

Е.В. Окладникова

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ



**ОСНОВЫ ТЕОРИИ,
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА
И ВАРИАНТЫ
ЗАДАНИЙ**

Учебное пособие

Благовещенск 2014

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ СТРОИТЕЛЬСТВА И ПРИРОДООБУСТРОЙСТВА

Е.В. Окладникова

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Основы теории, примеры расчета и варианты заданий

Учебное пособие

Рекомендовано

*Дальневосточным региональным учебно-методическим центром
(ДВ РУМЦ) в качестве учебного пособия для студентов направлений
подготовки бакалавров 270800.62 «Строительство»,
280100.62 «Природообустройство и водопользование»,
280700.62 «Техносферная безопасность» вузов региона
(Протокол №8 от 15.04.2014 г.)*

БЛАГОВЕЩЕНСК
Издательство ДАЛЬГАУ
2014

УДК 539.3

Окладникова, Е.В. Сопротивление материалов. Основы теории, примеры расчета и варианты заданий: учебное пособие / Е.В. Окладникова. – Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 128 с.

Пособие представляет собой краткое изложение некоторых разделов курса сопротивления материалов. В учебном пособии разработаны варианты расчетно-графических заданий по наиболее важным темам курса для самостоятельной работы студентов, а также приведены примеры их расчета. В пособие включены справочные материалы, необходимые для решения задач и выполнения расчетно-графических работ, а также вопросы для самопроверки усвоения материала.

Учебное пособие составлено в соответствии с требованиями действующего Федерального государственного образовательного стандарта и программы, рекомендованной Министерством образования России по направлениям подготовки 270800.62 «Строительство», 280100.62 «Природообустройство и водопользование», 280700.62 «Техносферная безопасность».

Рецензенты:

И.Г. Селезнев,

директор ООО «Востокдорконтроль», к.т.н., доцент;

Е.В. Малеева,

доцент, завкафедрой строительного дела ТИ (филиала)

ФГАОУ ВПО «Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Амосова»

Редактор А.И. Казимова

ISBN 978-5-9642-0243-1

© Окладникова Е.В., 2014

© Издательство ДальГАУ, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – фундаментальная естественнонаучная дисциплина, лежащая в основе современной техники. Изучение основ сопротивления материалов способствует формированию системы знаний, позволяющих будущему бакалавру научно анализировать проблемы его профессиональной области, использовать на практике приобретенные им базовые знания; самостоятельно, используя современные образовательные и информационные технологии, овладевать той информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной и научной деятельности.

Целью освоения дисциплины является усвоение студентами знаний, умений и навыков в области механики, умение использовать на практике полученные базовые знания, методы и алгоритмы исследования.

Несмотря на обеспеченность прекрасными учебниками, сопротивление материалов остается одной из труднейших дисциплин для студентов. Это объясняется тем, что все имеющиеся лучшие учебники очень велики по объему и содержанию, чтобы освоить их в отведенное для этого учебным планом время. Большинство из них предназначены скорее для преподавателей, чем для студентов. Опыт преподавательской деятельности показывает, что большинство студентов не успевают освоить весь обширный материал учебника и при подготовке к экзамену ограничиваются лишь конспектами лекций. Поэтому возникла необходимость создания пособия, краткого и доступного для понимания студентами, предназначенного для помощи им при изучении данной дисциплины и выполнения расчетно-графических заданий по отдельным разделам.

Пособие отличается сочетанием краткости изложения материала с доступностью его понимания студентами.

Успешное освоение дисциплины «Сопротивление материалов», как показывает опыт, невозможно без решения студентами практических задач.

Рабочими программами в каждом семестре предусматривается выполнение таких расчётно-графических работ по основным разделам курса.

Пособие имеет целью оказать помощь студентам строительных и природоохранных специальностей в освоении теоретических основ и практических методов расчёта элементов строительных конструкций и инженерных сооружений и подготовить их к последующему, более глубокому изучению специальных дисциплин расчётного цикла, таких как строительная механика, железобетонные, металлические и деревянные конструкции.

