

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Г.Н. Фролова, З.И. Каньшина, Е.А. Подолько

# МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Учебно-методическое пособие  
для студентов заочной формы обучения  
экономических направлений бакалавриата*

Благовещенск  
Издательство ДальГАУ  
2015

УДК 519.2 (075.8) ББК 22.171

Фролова, Г.Н. Методы оптимальных решений: учебно-методическое пособие для экономических направлений бакалавриата / сост.: Г.Н. Фролова, З.И. Каньшина, Е.А. Подолько. – Благовещенск: ДальГАУ, 2015. – 56 с.

Содержание учебно-методического пособия полностью соответствует программе обучения бакалавров по направлению «Экономика». Тематика заданий максимально приближена к соответствующим разделам рабочей программы дисциплины «Методы оптимальных решений».

Предназначено для студентов заочной формы обучения экономических направлений бакалавриата.

Рецензент – З.Ф. Кривуца, канд. физ.-мат. наук, доцент

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета ДальГАУ (Протокол №10 от 16 июня 2015 года).

Издательство ДальГАУ

2015

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....</b>	<b>4</b>
1.1. Основные понятия.....	4
1.2. Графический метод решения задач линейного программирования .....	5
1.2.1. Графический метод решения ЗЛП с двумя переменными.....	5
1.3. Симплексный метод в линейном программировании.....	11
1.3.1. Общая постановка задачи.....	11
<b>ГЛАВА 2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА .....</b>	<b>18</b>
2.1. Постановка задачи.....	18
2.2. Нахождение исходного опорного плана.....	19
2.3. Метод потенциалов .....	22
<b>ГЛАВА 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ .....</b>	<b>29</b>
3.1. Общая формулировка задачи .....	29
3.2. Графический метод решения задач .....	30
3.3. Метод Гомори.....	33
<b>ГЛАВА 4. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ.....</b>	<b>35</b>
4.1. Постановка задачи.....	35
4.2. Алгоритм решения задачи.....	36
<b>КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА .....</b>	<b>42</b>
Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «Методы оптимальных решений» .....	42
Задание 1 .....	43
Задание 2 .....	46
Задание 3 .....	51
Задание 4 .....	53
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	<b>56</b>

# ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

## 1.1. Основные понятия

Исследование различных процессов, в том числе и экономических, обычно начинается с их моделирования, т.е. отражения реального процесса через математическое соотношение. При этом составляются уравнения или неравенства, которые связывают различные показатели (переменные) исследуемого процесса, образуя систему ограничений. В этих соотношениях выделяются такие переменные, меняя которые можно получить оптимальное значение основного показателя данной системы (прибыль, доход, затраты и т.д.). Методы, позволяющие решать указанные задачи, объединяются под общим названием «методы оптимальных решений».

Методы оптимальных решений – это раздел математики, посвящённый решению задач, связанных с нахождением экстремумов функций нескольких переменных при наличии ограничений на переменные.

С помощью методов математического программирования решаются задачи о распределении ресурсов, планировании выпуска продукции, ценообразовании, транспортные задачи и другое.

Построение математической модели экономической задачи включает следующие этапы:

- 1) выбор переменных задачи;
- 2) составление системы ограничений;
- 3) выбор целевой функции.

Переменными задачи называются величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые полностью характеризуют экономический процесс. Их обычно записывают в виде вектора  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Система ограничений – система уравнений или неравенств, которым удовлетворяют переменные задачи.

Целевая функция – функция переменных, которая характеризует качество выполнения задачи и экстремум которой требуется найти.





$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = L_0$$

Прямая, уравнение которой получено из целевой функции при равенстве ее постоянной величине, называется линией уровня.

Чтобы установить направление возрастания (убывания) целевой функции, найдем ее частные производные:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = c_2$$

Они показывают скорость ее возрастания вдоль соответствующей оси.

Вектор  $C=(c_1;c_2)$  называется градиентом функции, он показывает направление наискорейшего возрастания целевой функции.

Вектор  $C=(c_1;c_2)$  перпендикулярен к прямой  $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 = L_0$ .

Таким образом, алгоритм решения ЗЛП с двумя переменными графическим методом таков:

1. С учетом системы ограничений строим область допустимых решений.
2. Строим вектор  $C=(c_1;c_2)$  наискорейшего возрастания целевой функции.
3. Проводим произвольную линию уровня  $L=L_0$  (проще всего провести линию  $L=0$  перпендикулярно вектору  $C$ ).
4. При решении задачи на  $\max$  перемещаем линию уровня  $L=L_0$  в направлении вектора  $C$ , так чтобы она касалась области допустимых решений в ее крайней точке. В случае решения задачи на  $\min$  перемещаем линию уровня  $L=L_0$  в антиградиентном направлении.
5. Определяем оптимальный план  $X^*=(x_1^*;x_2^*)$  и экстремальное значение целевой функции  $L^*=L(X^*)$ .

Если окажется, что линия уровня параллельна одной из сторон ОДР, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны, а задача линейного программирования будет иметь бесчисленное множество решений. Говорят, что такая задача ЛП имеет альтернативный оптимум. Ее решение находится по формуле:

$$X = (1-t) \cdot X_1 + t \cdot X_2, \text{ где } 0 \leq t \leq 1$$

$X_1, X_2$  - оптимальное решение в угловых точках стороны ОДР.

**Пример.** На предприятии имеется три вида сырья и можно производить два вида продукции. Данные о расходе сырья на производство единицы продукции, запасов сырья и прибыли от реализации единицы продукции предоставлены в таблице

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на 1 ед. продукции	
		<i>A</i>	<i>B</i>
1	45	3	4
2	31	5	2
3	30	2	3
Прибыль от реализации 1 ед. продукции		7	5

Найти оптимальный план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольшую прибыль. Решить задачу графическим методом.

**Решение.** Составим математическую модель. Обозначим через  $x_1$  и  $x_2$  выпуск продукции *A* и *B* соответственно. Затраты материала первого сорта на план  $\bar{x}(x_1, x_2)$  составят  $3x_1 + 4x_2$ , и они не должны превосходить запасов, т.е. 45 кг:

$$3x_1 + 4x_2 \leq 45.$$

Аналогичны ограничения по материалу второго сорта:

$$5x_1 + 2x_2 \leq 35$$

и по материалу третьего сорта

$$2x_1 + 3x_2 \leq 30.$$

Прибыль от реализации  $x_1$  единиц *A* и  $x_2$  – *B* составит  $L = 7x_1 + 5x_2$  – целевая функция задачи.

Получили модель задачи:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 45, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 31, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$L=7x_1+5x_2 \rightarrow \max .$$

Теперь дадим геометрическую интерпретацию задачи. Рассмотрим систему неравенств, определяющих множество допустимых планов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 45, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 31, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим граничную прямую  $l_1$ :  $3x_1+4x_2=45$

$x_1$	0	45/3
$x_2$	45/4	0

Прямая  $3x_1+4x_2=45$  плоскость  $ХОУ$  разделила на две части. Чтобы определить полуплоскость, точки которой удовлетворяют неравенству  $3x_1+4x_2<45$ , следует "испытать" одну точку. Проще подставить 0 (0,0). Получим верное неравенство:  $0<45$ . Следовательно, полуплоскость включает точку 0 (0,0). Этот факт отмечается стрелочками.

Определяем положение полуплоскостей, отвечающих каждому неравенству и находим пересечение этих полуплоскостей. Два последних условия в системе ограничений означают, что допустимые планы принадлежат неотрицательному квадрату. Тем самым областью решения системы является четырехугольник  $OABC$  (рисунок 1.2).

