

В задачах **101 – 120** случайная величина X задана функцией распределения вероятностей $F(x)$. Найти:

а) вероятность попадания случайной величины X в интервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$;

б) плотность распределения вероятностей случайной величины X;

в) математическое ожидание случайной величины X.

101. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -1, \\ \frac{1}{4}(x+1)^2, & \text{при } -1<x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

102. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le 0, \\ \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x, & \text{при } 0<x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

103. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -1, \\ \frac{1}{25}(x+1)^2, & \text{при } -1<x\le 4, \\ 1, & \text{при } x>4. \end{cases}$

104. $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -2, \\ \frac{1}{9}(x+2)^2, & \text{при } -2<x\le 1, \\ 1, & \text{при } x>1. \end{cases}$

105. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{5}x^2+\frac{4}{5}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

106. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

107. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

108. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{7}x^2+\frac{6}{7}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

109. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le -\frac{1}{2}, \\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2, & при \quad -\frac{1}{2}<x\le \frac{1}{2}, \\ 1, & при \quad x>\frac{1}{2}. \end{cases}$

110. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le -2, \\ \frac{1}{16}(x+2)^2, & при \quad -2<x\le 2, \\ 1, & при \quad x>2. \end{cases}$

111. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

112. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le -1, \\ \frac{1}{9}(x+1)^2, & при \quad -1<x\le 2, \\ 1, & при \quad x>2. \end{cases}$

113. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le -1, \\ \frac{1}{16}(x+1)^2, & при \quad -1<x\le 3, \\ 1, & при \quad x>3. \end{cases}$

114. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{6}x^2+\frac{5}{6}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

115. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le \frac{1}{4}, \\ \left(x-\frac{1}{4}\right)^2, & при \quad \frac{1}{4}<x\le \frac{5}{4}, \\ 1, & при \quad x>\frac{5}{4}. \end{cases}$

116. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le \frac{1}{5}, \\ \left(x-\frac{1}{5}\right)^2, & при \quad \frac{1}{5}<x\le \frac{6}{5}, \\ 1, & при \quad x>\frac{6}{5}. \end{cases}$

117. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le -2, \\ \frac{1}{49}(x+2)^2, & при \quad -2<x\le 5, \\ 1, & при \quad x>5. \end{cases}$

118. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x, & при \quad 0<x\le 2, \\ 1, & при \quad x>2. \end{cases}$

119. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{27}x^2+\frac{2}{9}x, & при \quad 0<x\le 3, \\ 1, & при \quad x>3. \end{cases}$

120. $F(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x, & при \quad 0<x\le 1, \\ 1, & при \quad x>1. \end{cases}$

В задачах **121 - 140** требуется

1. По исходным данным построить ранжированный ряд.

2. Получить интервальный ряд.

3. Построить полигон распределения относительных частот.

4. По данным интервального ряда построить гистограмму распределения.

121. Количество клубней на I растение картофеля (шт.):

23 36 15 21 27 21 23 21 33 21 25 22 21

23 21 19 18 18 23 16 22 12 18 19 20

122. Число растений на I кв.м (шт.):

40 51 43 48 53 54 61 51 56 60 42 56 50

52 38 59 40 49 50 52 48 64 72 44 51

123. Количество бобов на I растении (шт.):

26 25 22 27 21 25 27 21 27 27 29 19 24

28 25 25 25 24 25 24 24 29 31 26 18

124. Количество клубеньков на корнях I растения (шт.):

75 85 70 84 95 71 87 83 72 80 80 50 84

62 83 120 85 107 81 64 61 89 105 77 82

125. Густота стояния растений на I кв.м (шт.):

41 46 49 42 46 47 44 47 46 47 44 46 47

46 51 49 47 43 48 48 50 42 54 44 46

126. Количество бобов на растении сои (шт.):

22 12 20 14 13 19 23 17 8 12 15 21 6

10 18 9 20 10 18 16 9 13 14 19 20

127. Число колосков в колосе (шт.):

6 12 8 11 16 14 12 11 12 12 13 6 11

5 12 7 6 8 14 9 8 12 9 2 13

128. Густота всходов (шт. на I кв. м)

44 48 50 48 54 47 48 47 52 43 45 55 45

46 5 49 42 43 46 45 42 49 41 43 50

129. Высота саженцев (см)

80 72 93 92 86 98 95 85 81 84 99 81 73

107 76 85 87 74 78 102 98 83 79 74 90

130. Число сорняков на I кв.м (шт.):

31 36 38 37 32 25 31 35 43 36 26 29 35 41

34 35 28 29 37 32 30 42 28 36 29

131. Число растений на I кв.м (шт.):

37 53 41 43 34 30 39 40 36 33 44 43 42 48

42 45 22 46 46 44 32 64 35 39 49

132. Число поросят от одной свиноматки (шт.)