Отличительная особенность данного пособия заключается в том, что в нём простым и доступным для понимания студентами языком кратко излагается теоретический материал, необходимый для освоения каждой темы и выполнения расчётно-графического задания по ней, а также в комплексе разобраны примеры расчётов и приведены варианты заданий расчётных работ. К каждой работе приводятся необходимые справочные сведения из теории и расчётные формулы. Они ориентируют исполнителей на соответствующие материалы учебников и лекционного курса. Формулы, предлагаемые в качестве расчётных, совпадают с имеющимися в опубликованных учебниках по сопротивлению материалов. В пособии дается краткое обоснование, достаточное для понимания их сущности.

При рациональной организации выполнения расчётных работ им предшествуют лекции и решение простых задач по соответствующей тематике на практических занятиях.

Основная цель выполнения расчётно-графических работ заключается в привитии навыков самостоятельного решения практических задач с одновременным закреплением теоретических знаний.

Процесс выдачи преподавателем задания ограничивается сообщением студенту двух цифр: номера расчётной схемы и номера строки из таблицы исходных данных к работе, что освобождает его от трудоёмкой работы по подбору индивидуальных вариантов заданий.

Предлагаемый набор расчётных схем и исходных данных позволяет скомпоновать различные варианты заданий, что способствует индивидуализации обучения.

При выполнении расчётно-графической работы необходимо руководствоваться следующими рекомендациями:

- приступать к ней лишь после предварительного изучения соответствующего теоретического раздела курса сопротивления материалов;
- перед выполнением работы выписать условие задачи с числовыми данными, аккуратно вычертить расчётную схему и указать на чертеже числовые значения величин, необходимых для расчёта;
- все необходимые чертежи и расчёты оформлять на листе ватмана формата А3;
- на эпюрах усилий, напряжений и перемещений указывать числовые значения характерных ординат и единицы конечных расчётных величин;
- при защите расчётно-графической работы ответить на вопросы, связанные с её выполнением, уметь решать контрольные задачи по её тематике.

Для самопроверки рекомендуется ответить на контрольные вопросы, которые даны к каждой расчётной работе.

В приложении к данному пособию приведен необходимый справочный материал.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

1.1 ЗАДАЧИ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Сопротивление материалов – это раздел механики, изучающий поведение твердых материалов под нагрузкой. Он позволяет отвечать на вопросы о прочности и деформативности элементов строительных конструкций, изготовленных из этих материалов. Создаваемые инженерные конструкции и сооружения должны быть прочными и надежными, простыми в изготовлении и монтаже, с минимальным расходом строительных материалов и энергоресурсов. В раздел входит изучение видов деформаций, подбор поперечных сечений элементов конструкций из условий прочности и экономичности.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов и основные понятия механики.

Практика показывает, что все части конструкций под действием нагрузок деформируются, то есть изменяют свою форму и размеры, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкции.

Сопротивление материалов – это наука, в которой излагаются основы и методика расчета основных наиболее распространенных элементов строительных конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Прочностью называется способность материала конструкций и их элементов сопротивляться действию внешних сил, не разрушаясь.

Расчеты на прочность дают возможность определить размеры и форму элементов конструкций, выдерживающих заданную нагрузку, при наименьшем расходе материала.

Под **жёсткостью** понимается способность конструкции или её элемента сопротивляться образованию деформации.

Расчёты на жёсткость гарантируют, что изменения формы и размеров конструкций и их элементов не превысят допустимых норм.

Под **устойчивостью** понимается способность конструкции сопротивляться усилиям, стремящимся вывести её из исходного состояния равновесия.

Расчёты на устойчивость предотвращают возможность внезапной потери устойчивости и искривления длинных или тонких элементов конструкций. Примером потери устойчивости может служить внезапное искривление длинного прямолинейного стержня при сжатии вдоль оси.

Надежной считается конструкция, которая сохраняет свою эксплуатационную способность, то есть прочность, жёсткость и устойчивость, в течение заранее предусмотренного промежутка времени.

Основной задачей сопротивления материалов является сочетание надежности работы сооружения с его экономичностью, то есть требуется получать необходимые прочность, жёсткость и устойчивость при наименьшем расходе материала.

В сопротивлении материалов расчету подлежит не сама конструкция, а её упрощенное приближение. Эта приближенная схема наделяется только теми свойствами и характеристиками реальной конструкции, которые ощутимо повлияют на результат расчета конструкции. Иначе говоря, реальные объекты заменяются **расчётными схемами**. В свою очередь, расчётная схема составляется из некоторых условных элементов, которые также отличаются от элементов реальной конструкции. Схематизация реальных объектов позволяет всё большее многообразие различных конструкций и их элементов рассчитывать с помощью разработанных

стандартных методов расчёта. Попытка же учесть в расчётах все свойства и особенности каждого реального объекта сильно затруднит задачу, а к заметному увеличению точности и достоверности расчёта не приведёт. Условные элементы конструкций, с помощью которых составляются расчетные схемы, рассмотрим в пункте (1.3).