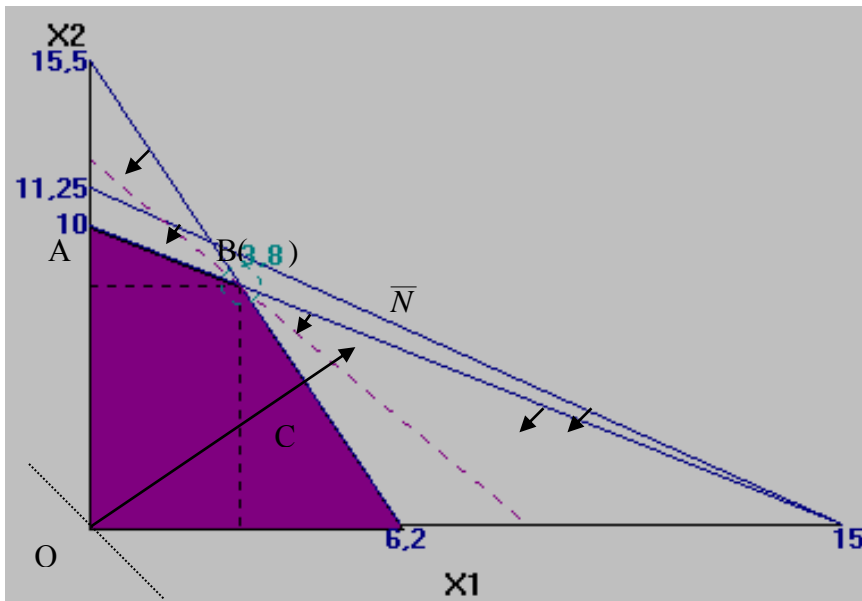


Рис. 1.2. Иллюстрация графического метода

Линии уровня целевой функции  $L$  задаются уравнением:  $7x_1 + 5x_2 = const$ .

Легко видеть, что они образуют семейство параллельных прямых. Вектор  $N=(7, 5)$  называется целевым, он перпендикулярен линиям уровня. Этот вектор указывает направление, двигаясь в котором, мы переходим от меньших значений  $L$  к большим, т.е. он указывает направление возрастания функции  $L$ . Вершина многоугольника, через которую проходит последняя линия уровня, даст наибольшее значение целевой функции. На рисунке 1.2 видно, что максимальное значение будет достигнуто в вершине  $B$ . Найдём координаты точки  $B$ . Эта точка лежит на пересечении прямых

$$5x_1 + 2x_2 = 31, \quad 2x_1 + 3x_2 = 30.$$

Решая систему из двух уравнений с двумя неизвестными, находим, что точка  $B$  имеет координаты  $x_1=3$ ,  $x_2=8$ . Подставляя в целевую функцию найденные значения, получим:  $L_{\max} = 7 \cdot 3 + 5 \cdot 8 = 61$ .



Таблица 1.1

	0	$C_1$	$C_2$		$C_n$	0	0		0		
$C_i$	Баз	$b_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$	$x_{n+1}$	$x_{n+2}$	...	$x_{n+m}$	$\Theta$
0	$x_{n+1}$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$	1	0	...	0	
0	$x_{n+2}$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$	0	1	...	0	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
0	$x_{n+m}$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$	0	0	...	1	
	$a_{ok}$	0	$-C_1$	$-C_2$		$-C_n$	0	0		0	

Этой таблице соответствует опорное решение  $X_0=(0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_m)$  и соответствующее ему значение целевой функции  $L_0=0$ .

Последняя строка таблицы называется оценочной и заполняется по формуле оценок

$$a_{ok} = \sum_i c_i \cdot a_{ik} - c_k \quad (1.8)$$

(Оценка при неизвестной  $x_k$  равна сумме произведений элементов первого столбца на соответствующие элементы столбца  $x_k$  минус  $C_k$ , стоящее над столбцом).

Условием оптимальности решения при  $L \rightarrow \max$  является неотрицательность оценок ( $a_{ok} \geq 0$ ). Симплексным методом решается каноническая задача линейного программирования, у которой система ограничений каноническая, а целевая функция  $L$  выражена через свободные неизвестные.

### Алгоритм симплексного метода

1. Приводим систему ограничений задачи к канонической и записываем в симплексную таблицу. Элементы оценочной строки вычисляются по формуле оценок (1.8).

2. Если среди оценок симплексной таблицы при решении на максимум нет отрицательных оценок, то соответствующее опорное решение является оптимальным.

3. Если в оценочной строке содержится отрицательная оценка, а в столбце над ней нет положительных элементов, то целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых (неотрицательных) решений. Задача не имеет оптимального решения.

4. Если в каждом столбце с отрицательной оценкой имеется хотя бы один положительный элемент, то переходим к "лучшему" опорному решению. Для этого:

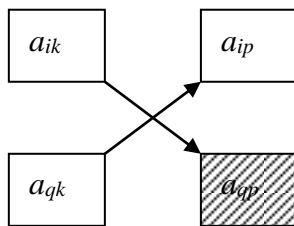
а) выбираем разрешающий столбец по наименьшей отрицательной оценке;

б) выбираем разрешающую строку. Для этого вычисляем  $\theta$  как отношение свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца. Выделяем разрешающий элемент, соответствующий наименьшему  $\theta$ ;

в) элементы разрешающей строки делим на разрешающий элемент, записываем единичные столбцы, соответствующие базисным неизвестным;

г) элементы остальных строк вычисляем по формуле прямоугольников

$$a'_{ik} = \frac{a_{ik} \cdot a_{qp} - a_{qk} \cdot a_{ip}}{a_{qp}} \quad (1.9)$$



д) элементы оценочной строки также вычисляются по формуле «прямоугольников» и для контроля вычислений по формуле оценок.

Процесс вычислений продолжается до тех пор, пока не возникнут ситуации пунктов 2 или 3.

**Пример.** На предприятии имеется три вида сырья и можно производить два вида продукции. Данные о расходе сырья на производство единицы

продукции, запасов сырья и прибыли от реализации единицы продукции представлены в таблице

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на 1 ед. продукции	
		А	В
1	45	3	4
2	31	5	2
3	30	2	3
Прибыль от реализации 1 ед. продукции		7	5

Найти оптимальный план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольшую прибыль. Решить задачу симплексным методом.

**Решение.** Математическая модель задачи составлена ранее. Обозначив через  $x_1$  и  $x_2$  выпуск продукции  $A$  и  $B$  соответственно, получили модель задачи:

$$L=7x_1+5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 45, \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 31, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Вводом балансовых переменных  $x_3, x_4, x_5$  приводим модель к каноническому виду:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 45, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 31, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 30, \\ x_j \geq 0, (j = 1, \dots, 5), \end{cases}$$

$$L=7x_1+5x_2 \rightarrow \max .$$

Составим симплексную таблицу 1.2.

Таблица 1.2

$c_j$	Базис ( $x_j$ )	$b_i$	7	5	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	45	3	4	1	0	0	
0	$x_4$	31	5	2	0	1	0	
0	$x_5$	30	2	3	0	0	1	
	$a_{0k}$	0	-7	-5	0	0	0	

Первые три строки этой таблицы содержат в условной форме систему уравнений (ограничений) в канонической задаче, а именно: в столбце " $b_i$ " записываются свободные члены уравнений, в столбцах " $x_1$ ", " $x_2$ ", ..., " $x_5$ " – коэффициенты при соответствующих неизвестных этой системы.

Слева от столбца " $b_i$ " в столбце " $x_j$ " выписываются базисные неизвестные, содержащиеся в соответствующих уравнениях системы.

Верхняя строка и крайний левый столбец содержат коэффициенты при соответствующих неизвестных в целевой функции  $L$ .

Последняя строка называется оценочной, а элементы строки – оценками.

Оценки при неизвестных вычисляются по правилу: оценка при  $x_j$  равна сумме произведений элементов первого столбца на соответствующие элементы столбца  $x_j$  минус коэффициент  $c_j$ , записанный над столбцом  $x_j$ . Так оценка при  $x_1$  равна

$$a_{01} = 0 \cdot 3 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 2 - 7 = -7.$$

Оценки при всех базисных неизвестных всегда равны нулю.

Составим симплексную таблицу 1.3.

Таблица 1.3

$c_j$	базис ( $x_j$ )	$b_i$	7	5	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	45	3	4	1	0	0	15
0	$x_4$	31	5	2	0	1	0	31/5
0	$x_5$	30	2	3	0	0	1	15
	$a_{ok}$	0	-7	-5	0	0	0	

Исходное опорное решение

$$X_1 = (0, 0, 45, 31, 30)$$

$$L_1 = 0$$

В оценочной строке две отрицательные оценки:  $-7$ ,  $-5$ . Выбираем в качестве разрешающего столбец, соответствующий  $x_1$ , т.к. оценка этого столбца ( $-7$ ) наименьшая отрицательная оценка. Разрешающая строка выбирается по

$$\theta = \min \left\{ 15, \frac{31}{5}, 15 \right\} = \frac{31}{5},$$

этот минимум достигается для 2-й строки. Итак, в базис вводим  $x_1$ , выводим из базиса  $x_4$  (таблица 1.4).