4 5 6 7 8 9 10 11 12 5 5 6 7 12 9

7 11 7 4 7 9 10 9 8 11

133. Число детёнышей от одной крольчихи (шт.)

3 4 5 6 7 8 9 10 7 6 4 6 10 9 4

6 4 7 5 4 5 6 9 5 5

134. Число сорняков на I кв.м (шт.):

30 42 28 36 29 38 34 27 31 26 31 26 35

30 39 34 25 33 39 32 34 38 37 33 36

135. Жирность молока коров (%)

3,5 3,6 3,7 3,8 3,9 4,0 4,0 4,0 3,7 3,6 4,0 3,8 4,0

3,8 3,9 3,8 3,9 3,9 3,5 3,9 3,9 4,0 3,9 3,8 4,0

136. Настриг шерсти с овцы (кг)

2,5 3,5 3,0 3,5 4,0 4,5 5,5 5,0 6,5 7,5 4,0 5,0 6,5

4,0 2,5 4,5 7,5 3,5 2,5 3,0 4,5 5,0 3,0 4,5 5,0

137. Высота растения овса при учете (см)

29,0 22,7 25,2 27,7 14,7 23,0 15,0 26,7 24,0 20,2 17,2

27,2 21,9 21,6 18,7 26,5 26,0 20,5 17,7 17,3 11,5 23,7

138. Длина колоса озимой ржи (см)

8,2 16,4 15,5 11,0 13,5 9,2 11,0 13,0 13,9 14,3 10,7

7,0 12,7 9,0 15,0 13,9 12,7 10,8 6,0 10,6 15,3 15,0 11,7

139. Длина колоса яровой пшеницы (см)

6,8 7,5 8,9 7,0 7,1 1,3 6,0 8,0 6,6 10,0 8,2 8,6 9,0 8,6

9,2 5,6 7,5 10,0 7,9 8,3 5,0 7,7 9,8 9, 8

140. Живой вес телёнка (кг)

20,7 19,1 26,9 25,9 32,0 26,0 23,3 23,8 26,0 25,8 27,5 29,8

23,5 24,4 28,0 18,8 21,3 22,5 28,6 25,4 22,8 24,5

В задачах **141 - 160** используя данные ряда распределения, предыдущей задачи (121-140), требуется:

1. записать вариационный ряд;

2. найти основные выборочные характеристики: $\bar{x}$, s^2, s, V, $s_{\bar{x}}$;

3. с надежностью 95% указать интервал для оценки генеральной средней $x_г$.

В задачах **161 – 180** имеются следующие данные, полученные экспериментальным путем. Предполагая, что между x и y существует функциональная зависимость установить эмпирическую формулу используя метод наименьших квадратов

161	x	1	2	3	4	5	6	$y = ax + b$
	y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17	
162	x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	$y = ax + b$
	y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	
163	x	7	8	9	10	11	12	$y = ax^2 + bx + c$
	y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,1	
164	x	1	3	5	7	9	11	$y = ab^x$
	y	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59	
165	x	19,1	25	30,1	36	40	45,1	$y = ax + b$
	y	76,3	77,8	79,75	80,8	82,35	83,9	
166	x	5	6	7	8	9	10	$y = ax^2 + bx + c$
	y	3,3	5,9	6,3	6,3	6,5	5,1	
167	x	19	25	30	36	40	45	$y = ax + b$
	y	76,4	77,6	79,8	80,7	82,4	83,8	
168	x	3	4	5	6	7	8	$y = ax + b$

	y	2	4,7	7,6	10,9	13,8	15,6	
169	x	1	2	3	4	5	6	$y = ax^2 + bx + c$
	y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,3	
170	x	0	1	2	3	4	5	$y = ax + b$
	y	4,6	6,3	8,4	9,3	11,7	13,2	
171	x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	$y = ab^x$
	y	1,66	1,58	1,5	1,44	1,37	1,3	
172	x	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	$y = ax + b$
	y	0,69	1,44	2,08	2,74	3,52	4,36	
173	x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	$y = ax + b$
	y	0,4	0,5	0,9	1,28	1,6	1,66	
174	x	1	2	3	4	5	6	$y = ab^x$
	y	158,5	160,5	162,2	163,3	165,2	171	
175	x	-3,1	-2,1	-1,1	0	1,1	2,1	$y = ax^2 + bx + c$
	y	-0,7	-0,02	-0,5	0,8	0,91	0,79	
176	x	-0,2	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	$y = ax + b$
	y	0,96	1,4	1,56	1,74	1,92	2,04	
177	x	2	4	6	8	10	12	$y = ab^x$
	y	0,8	1,85	5,6	11	24,8	60	
178	x	1	4	9	16	25	36	$y = ax + b$
	y	0,1	3	8,1	14,1	23,9	33,7	
179	x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	$y = ax^2 + bx + c$
	y	1,2	1,1	2,35	3,05	4,4	5,5	
180	x	1	2	3	4	5	6	$y = ab^x$
	y	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1	291,6	