Информацию о работающей под нагрузкой конструкции, по которой можно судить о её пригодности к эксплуатации, можно разделить на три группы:

- физические свойства материалов, из которых сделана конструкция;
- геометрические характеристики (размеры), информация о конфигурации, ориентации, закреплении конструкции;
- внешние нагрузки и воздействия на конструкцию.

Эти данные о конструкции в расчетной схеме представляются упрощенно, по однотипным правилам.

1.2 ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА И ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ, УПРОЩАЮЩИЕ РАСЧЕТЫ

При решении большинства задач сопротивления материалов, как показывают исследования, можно использовать ряд допущений, упрощающих расчеты.

Материал конструкции или её элемента считается *упругим*. Под *упругостью* материала понимается его следующее свойство. Предположим, что под действием внешних воздействий произошла деформация конструкции. Если после снятия с конструкции внешней нагрузки она полностью восстановила свою первоначальную форму и размеры, а деформации, вызванные в ней внешними воздействиями, полностью исчезли, то материал, из которого изготовлена конструкция, считается *упругим*. Если же после разгрузки конструкции её деформации исчезают, но не полностью

или вообще не уменьшаются, значит, её материал обладает свойством **пластичности**, его называют **пластичным**.

Предположим, несколько брусков одинаковых размеров, но выполненные из разных материалов, растянуты с одинаковым усилием. Каждый брусок удлинится на разную величину. Деформативность каждого материала характеризуется его **жѐсткостью**. Для большинства твердых материалов их жѐсткость устанавливается одним числом – значением **модуля упругости (модуля Юнга)**, который для каждого материала имеет своё значение. Если материал жесткий, это ещё не означает, что он прочный. Так, например, стекло жестче каучука, но оно хрупкое, и в прочности ему уступает.

Растянем резиновую полоску. Она станет длиннее и при этом – тоньше. Попробуем сжать ластик в одном из направлений. В направлении приложенного внешнего усилия ластик станет короче, но в других направлениях – толще. Таким образом, при деформировании твердых материалов в одном из направлений, они деформируются и в других направлениях, и все материалы – в разной степени. Это происходит потому, что каждый материал при его деформировании изменяет свой объем на разную относительную величину. Такое свойство для каждого материала характеризуется одним числом – значением **коэффициента Пуассона**.

При расчёте конструкции на прочность и жѐсткость физические свойства упругого материала исчерпывающе характеризуются двумя параметрами: его модулем упругости и коэффициентом Пуассона, которые справедливы лишь при напряжениях, не превышающих **предела упругости** для данного материала.

К физическим свойствам материалов относятся и предельные, критические значения напряжений, превышение которых приводит к потере прочности. Это **предел прочности, предел текучести** и другие, имеющие для каждого материала свои значения. Но в расчетах конструкций, чьи материалы остаются упругими при деформировании, эти параметры не

участвуют. С этими предельными значениями сравниваются значения напряжений, полученные в результате расчёта деформируемой конструкции.

Большинство материалов, используемых в строительстве, считаются *изотропными*. Это такие материалы, физические свойства которых в любом из направлений одинаковые.

Материалы, у которых в каждом из направлений физические характеристики имеют разные значения, называются *анизотропными*. Примером анизотропного материала является древесина. Ведь вдоль волокон она прочнее, чем поперек волокон. К анизотропным материалам также относятся *композиты*, довольно часто применяемые в современной технике.

Ещё одним допущением сопротивления материалов является то, что материал конструкции считается *однородным и сплошным*, то есть его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках. Эта предпосылка позволяет, рассматривая теоретически бесконечно малый элемент конструкции, наделять его свойствами, которыми обладает объём тела реальных размеров.

1.3 ФОРМЫ И ЗАКРЕПЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В РАСЧЁТНОЙ СХЕМЕ

На практике в большинстве случаев приходится иметь дело с конструкциями сложной формы, но их можно представить себе состоящими из отдельных простых элементов, например, брусьев, пластин, оболочек и массивов. Расчетные схемы конструкций, как правило, формируются из простейших по форме элементов. Формы элементов конструкций разнообразны. Всё многообразие их сводится к трем видам по одному признаку.