Таблица 1.4

$c_j$	базис ( $x_j$ )	$b_i$	7	5	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	132/5	0	14/5	1	-3/5	0	132/14
7	$x_1$	31/5	1	2/5	0	1/5	0	31/2
0	$x_5$	88/5	0	11/5	0	-2/5	1	88/11
	$a_{ok}$	217/5	0	-11/5	0	7/5	0	

В результате первого шага получаем второе опорное решение

$$X_2 = \left( \frac{31}{5}, 0, \frac{132}{5}, 0, \frac{88}{5} \right);$$

$$L_2 = \frac{217}{5}.$$

Таблица 1.5

$c_j$	базис ( $x_j$ )	$b_i$	7	5	0	0	0	$\theta$
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
0	$x_3$	4	0	0	1	-1/11	-14/11	
7	$x_1$	3	1	0	0	3/11	2/11	
0	$x_2$	8	0	1	0	-2/11	5/11	
	$a_{ok}$	61	0	0	0	1	1	

После выполнения 2-го шага получаем оптимальное решение:

$$X_{\text{опт}}=(3, 8, 4, 0, 0);$$

$$L_{\text{max}}=61$$

Дальнейшее увеличение  $L$  невозможно, т.к. все оценки стали неотрицательными.

Оптимальное решение исходной задачи получается отбрасыванием из  $\overline{X_{\text{опт}}}$  компонент, связанных с балансовыми переменными  $x_3, x_4, x_5$ , т.е.

$$X^*_{\text{опт}}=(3,8).$$

При этом значение  $L_{\text{max}}$  не изменится.

## ГЛАВА 2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Транспортная задача – одна из простейших задач линейного программирования, в которой речь идет о рациональной перевозке некоторого однородного продукта от производителей к потребителям.

### 2.1. Постановка задачи

Пусть однородный груз сосредоточен у  $m$  поставщиков в объемах  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Его необходимо доставить  $n$  потребителям в объемах  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Известны так же  $c_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$ ) – стоимость перевозки единицы груза от каждого  $i$ -го поставщика каждому  $j$ -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков будут вывезены полностью, запасы всех потребителей полностью удовлетворены и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

Чтобы составить математическую модель транспортной задачи, нужно ввести матрицу переменных:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix},$$

где  $x_{ij}$  – объем перевозок от каждого  $i$ -го поставщика каждому  $j$ -му потребителю.

Тогда суммарные затраты на перевозку всех грузов  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ , т.е. целевая функция имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2.1)$$

Система ограничений состоит из 2-х групп:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i=1,2,\dots,m) \text{ – запасы } i\text{-го поставщика} \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j=1,2,\dots,n) \text{ – запросы } j\text{-го потребителя} \quad (2.3)$$

Для наглядности условия транспортной задачи можно представить таблицей:

Таблица 2.1

Поставщики	Потребители				Запас груза, $a_i$
	$B_1$	$B_2$	...	$B_n$	
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	$c_{12}$ $x_{12}$	/...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
$A_2$	$c_{21}$ $x_{21}$	$c_{22}$ $x_{22}$	/...	$c_{2n}$ $x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	/...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	$c_{m2}$ $x_{m2}$	/...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Потребность в грузе, $b_j$	$b_1$	$b_2$	/...	$b_n$	

Если  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \Rightarrow$  транспортная задача закрытая и тогда она имеет

оптимальный план.

Число базисных переменных транспортной задачи равно  $m+n-1$ . Транспортная задача может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Для ее решения разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод:

- 1) нахождение исходного опорного плана
- 2) проверка этого решения на оптимальность
- 3) переход от одного опорного решения к другому.

## 2.2. Нахождение исходного опорного плана

Для нахождения исходного опорного плана можно использовать правило «северо-западного угла».

Суть его состоит в следующем: будем распределять груз начиная с верхней левой (т.е. северо-западной) клетки, двигаясь от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В эту клетку занесем меньшее из чисел  $a_1, b_1$ , т.е.  $x_{11} = \min(a_1; b_1)$ . Если  $a_1 > b_1 \Rightarrow x_{11} = b_1$  и первый потребитель  $B_1$  удовлетворен полностью. В дальнейшем 1-й столбец в расчет не принимается, в нем все остальные переменные  $x_{i1} = 0$  ( $i=2, \dots, m$ ). Двигаемся вправо по первой строке, заносим в соседнюю клетку (1,2) меньшее из чисел  $a_1 - b_1$  и  $b_2$ , т.е.  $x_{12} = \min(a_1 - b_1, b_2)$ . Если  $a_1 - b_1 < b_2$ , то запасы первого поставщика исчерпаны. Аналогично распределяется запас груза 2-го поставщика.

Если же  $b_1$  больше  $a_1$ , то  $x_{11} = \min(a_1; b_1) = a_1$ . Т.е. запас 1-го поставщика будет исчерпан. Первая строка из расчета исключается, в ней все  $x_{1k} = 0, (k=2, \dots, n)$ . Рассмотрим это правило на примере.

**Пример 1.** На складах  $A_1, A_2, A_3$  имеются запасы продукции в количествах 90, 400, 110 т соответственно. Необходимо доставить ее потребителям  $B_1, B_2, B_3$  в количествах 140, 300, 160 т соответственно.

Расходы на перевозку 1 т продукции заданы матрицей: 
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составить план перевозок, минимизирующий суммарные расходы.

**Решение.** Исходные данные этой задачи запишем в таблицу 2.2:

Таблица 2.2

Поставщики	Потребители			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2	5	2	90
$A_2$	4	1	5	400
$A_3$	3	6	8	110
Потребность	140	300	160	600=600

Результаты построения опорного плана приведены в таблице 2.3

Таблица 2.3

Поставщики	Потребители			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2	5	2	90
	90	0	0	
$A_2$	4	1	5	400
	50	300	50	
$A_3$	3	6	8	110
	0	0	110	
Потребность	140	300	160	600=600

В клетку (1,1) записываем перевозку 90т (90<140). Соответственно запас поставщика  $A_1$  исчерпан и в остальных клетках этой строки ставим 0.

В клетку(2,1) записываем груз 50т, т.к. 90т потребитель  $B_1$  уже получил (всего ему надо 140т) и первый столбец из рассмотрения исключается.

В результате распределения груза получим матрицу перевозок

$$X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 50 & 300 & 50 \\ 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}.$$

Суммарные затраты на перевозку составят:

$$L=90 \cdot 2 + 50 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 50 \cdot 5 + 110 \cdot 8 = 1810 \text{ ден.ед.}$$

Так же опорный план можно найти по правилу «минимального элемента». Суть его состоит в следующем:

Просматриваем тарифы транспортной задачи и в первую очередь заполняем клетку с min значением тарифа. При этом в клетку записывается max возможное значение поставки. Затем из рассмотрения исключается строка, соответствующая поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен. Затем снова выбираем клетку с наименьшим тарифом.

Рассмотрим это правило в условиях предыдущего примера (таблица 2.2)

Наименьший тариф «1» соответствует клетке (2,2), тогда в эту клетку записываем груз 300т (т.к.  $300 < 400$ ) и второй столбец из рассмотрения исключаем. Следующий минимальный тариф «2» соответствует клетке(1,1), записываем в нее груз 90т ( $90 < 140$ ).

Результаты построения опорного решения приведены в таблице 2.4

Таблица 2.4

Поставщики	Потребители			Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	
$A_1$	2	5	2	90
	90	0	0	
$A_2$	4	1	5	400
	0	300	100	
$A_3$	3	6	8	110
	50	0	60	
Потребность	140	300	160	600=600

Матрица перевозок при таком распределении имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Суммарные затраты на перевозку:

$$L = 90 \cdot 2 + 50 \cdot 3 + 300 \cdot 1 + 100 \cdot 5 + 60 \cdot 8 = 1610 \text{ ден.ед}$$

Из этого примера наглядно видно, что правило «минимального элемента» дает лучший результат по затратам.