В задачах **181 – 200** на основе исходных данных требуется:

1) найти коэффициент корреляции и сделать вывод о тесноте и направлении линейной корреляционной связи между признаками;

2) составить уравнение прямой регрессии.

181. x – относительная влажность;

y – липкость чернозёма

x, %	19,9	20,9	26,1	29,4	30,5	40,3	44,8	47,8	55,6	58,3
y, $г/см^3$	0,0	0,6	1,1	1,2	1,7	1,7	2,6	3,4	4,2	5,8

182. x – доля концентрированных кормов в рационе коров;

y – себестоимость молока

x, %	18	22	23	24	28	28	29	30	32	33
y, $руб/ц$	16,7	15,2	14,5	18,1	17,7	22,1	19,3	17,6	17,2	21,6

183. x – среднемесячная температура воздуха;

y – сумма выпадающих за месяц осадков

x, c^0	-8	-8	-4	+3	+10	+14	+18	+16	+11	+5	-1	-5
y, *мм*	30	30	27	33	47	63	56	84	64	51	43	37

184. x – урожайность картофеля;

y – себестоимость картофеля

x, *ц/га*	96	100	108	127	139	146	151	158	161	172
y, *руб*	7,58	6,90	10,27	8,50	7,09	4,62	6,32	6,47	5,80	5,67

185. x – продуктивность коров;
y – производство молока на 100 га сельхозугодий

x, *ц*	40	37	36	34	30	29	31	27	33
y, *ц*	820	540	700	580	610	460	480	340	660

186. x – сроки уборки (кол. дней);

y - потери урожая пшеницы

x	1	2	3	4	5	6
y, *ц/га*	1,75	2,60	3,40	4,12	4,80	5,30

187. x – диаметр сосны;

y – высота сосны

x, *см*	15	15	20	20	25	25	30	35	40	40
y, *см*	19	20	18	19	21	22	23	24	25	26

188. x – вес зерна;
y - процентное содержание жира в зерне

x, *мг*	30	35	36	37	40	43	44	45	50	51
y, %	6,5	7,0	6,5	6,6	6,8	7,0	7,0	6,0	6,1	5,5

189. x – высота трёхлетней сосны;

y – длина вершинного побега трёхлетней сосны

x, *см*	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
y, *см*	3	7	7	11	11	15	19	23	23	27

190. x – удельный вес свиных туш

y - доля жира в тушах, %

$x, г/см^3$	1,05	1,04	1,04	1,04	1,03	1,03	1,03	1,02	1,02	1,01
y, %	24	29	35	36	37	38	40	43	45	50

191. x – средний надой за месяц;

y - живой вес коровы

$x, кг$	290	300	310	320	330	340	350	360	370	380
$y, кг$	330	340	400	350	450	430	450	500	520	550

192. x – возраст поросят в неделях;

y - вес поросят

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y, кг$	1,3	2,5	3,9	5,2	6,3	7,5	9,0	10,8	13,1

193. x – урожай пшеницы с участка;

y - процент содержания белка в зернах

$x, т$	9,9	10,2	11,0	11,6	11,8	12,5	12,8	13,5	14,3	14,4
y, %	10,7	10,8	12,1	12,5	12,8	12,8	12,4	11,8	10,8	10,6

194. x – основные средства совхоза (в тыс. руб.) на 100 га сельскохозяйственных угодий;

y - выход продукции на 100 га сельскохозяйственных угодий в тыс. рублей

x	11,3	12,9	13,6	16,8	18,8	22,0	23,7	26,6	27,5
y	13,2	15,6	17,2	18,8	20,2	22,4	23,0	24,4	24,6

195. x – водный баланс почвы, знак “ –“ у признака X избыток,

а “+” - недостаток влаги;

y – урожайность овса

$x, мм$	-30	-30	-20	-20	-10	-10	0	+30	+40	+40
$y, ц/га$	27	35	37	41	35	38	42	45	37	43