Основным расчетным элементом в сопротивлении материалов является *брус* – тело, поперечные размеры которого малы по сравнению с длиной (рис.1, а). Брусья бывают прямолинейные и криволинейные, постоянного и

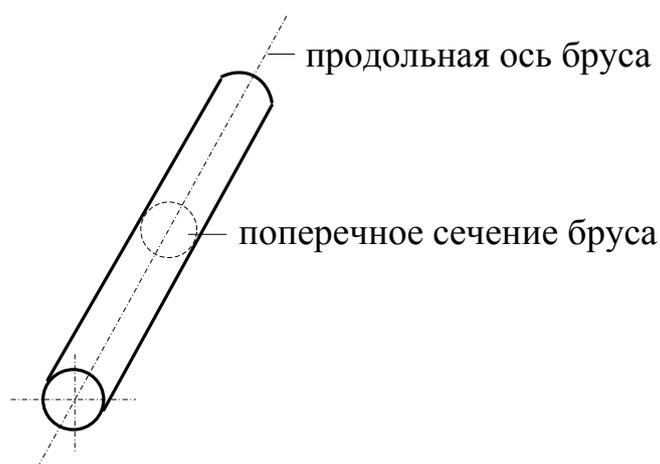
переменного поперечного сечения. В зависимости от их назначения в конструкции брусья называют *колоннами, балками, стержнями*. На расчетной схеме вместо бруса изображается его ось.

Плоское сечение, перпендикулярное оси бруса, называется поперечным; сечение, параллельное оси прямолинейного бруса – продольным; остальные плоские сечения – наклонными.

Итак, *брус* – это элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

В зависимости от форм продольной оси и поперечных сечений различают несколько видов брусьев:

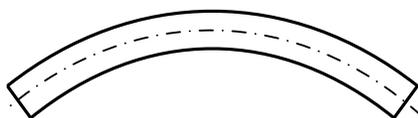
- прямой брус постоянного поперечного сечения



- прямой ступенчатый брус

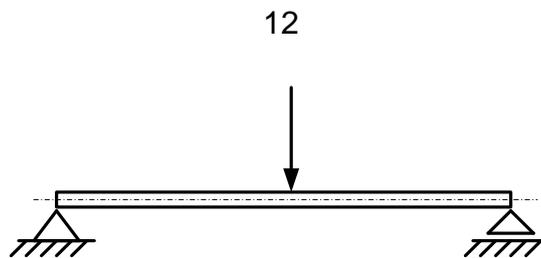


- криволинейный брус

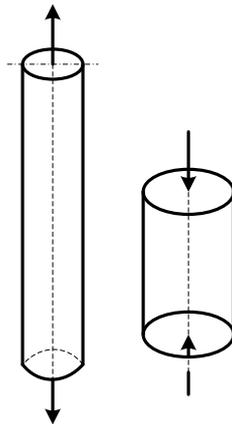


Горизонтальный брус, работающий на изгиб, называется **балкой**.

Балка – это конструктивный элемент в виде прямого бруса, закрепленный на опорах и изгибаемый приложенными к нему силами. Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.



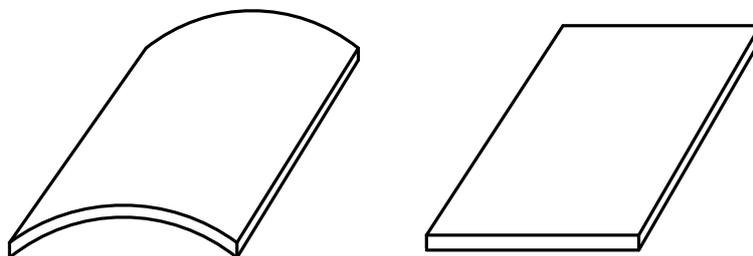
Вертикальный, горизонтальный или наклонный брус, работающий на растяжение или сжатие, называется **стержнем**.



Кроме расчета брусев сопротивление материалов занимается расчетом *пластин и оболочек* – тел, имеющих малую толщину по сравнению с другими размерами (например, резервуары, трубы, ангары) (рис. 1, б).

Оболочка – это элемент конструкции, толщина которого значительно меньше других размеров.