### 2.3. Метод потенциалов

Найденное исходное опорное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если опорное решение является оптимальным, то ему соответствует система  $m+n$  действительных чи-

сел  $U_i$  и  $V_j$ , удовлетворяющих условиям  $U_i+V_j=c_{ij}$  для занятых клеток и  $U_i+V_j\leq c_{ij}$  для свободных клеток.

Числа  $U_i$  и  $V_j$  называются потенциалами. В таблицу добавляють строку  $V_j$  и столбец  $U_i$ . Эти числа находятся из равенства  $U_i+V_j=c_{ij}$ , для занятых клеток. Одному из потенциалов даем произвольное значение, например  $U_i=0$ , тогда находим остальные потенциалы.

Обозначим:  $\Delta_{ij}=U_i+V_j-c_{ij}$ ,

Эту оценку называют оценкой свободных клеток. Если  $\Delta_{ij}\leq 0$ , то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок  $\Delta_{ij}>0$ , то опорное решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного опорного плана к другому. Проверим на оптимальность опорный план, полученный по правилу «минимального элемента».

Проверка:

Для нахождения потенциалов составили систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_3 + v_3 = 8. \end{cases}$$

Решая ее, получим:  $U_1=0$ ,  $V_1=2$ ,  $V_2=3$ ,  $U_3=1$ ,  $U_2=-2$ ,  $V_3=7$ . Значения потенциалов записываем рядом с запасами поставщиков и с запросами потребителей в таблицу 2.5.

Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12}=0+3-5=-2<0$$

$$\Delta_{13}=0+7-2=5>0$$

$$\Delta_{21}=-2+2-4=-4<0$$

$$\Delta_{32}=1+3-6=-2<0$$

Таблица 2.5

Поставщики	Потребители			Запас	$U_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$		
$A_1$	2	5	2	90	0
	90	-	-		
$A_2$	4	1	5	400	-2
	-	300	100		
$A_3$	3	6	8	110	1
	50	-	60		
Потребность	140	300	160		
$V_j$	2	3	7		

Наличие положительной оценки свободной клетки ( $\Delta_{13} > 0$ ) свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому опорному плану. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых – свободной.

Для свободной клетки с  $\Delta_{ij} > 0$  строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого кроме одной находятся в занятых клетках; углы прямые; число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляются знаки (-) и (+). У вершин со знаком минус выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получим новое опорное решение. Это решение проверяем на оптимальность и т.д. до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Рассмотрим на примере. Оценка  $\Delta_{13} > 0$ , строим цикл для этой клетки (рисунок 2.1).

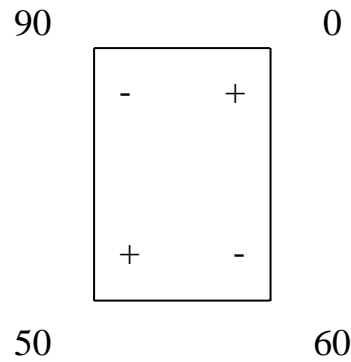


Рис. 2.1

У вершин со знаком (-) выбираем минимальный груз (60). Его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин и отнимаем у грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл (рисунок 2.2).

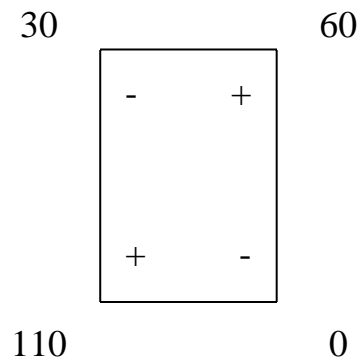


Рис. 2.2

Новое опорное решение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим на оптимальность полученное решение.

Проверка:

Для нахождения потенциалов составляем систему уравнений для занятых клеток:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 2, \\ u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_3 + v_1 = 3. \end{cases}$$

Откуда получаем  $U_1=0, V_1=2, V_3=2, V_2=-2, U_2=3, U_3=1$ .

Значения потенциалов записываем рядом с запасами поставщиков и с запросами потребителей в таблицу 2.6.

Таблица 2.6

Поставщики	Потребители			Запас	$U_i$
	$B_1$	$B_2$	$B_3$		
$A_1$	2 30	5 -	2 60	90	0
$A_2$	4 -	1 300	5 100	400	3
$A_3$	3 110	6 -	8 -	110	1
Потребность	140	300	160		
$V_j$	2	-2	2		

Находим оценки  $\Delta_{ij}$  для свободных клеток:

$$\Delta_{12} = -2 + 0 - 5 = -7 < 0$$

$$\Delta_{21} = 2 + 3 - 4 = 1 > 0$$

$$\Delta_{32} = -2 + 1 - 6 = -7 < 0$$

$$\Delta_{33} = 2 + 1 - 8 = -5 < 0$$

Опорное решение не оптимально, его можно улучшить. Оценка  $\Delta_{21} > 0$ , строим цикл для этой клетки (рисунок 2.3)

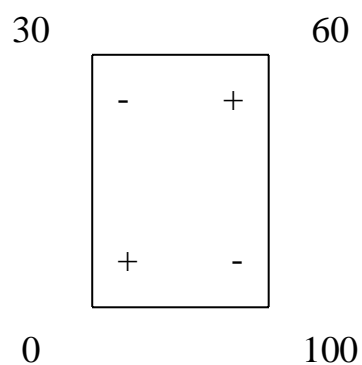


Рис. 2.3

У вершин со знаком (-) минимальный груз 30 т, его прибавляем к грузам, стоящим у положительных вершин и отнимаем у грузов, стоящих у отрицательных вершин. Получаем новый цикл (рисунок 2.4).

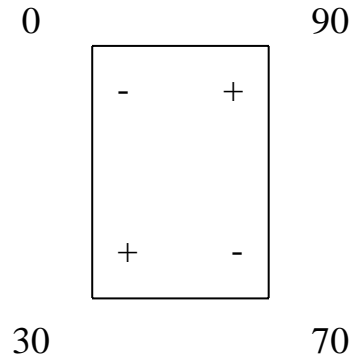


Рис. 2.4

Новое опорное решение:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим на оптимальность:

Значения потенциалов  $U_1=0$ ,  $V_3=2$ ,  $V_1=1$ ,  $V_2=-2$ ,  $U_2=3$ ,  $U_3=2$  нашли из системы уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_2 = 1, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_3 + v_1 = 3. \end{cases}$$

Значения потенциалов записываем рядом с запасами поставщиков и с запросами потребителей в таблицу 2.7.

Таблица 2.7

Поставщики	Потребители			Запас	U <sub>i</sub>
	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	B <sub>3</sub>		
A <sub>1</sub>	2	5	2	90	0
A <sub>2</sub>	4	1	5	400	3
A <sub>3</sub>	3	6	8	110	2
Потребность	140	300	160		
V <sub>j</sub>	1	-2	2		

Находим оценки для свободных клеток:

$$\Delta_{11}=1+0-2=-1<0$$

$$\Delta_{12}=-2+0-5=-7<0$$

$$\Delta_{32}=-2+2-6=-6<0$$

$$\Delta_{33}=2+2-8=-4<0$$

Все оценки свободных клеток отрицательны  $\Rightarrow$  найденное решение оптимально.

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_{min}=90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ ден. ед.}$$

Вывод: суммарные затраты на перевозку продукции составят 1280 ден.

ед. при матрице перевозок  $X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

## ГЛАВА 3. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

### 3.1. Общая формулировка задачи

Некоторые задачи линейного программирования требуют целочисленного решения. К ним относятся задачи по производству и распределению неделимой продукции (выпуск телевизоров, автомобилей и другое). В общем виде математическая модель задачи целочисленного программирования имеет вид

$$L(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i,$$

$$x_j \geq 0 \text{ - целое, } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Оптимальное решение задачи, найденное симплексным методом, часто не является целочисленным. Его можно округлить до ближайших целых чисел. Тем не менее такое округление может дать решение, не лучшее среди целочисленных решений, или привести к решению, не удовлетворяющему системе ограничений. Поэтому для нахождения целочисленного решения используют алгоритм, предложенный Гомори, который состоит в следующем.