196. x – процент насыщения севооборота пшеницы;

y - урожай пшеницы с делянки

x, %	20	20	40	40	60	60	80	80	100	100
y, *кг*	90,3	86,6	84,0	79,8	81,5	78,8	80,2	75,5	59,6	62,3

197. x – доза азота;

y – урожай сои с делянки

x	0	0	30	30	60	60	90	90	120	120
y, *кг*	12,1	13,1	13,3	14,0	13,9	12,9	12,9	13,8	11,6	9,1

198. x – доза азота;

y – урожай ячменя с делянки

x	0	0	30	30	60	60	90	90	120	120
y, *кг*	27,2	29,1	28,7	30,6	31,7	33,6	30,4	32,0	26,5	28,5

199. x – доза азота;

y – урожай пшеницы с делянки

x	0	0	30	30	60	60	90	90	120	120
y, *кг*	18,3	20,4	19,9	21,9	22,9	25,0	24,4	26,2	22,3	24,8

200. x – доза фосфора;

y – урожай сои с делянки

x	0	0	45	45	60	60	90	90	120	120
y, *кг*	18,3	16,0	16,8	17,3	18,1	18,5	20,5	21,1	20,2	21,4

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО
ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Выполнил: студент _____курса____группы
направление подготовки______
профиль подготовки_________
заочной формы обучения
шифр____________________
(номер зачетной книжки)
Ф.И.О.___________________

Благовещенск
20..

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3875	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1877	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,1	0001338									
4,5	000016									
5,0	0000015									

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dx$

целые и десятые доли x	Сотые доли x									
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	0,0000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39455	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49815	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,0	0,49865	**3,5**	0,49977	**4,0**	0,499968	**4,5**	0,4999966
3,1	0,49903	**3,6**	0,49984	**4,1**	0,499979	**4,6**	0,4999979
3,2	0,49931	**3,7**	0,49989	**4,2**	0,499987	**4,7**	0,4999987
3,3	0,49952	**3,8**	0,499993	**4,3**	0,499991	**4,8**	0,4999992
3,4	0,49966	**3,9**	0,499995	**4,4**	0,499995	**4,9**	0,4999995

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Таблица значений функции $P_n(k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	0,09048	0,00452	0,00015	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,2	0,81873	0,16375	0,01538	0,00109	0,00006	0,00000	0,00000	0,00000
0,3	0,74082	0,22225	0,03334	0,00333	0,00025	0,00002	0,00000	0,00000
0,4	0,67032	0,26813	0,05813	0,00715	0,00072	0,00006	0,00000	0,00000
0,5	0,69653	0,30327	0,07582	0,01264	0,00518	0,00016	0,00001	0,00000
0,6	0,54881	0,32929	0,09879	0,01976	0,00296	0,00036	0,00004	0,00000
0,7	0,49659	0,34761	0,12166	0,02839	0,00497	0,00070	0,00008	0,00001
0,8	0,44933	0,35946	0,14379	0,03834	0,00767	0,00123	0,00016	0,00002
0,9	0,40657	0,36591	0,16466	0,04940	0,01112	0,00200	0,00030	0,00004
1	0,36788	0,36788	0,18394	0,06131	0,01533	0,00307	0,00051	0,00007
2	0,13534	0,27067	0,27067	0,18045	0,09022	0,03609	0,01203	0,00344
3	0,04979	0,14936	0,22404	0,22404	0,16803	0,10082	0,05041	0,02160
4	0,01832	0,07326	0,14653	0,19537	0,19537	0,15629	0,10420	0,05954
5	0,00674	0,03369	0,08422	0,14037	0,17547	0,17547	0,14622	0,10445
6	0,00248	0,01487	0,04062	0,08924	0,13385	0,16062	0,16062	0,13768
7	0,00091	0,00638	0,02234	0,05213	0,09123	0,12772	0,14900	0,14900

Таблица значений функции $P(k\le m)=e^{-\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}$