Выпрямленная оболочка называется *пластиной*, то есть оболочка, у которой срединная поверхность является плоскостью.



Тела, у которых все три измерения одинакового порядка, называются *массивами* (например, фундаменты) (рис. 1, в).

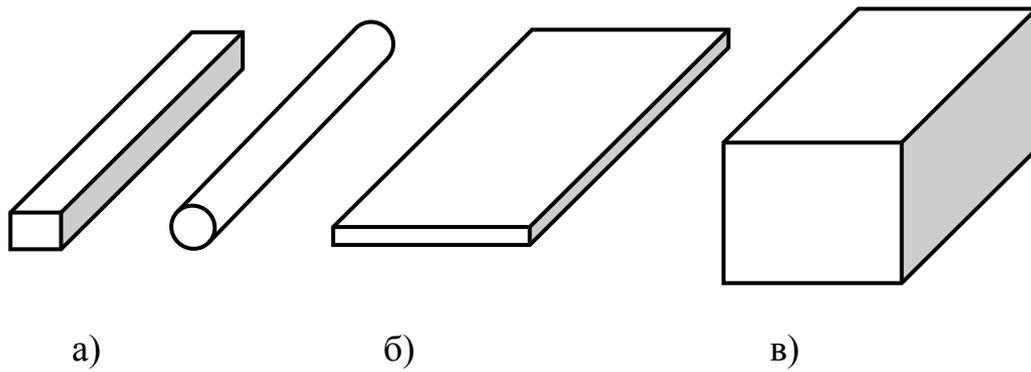


Рис. 1. Формы элементов конструкций

Соединения или опорные закрепления объединяют элементы конструкций в единую расчетную схему. Простейшей разновидностью связей является *элементарная связь*, ограничивающая взаимное перемещение двух соединяемых ей точек только в одном направлении. Элементарная связь с основанием называется *шарнирно-подвижной опорой* (рис. 2, а).

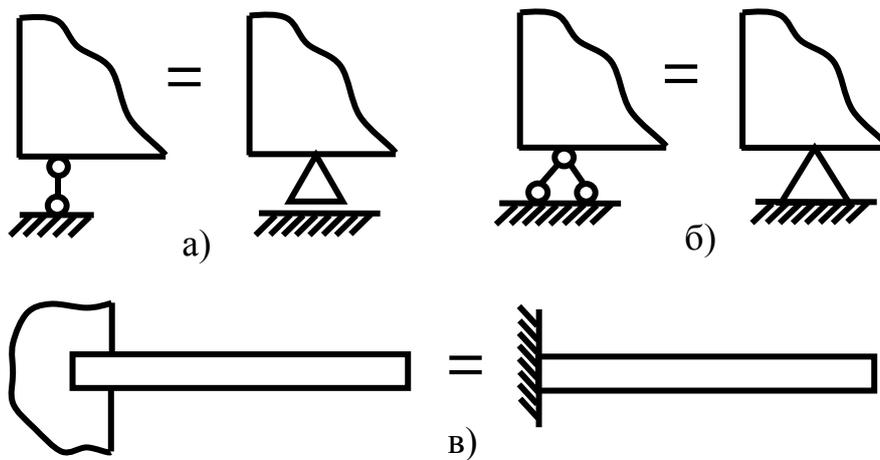


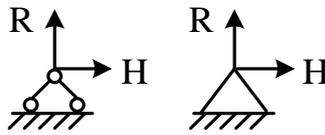
Рис. 2. Типы опорных закреплений

Данная опора не дает возможности опорному сечению перемещаться в вертикальном направлении. При этом она не препятствует горизонтальному перемещению и повороту опорного сечения. Шарнирно-подвижная опора дает лишь одну неизвестную реакцию **R**:

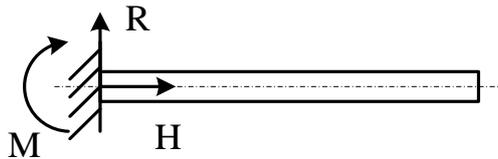


Соединение, состоящее из двух элементарных связей, препятствует любому поступательному движению соединяемых точек в плоскости. Такая связь с основанием называется *шарнирно-неподвижной опорой* (рис. 2, б).