Находят оптимальное решение задачи, применяя симплексный метод. При этом, если решение целочисленное, то задача решена. Если же оно содержит хотя бы одну дробную координату, то накладывают дополнительное ограничение по целочисленности и вычисления продолжают до получения нового решения. Если и оно является нецелочисленным, то вновь накладывают дополнительное ограничение по целочисленности. Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет получено целочисленное решение или показано, что задача не имеет целочисленного решения.

Пусть получено оптимальное решение  $X_{\text{опт}} = (f_1, f_2, \dots, f_r, 0, \dots, 0)$ , которое не является целочисленным, тогда последний шаг симплексной таблицы имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{1,r+1} & \dots & h_{1,n} & f_1, \\
x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & h_{2,r+1} & \dots & h_{2,n} & f_2, \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & h_{i,r+1} & \dots & h_{i,n} & f_i, \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_r & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & h_{r,r+1} & \dots & h_{r,n} & f_r,
\end{array}$$

где  $r$  — ранг системы ограничений;  $h_{i,r+1}$  — коэффициент симплексной таблицы  $i$ -й строки,  $(r+1)$ -го столбца;  $f_i$  — свободный член  $i$ -й строки.

Пусть  $f_i$  и хотя бы одно  $h_{ij}$  ( $j = \overline{r+1, n}$ ,  $r = \overline{1, r}$ ) — дробные числа.

Обозначим через  $[f_i]$  и  $[h_{ij}]$  целые части чисел  $f_i$  и  $h_{ij}$ .

**Определение.** Целой частью числа  $f_i$  называют наибольшее целое число, не превосходящее числа  $f_i$ .

Дробную часть чисел  $f_i$  и  $h_{ij}$  обозначим  $\{f_i\}$  и  $\{h_{ij}\}$ , она определяется следующим образом:

$$\{f_i\} = f_i - [f_i], \quad \{h_{ij}\} = h_{ij} - [h_{ij}]$$

**Пример.**

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{4}{5} \right] &= 0, & \left\{ \frac{4}{5} \right\} &= \frac{4}{5} - 0 = \frac{4}{5}, \\
\left[ \frac{8}{3} \right] &= 2, & \left\{ \frac{8}{3} \right\} &= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ -\frac{4}{5} \right] &= -1, & \left\{ -\frac{4}{5} \right\} &= -\frac{4}{5} + 1 = \frac{1}{5}, \\
\left[ -\frac{8}{3} \right] &= -3, & \left\{ -\frac{8}{3} \right\} &= -\frac{8}{3} + 3 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

**Примечания.**

1) Если  $f_i$  — дробное число, а все  $h_{ij}$  — целые числа, то задача линейного программирования не имеет целочисленного решения.

2) Ограничение целочисленности может быть наложено не на все переменные, а лишь на их часть. В этом случае задача является частично целочисленной.

### 3.2. Графический метод решения задач

При наличии в задаче линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений — неравенств она может быть решена графическим

методом.

В системе координат  $X_1OX_2$  находят область допустимых решений, строят вектор  $\bar{C}$  и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению  $\bar{C}$  для задач на максимум, находим наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В том случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум.

Рассмотрим следующую задачу.

**Пример.** Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего  $19/3$  м<sup>2</sup> площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 усл. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение 1-го комплекта оборудования 1-го вида стоит 1,0 усл. ед., 2-го вида — 3 усл. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2 м<sup>2</sup> площади, а для оборудования 2-го вида — 1 м<sup>2</sup> площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Предположим, что фирма приобретает  $x_1$  комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и  $x_2$  комплектов оборудования 2-го вида. Математическая модель задачи будет иметь вид

$$L(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 - \text{целые.} \end{cases}$$

Получим задачу целочисленного программирования, так как неизвестных только два ( $x_1$  и  $x_2$ ). Найдем решение задачи графическим способом.

Запишем уравнения граничных прямых и построим их.

$$\begin{array}{llll} 2x_1 + x_2 = 19/3 & (l_1) & l_1: & \frac{x_1}{x_2} \Big| -\frac{0}{19/3} - \frac{19/6}{0} \\ x_1 + 3x_2 = 10 & (l_2) & l_2: & \frac{x_1}{x_2} \Big| -\frac{0}{10/3} - \frac{10}{0} \end{array}$$

ОДР системы неравенств является многоугольник  $OABC$  (рисунок 3.1).

Построим основную прямую  $L=0$ , то есть  $2x_1 + 4x_2 = 0$ , проходящую через начало координат  $O(0;0)$  перпендикулярно вектору  $\bar{c} = (2;4)$ . Перемещая прямую  $L=0$  в направлении вектора  $\bar{c} = (2;4)$ , находим максимальную точку  $B$ , в которой пересекаются прямые  $l_1$  и  $l_2$ , и координаты которой определим, решив систему уравнений  $l_1$  и  $l_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 19/3 \\ x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9/5 \\ x_2 = 41/15 \end{cases}$$

Значение целевой функции  $L_{\max}$  в точке  $B (9/5; 41/15)$ ;  $L_{\max} = 2 \cdot 9/5 + 4 \cdot 41/15 = 218/15$  ед. Полученное оптимальное решение нецелочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник  $OABC$  многоугольником  $OKEMRNF$ , содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Линию уровня перемещаем по направлению  $\bar{c}$ , получим в точке  $E(1;3)$  максимальное значение целевой функции:  $L(\bar{x}_{цел})_{\max} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$  условных единиц.

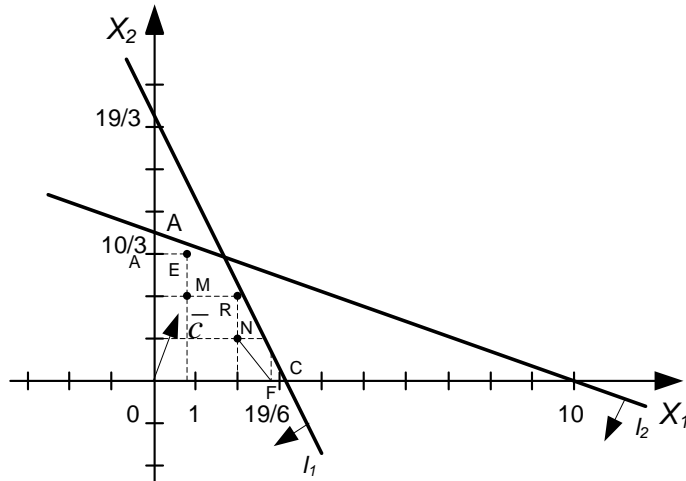


Рис. 3.1

Таким образом, фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечивает ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 условных единиц в смену.

### 3.3. Метод Гомори

Решим эту же задачу методом Гомори, её математическая модель:

$$L(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 - \text{целые} \end{cases}$$

Введем дополнительные переменные  $x_3, x_4$ , такие, что

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 19/3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10 \\ x_j \geq 0; \quad j = \overline{1;4} \end{cases}$$

Решим задачу табличным симплексным методом

$c_j$	БП	2	4	0	0	$b_i$ 10	$b_i/a_{ij}$
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$		
0	$x_3$	2	1	1	0	19/3	19/3
0	$x_4$	1	<span style="border: 1px solid black;">3</span>	0	1	10	10/3
$L$		-2	-4	0	0	0	
0	$x_3$	<span style="border: 1px solid black;">5/3</span>	0	1	-1/3	3	9/5
4	$x_2$	1/3	1	0	1/3	10/3	10
$L$		-2/3	0	0	4/3	40/3	
2	$x_1$	1	0	3/5	-1/5	9/5	
4	$x_2$	0	1	-1/5	2/5	41/15	
$L$		0	0	2/5	6/5	218/15	

Получим

$$\bar{X}_{opt} = (9/5; 41/15), \quad L(\bar{x}) = (218/15).$$

Найдём дробные части чисел  $9/5$  и  $41/15$ :

$$\left\{ \frac{9}{5} \right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}, \quad \left\{ \frac{41}{15} \right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}, \quad \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}.$$

Учитывая дробные части чисел  $3/5$  и  $-1/5$ :

$$\left\{ \frac{3}{5} \right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5}, \quad \left\{ -\frac{1}{5} \right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5},$$