λ \ m	0	1	2	3	4	5	6	7
0,1	0,90484	0,99532	0,99985	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,2	0,81873	0,93248	0,99885	0,99904	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,3	0,74082	0,96306	0,99640	0,99973	0,99998	1,00000	1,00000	1,00000
0,4	0,67032	0,93845	0,99207	0,99922	0,99994	1,00000	1,00000	1,00000
0,5	0,69653	0,90980	0,98561	0,99825	0,99983	0,99999	1,00000	1,00000
0,6	0,54881	0,87810	0,97689	0,99664	0,99961	0,99996	1,00000	1,00000
0,7	0,49659	0,84420	0,96586	0,99425	0,99921	0,99991	0,99999	1,00000
0,8	0,44933	0,80879	0,95258	0,99092	0,99859	0,99982	0,99998	1,00000
0,9	0,40657	0,77248	0,93714	0,98654	0,99766	0,99966	0,99996	1,00000
1	0,36788	0,73576	0,91970	0,98101	0,99634	0,99941	0,99992	0,99999
2	0,13534	0,40601	0,67668	0,85712	0,94735	0,98344	0,99547	0,99890
3	0,04979	0,19915	0,42319	0,64723	0,81526	0,91608	0,96649	0,98810
4	0,01832	0,09158	0,23810	0,43347	0,62792	0,81548	0,88876	0,94778
5	0,00674	0,04043	0,12456	0,26503	0,44049	0,61596	0,76218	0,86663
6	0,00248	0,01735	0,06197	0,15120	0,28506	0,44568	0,60630	0,74398
7	0,00091	0,00730	0,02964	0,08177	0,17299	0,30071	0,44971	0,59871

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64
6	1,09	2,01	3,88
7	0,92	1,62	2,98
8	0,80	1,38	2,42
9	0,71	1,20	2,06
10	0,65	1,08	1,80
11	0,59	0,98	1,60
12	0,55	0,90	1,45
13	0,52	0,83	1,33
14	0,48	0,78	1,23
15	0,46	0,73	1,15
16	0,44	0,70	1,07
17	0,42	0,66	1,01
18	0,40	0,63	0,96
19	0,39	0,60	0,92
20	0,37	0,58	0,88
25	0,32	0,49	0,73
30	0,28	0,43	0,63
35	0,26	0,38	0,56
40	0,24	0,35	0,50
45	0,22	0,32	0,46
50	0,21	0,30	0,43
60	0,188	0,269	0,38
70	0,174	0,245	0,34
80	0,161	0,226	0,31
90	0,151	0,211	0,29
100	0,143	0,198	0,27
150	0,115	0,160	0,231
200	0,099	0,136	0,185
250	0,089	0,120	0,162

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Таблица значений функции $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,9	0,95	0,99
6	1,943	2,447	3,707
7	1,895	2,365	3,499
8	1,860	2,306	3,355
9	1,833	2,262	3,250
10	1,812	2,228	3,169
11	1,796	2,201	3,106
12	1,782	2,179	3,055
13	1,771	2,160	3,012
14	1,761	2,145	2,977
15	1,753	2,131	2,947
16	1,746	2,120	2,921
17	1,740	2,110	2,898
18	1,734	2,101	2,878
19	1,729	2,093	2,861
20	1,725	2,086	2,845
21	1,721	2,080	2,831
22	1,717	2,074	2,819
23	1,714	2,069	2,807
24	1,711	2,064	2,797
25	1,708	2,060	2,787
26	1,706	2,056	2,779
27	1,703	2,052	2,771
28	1,701	2,048	2,763
29	1,699	2,045	2,756

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель, Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятности. – М.: Издательский центр «Академия». 2003. – 442 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003. – 405 с.
4. Данко, П.Е., Попов А.П, Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть11. – М.: Высшая школа, 1999. – 416 с.
5. Каньшина З.И. Теория вероятностей. Благовещенск Изд-во ДальГАУ 2006. – 183 с.
6. Карасев, А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. – М.: Высшая школа, 1983. – 320 с.
7. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов. – М.: Высшее образование, 2009. – 646с.
8. Кремер, Н.Ш. Теория вероятности и математическая статистика: учебник; рек. Мин-ом образования РФ для студ. вузов, обучающихся по экономическ. спец.- 3-е изд., перераб. и доп.- М.: ЮНИТИ, 2007.- 550 с.
9. Курс высшей математики. Теория вероятностей. Лекции и практикум: учебное пособие; доп. М-вом образ. РФ / под общ. ред. И.М. Петрушко. – 3-изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 346 с.
10. Математическая статистика [Текст]: учебное пособие / сост.: Г.Н. Фролова и др. – Благовещенск: ДальГАУ, 2013. – 103 с.
11. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике. математическому программированию с решениями: учебное пособие / А.С. Шапкин. - 5-е изд. - М.: Издат.-торговая корпорац. "Дашков и К ", 2008. - 431 с.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для выполнения контрольных работ

для студентов заочной формы обучения
всех направлений бакалавриата

В редакции составителя

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 13.10.2014 г. Формат 60×90/16.
Уч.-изд.л. – 3,8. Усл.-п.л. – 5,5.
Тираж 100 экз. Заказ 10.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86