Шарнирно-неподвижная опора позволяет опорному сечению балки свободно поворачиваться вокруг шарнира, расположенного в центре тяжести опорного сечения, но не допускает поступательного перемещения ни в одном из направлений. Реакция данной связи всегда заменяется двумя её составляющими: вертикальной \mathbf{R} , направленной перпендикулярно к оси балки, и горизонтальной \mathbf{H} , направленной вдоль оси балки:



Жесткая заделка или защемление состоит из трех элементарных связей и является жесткой неподвижной связью (рис. 2, в). Жесткая заделка не допускает ни поступательных перемещений, ни поворотов, обеспечивая тем самым полную неподвижность опорного сечения. Данная опора даёт три неизвестные реакции – это составляющая \mathbf{H} , параллельная продольной оси балки, составляющая \mathbf{R} , перпендикулярная оси балки и опорный момент \mathbf{M} :



Неизвестные реакции, возникающие в опорных закреплениях, определяются из условий равновесия системы, для чего используются уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил. При этом для различных типов элементов конструкций выбираются разные формы уравнений равновесия.

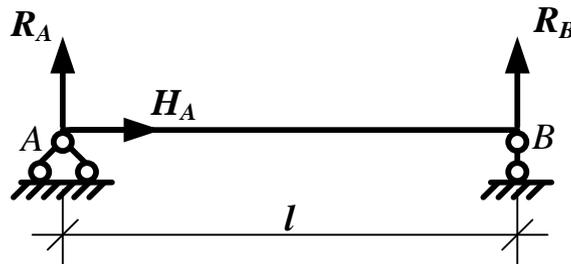
1.4 ТИПЫ БАЛОК. ПОРЯДОК ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ ОПОР ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ БАЛОК

Одним из наиболее распространенных элементов строительных конструкций и инженерных сооружений является балка. Балка – это брус, работающий преимущественно на изгиб. В зависимости от опорных закреплений различают балки статически определимые и статически неопределимые.

Статически определимыми называются балки, в которых количество неизвестных реакций не превышает трех.

Статически неопределимыми называются балки, в которых количество неизвестных реакций больше трех.

1. Статически определимая простая **однопролетная балка** – балка, опирающаяся на две опоры, одна из которых шарнирно-неподвижная, другая – шарнирно-подвижная. Расстояние между опорами называется **пролетом**.



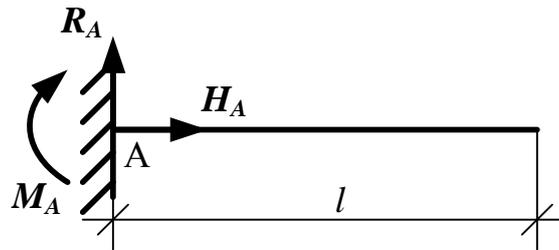
Для определения неизвестных реакций однопролетной балки используется вторая форма условий равновесия в виде уравнений:

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum F_X = 0.$$

Для проверки найденных реакций используется уравнение в виде:

$$\sum F_Y = 0.$$

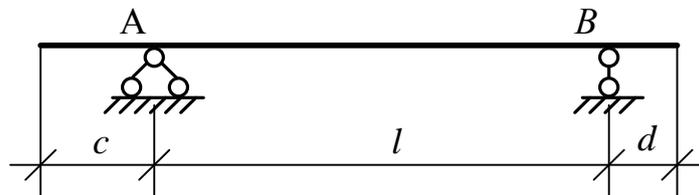
2. Статически определимая **консольная балка** – балка, закрепленная при помощи жесткой заделки.



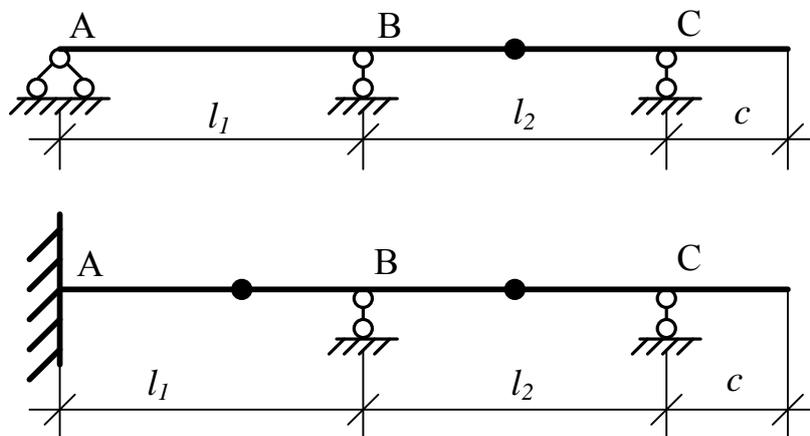
Для определения неизвестных реакций для консольной балки используется основная форма условий равновесия в виде уравнений:

$$\sum F_y = 0, \quad \sum F_x = 0, \quad \sum M_A = 0.$$

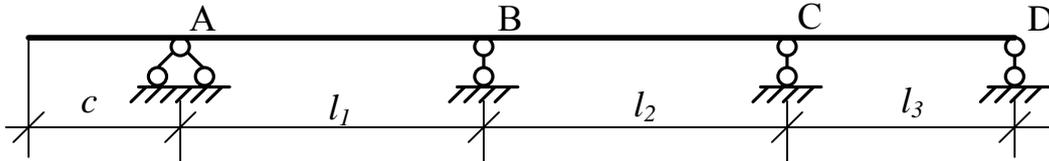
3. Статически определимая **однопролетная балка с консолями**.
Неизвестные реакции определяются так же, как и для простой однопролетной балки, используя вторую форму условий равновесия.



4. Статически определимая **многопролетная шарнирно-консольная балка** – балка, состоящая из простых однопролетных и консольных балок, соединенных между собой шарнирами. Расчет такой балки начинается с построения «поэтажной схемы». Неизвестные реакции определяются для каждой простой балки отдельно.



5. Статически неопределимая *многопролетная неразрезная балка*. Способ определения неизвестных реакций отличается от статически определимых балок. Для раскрытия статической неопределимости требуется составление дополнительных уравнений.



1.5 ВНЕШНИЕ НАГРУЗКИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА КОНСТРУКЦИЮ, И ИХ ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В РАСЧЁТНОЙ СХЕМЕ

Внешние нагрузки, деформирующие конструкцию и учитываемые в ее расчете, являются неотъемлемой частью расчетной схемы. Внешние нагрузки бывают *статическими и динамическими*. В тех случаях, когда нельзя не считаться с силами инерции самой конструкции, нагрузки называются динамическими. К ним относятся ударные воздействия на конструкцию, её вибрация и др. Статической считается нагрузка, которая медленно возрастает от нуля до её наибольшего значения, при этом силами инерции в расчете можно пренебречь.

При составлении расчетных схем внешние нагрузки, действующие на конструкцию, представляются упрощенно. Так нагрузку, приложенную к небольшому участку поверхности бруса, заменяют *сосредоточенной силой*, то есть силой, приложенной к точке поверхности, и переносят к оси бруса (рис. 3, а). В системе СИ сосредоточенные силы измеряются в *ньютонгах* (Н).

Нагрузки, приложенные к участкам больших размеров, составляющим существенную часть длины бруса, при составлении расчетной схемы нельзя заменять сосредоточенными силами. Такие нагрузки на расчетной схеме остаются *распределенными* по поверхности или приводятся к распределенным по длине оси бруса.

В механике такое действие нагрузки называют давлением. Единица измерения распределенной нагрузки: это единица силы, отнесенная к единице площади. В системе СИ единица измерения распределенной нагрузки – Н/м^2 .