составляем дополнительные ограничения целочисленности для 1-ой строки:

$3/5 \cdot x_3 + 4/5 \cdot x_4 \geq 4/5$ , или  $3/5 \cdot x_3 + 4/5 \cdot x_4 - x_5 = 4/5$ , которое вводим в таблицу

$c_j$	БП	2	4	0	0	0	$b_i$	$b_i/a_{ij}$
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$		
2	$x_1$	1	0	3/5	-1/5	0	9/5	3
4	$x_2$	0	1	-1/5	2/5	0	41/15	-
0	$x_5$	0	0	<span style="border: 1px solid black;">3/5</span>	4/5	-1	4/5	4/3
2	$x_1$	1	0	0	-1	1	1	
4	$x_2$	0	1	0	2/3	-1/3	3	
0	$x_3$	0	0	1	4/3	-5/3	4/3	
$L$		0	0	0	2/3	2/3	14	

Получим,  $\bar{X}_{цел} = (1; 3), \quad L(\bar{x}) = 14.$

## ГЛАВА 4. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

### 4.1. Постановка задачи

Задача заключается в выборе такого распределения ресурсов по объектам, при котором минимизируется стоимость назначений. Предполагается, что каждый ресурс назначается ровно один раз и каждому объекту приписывается ровно один ресурс.

Матрица стоимостей  $C$  имеет вид

$$C = (c_{ij}),$$

где  $c_{ij}$  — затраты, связанные с назначением  $i$ -го ресурса на  $j$ -й объект,  $i, j = \overline{1, n}$ , где  $n$  — число объектов или ресурсов.

Обозначим:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й ресурс назначается на } j\text{-й объект;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, решение задачи может быть записано в виде  $X = (x_{ij})$ .

Допустимое решение называется *назначением*. Оно строится путем выбора ровно одного элемента в каждой строке матрицы  $X = (x_{ij})$  и ровно одного элемента в каждом столбце этой матрицы.

Элементы  $c_{ij}$  матрицы  $C$ , соответствующие элементам  $x_{ij} = 1$  матрицы  $X$ , будем отмечать кружками:

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 4 & 7 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 3 & 8 \\ 6 & \textcircled{0} & 9 \end{pmatrix}, \quad X = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Математическая постановка задачи:

$$L(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} = 0 \text{ или } 1. \end{array} \right.$$

#### 4.2. Алгоритм решения задачи

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой  $a_i=b_j=1$ . Поэтому ее можно решать алгоритмами транспортной задачи (Глава 2).

Рассмотрим другой метод, который является более эффективным, учитывающим специфику математической модели. Этот метод называется *венгерским алгоритмом*. Он состоит из следующих шагов:

- 1) преобразования строк и столбцов матрицы;
- 2) определение назначения;
- 3) модификация преобразованной матрицы.

*1-й шаг.* Цель данного шага — получение максимально возможного числа нулевых элементов в матрице  $C$ . Для этого из всех элементов каждой строки вычитаем минимальный элемент соответствующей строки, а из всех элементов каждого столбца вычитаем минимальный элемент соответствующего столбца.

*2-й шаг.* Если после выполнения 1-го шага в каждой строке и каждом столбце матрицы  $C$  можно выбрать по одному нулевому элементу, то полученное решение будет оптимальным назначением.

*3-й шаг.* Если допустимое решение, состоящее из нулей, не найдено, то проводим минимальное число прямых через некоторые столбцы и строки так, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. Выбираем наименьший невычеркнутый элемент. Этот элемент вычитаем из каждого невычеркнутого элемента и прибавляем к каждому элементу, стоящему на пересечении прове-

денных прямых.

Если после проведения 3-го шага оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

**Пример.**

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}.$$

Распределить ресурсы по объектам.

**Решение.** *1-й шаг.* Значения минимальных элементов строк 1, 2, 3 и 4 равны 2, 4, 11 и 4 соответственно. Вычитая из элементов каждой строки соответствующее минимальное значение, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Значения минимальных элементов столбцов 1, 2, 3 и 4 равны 0, 0, 5, 0 соответственно. Вычитая из элементов каждого столбца соответствующее минимальное значение, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow$$

*2-й шаг.* Ни одно полное назначение не получено, необходимо провести модификацию матрицы стоимостей.

*3-й шаг.* Вычеркиваем столбец 1, строку 3, строку 2 (или столбец 2). Значение минимального невычеркнутого элемента равно 2:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \min = 2.$$

Вычитаем его из всех невычеркнутых элементов и, складывая его со всеми элементами, расположенными на пересечении двух линий, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 6 & \textcircled{0} & 3 \\ 13 & \textcircled{0} & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & \textcircled{0} \\ \textcircled{0} & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ответ.** Первый ресурс направляем на 3-й объект, второй — на 2-й объект, четвертый — на 1-й объект, третий ресурс — на 4-й объект. Стоимость назначения:  $9 + 4 + 11 + 4 = 28$ .

### Примечания.

1. Если исходная матрица не является квадратной, то нужно ввести фиктивные ресурсы или фиктивные объекты, чтобы матрица стала квадратной.

2. Если какой-либо ресурс не может быть назначен на какой-то объект, то соответствующая стоимость полагается равной достаточно большому числу  $M$ .

3. Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы  $C$  следует умножить на  $(-1)$  и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем задачу следует решать как задачу минимизации.

4. Если число линий, необходимое для того, чтобы вычеркнуть нулевые элементы, равно числу строк или столбцов (квадратной матрицы), то существует назначение нулевой стоимости.

**Пример.**  $C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Распределить ресурсы по объектам.

**Решение.** Исходная матрица не является квадратной, вводим фиктивные объекты (дополнительный столбец).

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В каждом столбце находим минимальный элемент.

Вычитаем из элементов каждого столбца соответствующий минимальный элемент.

В результате получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость. Фиксируем нулевое значение в первой строке и пятом столбце, другие нули вычеркиваем. Фиксируем нулевое значение во второй строке и четвертом столбце, другие нули также вычеркиваем. В итоге получим следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку расположение нулевых элементов в матрице не позволяет образовать систему из 5-х независимых нулей (в матрице их только 2), то *решение недопустимое*. Вычеркиваем строки и столбцы с наибольшим количеством нулевых элементов: столбец 5, строку 4, строку 1, столбец 4. Получим сокращенную матрицу (элементы подчеркнуты):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Минимальный элемент сокращенной матрицы ( $\min(4,1,1,1,4,3,4,2,1)=1$ ) вычитаем из всех ее элементов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Затем складываем минимальный элемент с элементами, расположенными на пересечениях вычеркнутых строк и столбцов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Затем те же шаги проводим по столбцам, для чего в каждом столбце находим минимальный элемент. После вычитания минимальных элементов получаем полностью модифицированную матрицу. Проводим поиск допустимого решения, для которого все назначения имеют нулевую стоимость. Фиксируем нулевое значение в первой строке и первом столбце, другие нули

вычеркиваем. Фиксируем нулевое значение во второй строке и четвертом столбце, другие нули также вычеркиваем. Фиксируем нулевое значение в третьей строке и пятом столбце, другие нули вычеркиваем. Фиксируем нулевое значение в четвертой строке и втором столбце, другие нули вычеркиваем. Фиксируем нулевое значение в пятой строке и третьем столбце, другие нули вычеркиваем. В итоге получаем следующую матрицу:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{0} & \textcircled{-} & 3 & 5 & 1 \\ 3 & \textcircled{-} & \textcircled{-} & \textcircled{0} & \textcircled{-} \\ \textcircled{-} & 3 & 2 & 2 & \textcircled{0} \\ \textcircled{-} & \textcircled{0} & \textcircled{-} & 5 & 1 \\ 3 & 1 & \textcircled{0} & 2 & \textcircled{-} \end{pmatrix}$$

Вычислим минимальную стоимость назначения по аналогично расположенным элементам исходной матрицы.

**Ответ.** Первый ресурс направляется на первый объект, второй – на четвертый объект, третий – на пятый объект, четвертый – на второй, пятый ресурс – на третий объект.

Стоимость назначения:  $2+1+0+3+2=8$ .

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

### Методические указания к выполнению контрольной работы по дисциплине «методы оптимальных решений»

Настоящее учебно-методическое пособие содержит краткое изложение теоретического материала, примеры решения типовых задач и контрольные задания.

Студент выполняет вариант контрольной работы в соответствии с номером учебного шифра (две последние цифры номера зачетной книжки). Если предпоследняя цифра – нечетное число (1, 3, 5, 7, 9), то номера задач для соответствующего варианта приведены в таблице 1. Если же предпоследняя цифра учебного шифра – четная или ноль (2, 4, 6, 8, 0), то номера соответствующего варианта приведены в таблице 2. Соответствующий вариант выбирается по последней цифре номера зачетной книжки.

Таблица 1

№ варианта	Задания 1.1	Задания 2	Задания 3	Задания 4.1
1	1	2.1	3.1	1
2	2	2.2	3.2	2
3	3	2.3	3.3	3
4	4	2.4	3.4	4
5	5	2.5	3.5	5
6	6	2.6	3.6	6
7	7	2.7	3.7	7
8	8	2.8	3.8	8
9	9	2.9	3.9	9
0	0	2.10	3.10	0

Таблица 2

№ варианта	Задания 1.2	Задания 2	Задания 3	Задания 4.2
1	1	2.11	3.11	1
2	2	2.12	3.12	2
3	3	2.13	3.13	3
4	4	2.14	3.14	4
5	5	2.15	3.15	5
6	6	2.16	3.16	6
7	7	2.17	3.17	7
8	8	2.18	3.18	8
9	9	2.19	3.19	9
0	0	2.20	3.20	0

### Задание 1

1.1. Предположим, что для производства двух видов продукции  $A$  и  $B$  можно использовать сырьё трёх видов. При этом на изготовление единицы изделия  $A$  расходуется  $a_1$  ед. сырья первого вида,  $a_2$  – ед. 2-го и  $a_3$  – 3-го вида. На изготовление единицы изделия  $B$  расходуется  $b_1$  ед. сырья 1-го вида,  $b_2$  – ед. 2-го вида,  $b_3$  – ед. 3-го вида сырья. На складе фабрики имеется сырьё 1-го вида  $c_1$  ед., 2-го –  $c_2$ , 3-го –  $c_3$  ед. От реализации единицы готовой продукции фабрика имеет прибыль  $\alpha$  тыс. руб., а от продукции  $B$  прибыль составляет  $\beta$  тыс. руб.

Составить математическую модель исходной задачи. Найти решение симплексным методом и графически.

Таблица

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значения										
$a_1$	4	2	3	4	4	5	2	2	2	4
$a_2$	2	3	5	2	2	4	4	4	3	2
$a_3$	3	4	2	3	3	3	4	3	4	3
$b_1$	2	3	2	3	3	2	3	3	3	2
$b_2$	5	5	3	5	2	2	2	2	5	5
$b_3$	4	4	4	2	2	3	5	5	2	4
$c_1$	35	30	35	45	55	55	35	35	35	35
$c_2$	43	44	49	45	30	40	38	42	49	43
$c_3$	40	48	42	29	37	42	59	49	42	40
$\alpha$	5	7	1	5	5	7	8	3	2	5
$\beta$	9	9	1	9	4	5	7	3	2	9

1.2. Фирма изготавливает два вида красок для внутренних (В) и наружных (Н) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в таблице.

Расход и суточные запасы исходных продуктов

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 тонну краски		Суточный запас, т
	Краска Н	Краска В	
Пигмент	$a_{11}$	$a_{12}$	$b_1$
Олифа	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_2$

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на краску для наружных (внутренних) работ никогда не превышает  $b_3$  т в сутки. Цена

продажи 1 т краски для наружных работ –  $c_1$  ден. ед., для внутренних работ –  $c_2$  ден. ед.

Какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным? Найти решение симплексным методом и графически.

Таблица

№ варианта Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_1$	3	1	1	2	3	2	1	3	2	4
$c_2$	2	1	4	2	2	1	2	4	3	5
$a_{11}$	1	2	3	3	1	3	3	1	1	1
$a_{12}$	2	1	2	1	1	4	1	1	1	2
$b_1$	6	6	12	3	4	24	6	6	7	8
$a_{21}$	2	1	1	3	4	2	1	2	3	4
$a_{22}$	1	2	2	2	1	1	1	1	1	3
$b_2$	8	6	6	12	8	8	5	8	10	24
$k_1$	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
$k_2$	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1
$b_3$	2	2,5	3,5	4	4	3	1	4,5	6	3

Примечание. Если по условию задания спрос на краску для наружных (внутренних) работ не превышает  $b_3$  т в сутки, то в математической модели задачи следует принять, что коэффициент системы ограничений при неизвестном значении краски для наружных (внутренних) работ, обозначенный в таблице  $k_1$  ( $k_2$ ), равен 1 (0), а при неизвестном значении краски для внутренних (наружных) работ  $k_2$  ( $k_1$ ) равен 0 (1).

## Задание 2

Составить математическую модель транспортной задачи. Найти первый опорный план. Решить задачу методом потенциалов.

$$2.1. \quad \begin{aligned} a_i &= (210, 250, 200, 290) \\ b_j &= (150, 210, 170, 220, 200) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 10 & 4 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.2. \quad \begin{aligned} a_i &= (270, 230, 250, 200) \\ b_j &= (170, 210, 200, 170, 200) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 12 & 10 & 8 \\ 12 & 14 & 8 & 12 & 7 \\ 5 & 10 & 8 & 9 & 6 \\ 7 & 6 & 7 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. \quad \begin{aligned} a_i &= (250, 300, 200, 100) \\ b_j &= (120, 150, 230, 190, 160) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 10 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 7 \\ 8 & 7 & 8 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.4. \quad \begin{aligned} a_i &= (300, 250, 150, 150) \\ b_j &= (145, 195, 180, 140, 190) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 7 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 7 \\ 12 & 3 & 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.5. \quad \begin{aligned} a_i &= (100, 200, 200, 100) \\ b_j &= (190, 100, 130, 80, 100) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 3 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$2.6. \quad \begin{aligned} a_i &= (150, 100, 150, 100) \\ b_j &= (100, 70, 130, 110, 90) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.7. \quad \begin{aligned} a_i &= (150, 100, 75, 125) \\ b_j &= (90, 100, 75, 100, 85) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 7 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.8. \quad \begin{aligned} a_i &= (90, 150, 75, 60) \\ b_j &= (100, 55, 125, 40, 55) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$2.9. \quad \begin{aligned} a_i &= (80, 120, 120, 100) \\ b_j &= (95, 125, 40, 60, 100) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.10. \quad \begin{aligned} a_i &= (200, 300, 250, 100) \\ b_j &= (150, 140, 115, 225, 220) \end{aligned} \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

### Задача 2.11

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	19	8	14	5	9	150
$A_2$	6	10	5	25	11	200
$A_3$	7	13	8	12	14	150
Потребность	60	140	100	80	120	

Задача 2.12

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	15	8	9	11	12	100
$A_2$	4	10	7	5	8	150
$A_3$	6	3	4	15	20	250
Потребность	100	40	140	60	160	

Задача 2.13

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	15	8	5	21	15	150
$A_2$	4	12	7	8	10	200
$A_3$	11	20	13	4	5	200
Потребность	100	180	40	120	110	

Задача 2.14

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	20	22	9	6	13	100
$A_2$	5	13	7	4	10	180
$A_3$	30	18	15	12	8	120
Потребность	40	120	60	100	80	

Задача 2.15

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	3	12	9	1	7	350
$A_2$	2	4	11	2	10	330
$A_3$	7	14	12	5	8	270
Потребность	210	170	220	150	200	

Задача 2.16

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5	8	15	20	9	240
$A_2$	8	7	6	12	14	160
$A_3$	16	11	19	10	5	200
Потребность	180	40	160	120	100	

Задача 2.17

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	6	4	3	6	100
$A_2$	8	5	15	9	10	200
$A_3$	4	6	3	5	2	300
Потребность	100	200	80	60	160	

Задача 2.18

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5	7	4	2	5	200
$A_2$	7	1	3	1	10	175
$A_3$	2	3	6	8	7	225
Потребность	100	130	80	190	100	

Задача 2.19

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	5	8	7	10	3	200
$A_2$	4	2	2	5	6	450
$A_3$	7	3	5	9	2	250
Потребность	100	125	325	250	100	

Задача 2.10

Поставщики	Потребители					Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	40	19	25	25	35	230
$A_2$	49	26	27	18	38	250
$A_3$	46	27	36	40	45	170
Потребность	140	90	160	110	150	

### Задание 3

Найти целочисленное решение ЗЛП двумя способами:

а) графическим методом; б) методом Гомори.

3.1  $L = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$$

3.2  $L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9 \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 3 \end{cases}$$

3.3  $L = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

3.4  $L = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 15 \end{cases}$$

3.5  $L = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ -3x_1 + x_2 \leq 0 \end{cases}$$

3.11  $L = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 9x_1 + 4x_2 \leq 110 \\ 11x_1 - 3x_2 \geq 24 \\ 2x_1 - 7x_2 \geq 15 \end{cases}$$

3.12  $L = 3x_1 - x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ -5x_1 - 4x_2 \leq -10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$$

3.13  $L = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13 \end{cases}$$

3.14  $L = -x_1 + 3x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + 17x_2 \leq 33 \\ -6x_2 + 13x_3 \leq 43 \end{cases}$$

3.15  $L = 6x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \leq -39 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ -2x_1 + 5x_2 \leq 33 \end{cases}$$

$$3.6 \quad L = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 13 \end{cases}$$

$$3.7 \quad L = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 38 \end{cases}$$

$$3.8 \quad L = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 25 \end{cases}$$

$$3.9 \quad L = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ 3x_1 - 3x_2 \leq 9 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$3.10 \quad L = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$3.16 \quad L = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -6x_1 + 5x_2 \leq 14 \\ 3x_1 + x_2 \leq 17 \\ -7x_1 + 3x_2 \geq -44 \end{cases}$$

$$3.17 \quad L = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -6x_1 + 8x_2 \leq 11 \\ -7x_1 + x_2 \leq 5 \\ 7x_1 - 3x_2 \leq 13 \end{cases}$$

$$3.18 \quad L = 2x_1 - 9x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} -3x_1 + 7x_2 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 \leq 5 \\ 5x_1 - 7x_2 \leq 13 \end{cases}$$

$$3.19 \quad L = x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 23 \\ -x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 14 \end{cases}$$

$$3.20 \quad L = -7x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ 12x_1 - 7x_2 \leq 15 \\ 6x_1 + 8x_2 \leq 9 \end{cases}$$

### Задание 4

#### 4.1. Решить задачу о назначениях.

В цехе предприятия имеется 5 универсальных станков, которые могут выполнять 4 вида работ. Каждую работу одновременно может выполнять только один станок, и каждый станок можно загружать только одной работой. В таблице даны затраты времени при выполнении станком определенной работы. Определить наиболее рациональное распределение работ между станками, минимизирующее суммарные затраты времени.

Работа \ Станок	1	2	3	4
1	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{14}$
2	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$	$c_{24}$
3	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$	$c_{34}$
4	$c_{41}$	$c_{42}$	$c_{43}$	$c_{44}$
5	$c_{51}$	$c_{52}$	$c_{53}$	$c_{54}$

#### Значения коэффициентов распределительной таблицы

№ варианта \ Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_{11}$	5	4	3	4	5	6	3	5	7	6
$c_{12}$	6	5	4	4	4	5	4	6	6	7
$c_{13}$	4	3	5	3	6	4	6	7	8	4
$c_{14}$	7	5	5	5	5	5	5	6	7	6
$c_{21}$	4	6	3	4	6	5	4	6	6	7
$c_{22}$	5	5	5	5	4	6	5	4	5	6
$c_{23}$	3	4	4	3	5	4	5	5	6	5
$c_{24}$	6	6	4	6	5	6	6	6	7	6
$c_{31}$	4	3	5	5	5	6	3	5	6	6
$c_{32}$	5	4	5	5	4	7	6	5	7	5

$c_{33}$	5	3	4	4	6	5	5	6	5	4
$c_{34}$	7	5	5	3	6	7	4	7	6	5
$c_{41}$	5	5	4	3	4	5	6	4	6	4
$c_{42}$	4	4	4	3	5	5	6	7	5	4
$c_{43}$	3	3	5	4	5	6	5	4	7	4
$c_{44}$	6	4	4	3	5	6	5	4	6	7
$c_{51}$	6	4	3	4	4	4	5	5	4	7
$c_{52}$	3	4	5	4	6	4	3	6	7	5
$c_{53}$	4	5	4	5	4	6	4	7	6	6
$c_{54}$	5	4	5	3	4	7	5	6	4	5

#### 4.2. Решить задачу о назначениях.

Служба занятости имеет в наличии четыре вакантных места по разным специальностям, на которые претендуют шесть человек. Проведено тестирование претендентов, результаты которого в виде баллов представлены в матрице

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \end{pmatrix}.$$

Распределить претендентов на вакантные места таким образом, чтобы на каждое место был назначен человек с наибольшим набранным по тестированию баллом.

#### Значения коэффициентов матрицы

№ варианта \ Значения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c_{11}$	8	5	3	4	3	5	9	5	4	6
$c_{12}$	5	6	4	3	7	6	5	3	5	6
$c_{13}$	6	7	7	6	5	7	6	3	6	5
$c_{14}$	7	3	5	5	5	3	6	6	3	6
$c_{15}$	5	9	6	6	8	5	7	8	3	7

$c_{16}$	4	7	7	5	7	4	5	7	7	5
$c_{21}$	7	6	3	3	5	6	6	6	5	7
$c_{22}$	6	4	5	4	9	7	7	4	8	8
$c_{23}$	5	8	8	8	4	9	4	6	9	9
$c_{24}$	6	4	4	9	6	4	3	5	6	4
$c_{25}$	4	7	6	7	5	4	5	9	3	3
$c_{26}$	6	5	7	4	4	5	6	5	5	5
$c_{31}$	6	5	5	4	4	4	7	3	5	5
$c_{32}$	3	3	5	5	8	5	8	6	6	4
$c_{33}$	6	8	9	7	6	8	3	5	7	7
$c_{34}$	5	3	6	8	5	3	5	7	5	5
$c_{35}$	3	8	7	7	6	6	4	6	6	4
$c_{36}$	7	4	6	5	3	6	5	6	3	6
$c_{41}$	4	4	4	5	6	3	7	3	6	6
$c_{42}$	5	5	6	3	9	5	7	6	7	5
$c_{43}$	4	9	6	6	3	4	4	4	6	5
$c_{44}$	8	5	5	5	4	4	6	6	4	3
$c_{45}$	6	6	8	5	4	5	3	9	4	3
$c_{46}$	5	5	5	3	5	5	4	5	5	4

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. [Текст] / И.Л. Акулин. – М.: Высшая школа, 1986.- 320с.
2. Емельянов А.М. Экономико-математические методы и модели: учебное пособие. [Текст] / А.М. Емельянов, Л.Г. Крючкова. – Благовещенск: ДальГАУ, 2010. – ч.1. – 58 с.
3. Калихман И.Л. Сборник по математическому программированию. [Текст] / И.Л. Калихман.- М.: Высшая школа, 1975.- 272с.
4. Красс М.С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - М.: Дело, 2001.-688с.
5. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник. – 3-е изд. – М.: 2007. – 479 с.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов [Текст] / В. И. Ермаков, Г. И. Бобрик и др.- М.: ИНФРА-М, 2003. - 575 с.
7. Фролова Г.Н. Математическое моделирование: учебное пособие [Текст] / сост. Г.Н. Фролова. Благовещенск: ДальГАУ, 2013. – 119 с.

*Учебное издание*

*Фролова Галина Николаевна,  
Каньшина Зоя Ивановна,  
Подолько Евгения Александровна*

## МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

*Учебно-методическое пособие  
для студентов заочной формы обучения  
экономических направлений бакалавриата*

*В редакции составителей*

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.  
Подписано к печати 30.06.2015 г. Формат 60×90/16.  
Уч.-изд.л. – 2,7. Усл.-п.л. – 3,8.  
Тираж 150 экз. Заказ 109.

---

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ  
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86