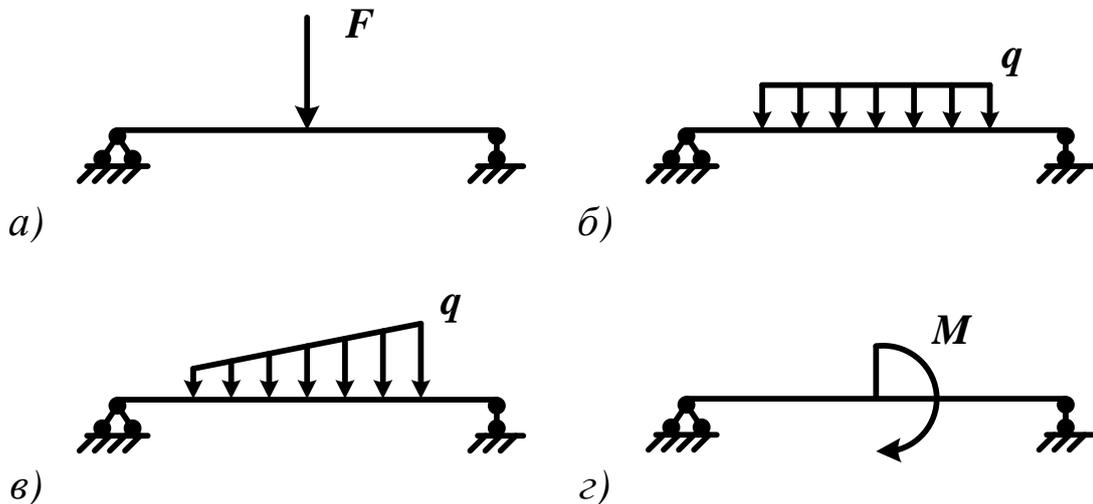


Рис. 3. Классификация внешних нагрузок

В расчетах балок, плит перекрытий часто оказывается удобным относить нагрузку не к единице площади, а к единице длины конструкций. В этом случае распределенную нагрузку измеряют в Н/м и называют *погонной распределенной нагрузкой*.

В зависимости от реально действующей на конструкцию нагрузки, на расчетной схеме распределенная нагрузка может быть изображена в виде равномерно распределенной нагрузки (рис. 3, б), то есть действующей с одинаковой высотой, и неравномерно распределенной, которая может принимать любые очертания, например, в виде трапеции (рис. 3, в).

Мерой нагрузки, распределенной по длине оси бруса, является её *интенсивность* q (высота распределения нагрузки). Величина нагрузки определяется как площадь её очертания, а точкой приложения считается центр тяжести.

Различают и такую внешнюю нагрузку, которая распределена по объему конструкции. Это её собственный вес, магнитные силы, силы инерции. Такая распределенная нагрузка называется **объемной** (массовой). В системе СИ она измеряется в Н/м³.

Приложенная к конструкции пара сил, скручивающая или изгибающая её, представляется на расчетной схеме в виде **момента** (рис. 3, г). Единица измерения момента – это единица силы, умноженная на единицу длины. В системе СИ момент измеряют в Нм.

Нагрузки различают не только по способу приложения (сосредоточенные и распределенные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические), но и по длительности действия.

Различают **постоянные** и **временные** нагрузки, действующие на конструкцию в период её возведения и эксплуатации. Примером постоянной нагрузки на конструкцию является её собственный вес, который действует на протяжении всего периода эксплуатации. Временные нагрузки действуют в течение ограниченного промежутка времени. Временную нагрузку создают люди и оборудование на перекрытиях жилых и общественных зданий, транспорт на мостах, ветер на ограждающих конструкциях сооружений. В соответствии с российскими Строительными нормами такие временные воздействия представляются в расчетах конструкций и сооружений равномерно распределенной нагрузкой. Причем при расчете конструкции на прочность, интенсивность такой нагрузки принимается максимально возможной.

Элементы конструкций приходится рассчитывать не только на основную нагрузку, то есть на нагрузку, которая будет действовать при их эксплуатации. Часто на этапах изготовления, хранения, транспортировки до места монтажа, в процессе монтажа конструкций на строительной площадке конструкции воспринимают существенно другие комбинации нагрузок, и их тоже обязательно учитывают в расчетах.

В процессе эксплуатации элементы конструкций испытывают следующие основные деформации:

- 1) *растяжение* – эту деформацию испытывают, например, брусья, стержни рам, ферм, канаты, тросы, цепи;
- 2) *сжатие* – на сжатие работают, например, колонны, стержневые элементы конструкций, кирпичная кладка;
- 3) *сдвиг* – деформацию сдвига испытывают заклепки, болты, шпонки, швы сварных соединений. Деформацию сдвига, доведенную до разрушения материала, называют *срезом*;
- 4) *кручение* – на кручение работают валы, передающие мощность при вращательном движении. Обычно деформация кручения сопровождается другими деформациями, например, изгибом;
- 5) *изгиб* – на изгиб работают балки, оси и другие элементы конструкций.

Очень часто элементы конструкций подвергаются действию нагрузок, вызывающих одновременно несколько основных деформаций, например, изгиб с кручением, или сжатие с изгибом и так далее.

1.6 ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ДЕФОРМИРУЕМОЙ КОНСТРУКЦИИ. МЕТОД ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В элементе конструкции, подверженном воздействию внешних нагрузок, возникают *внутренние усилия*, оказывающие сопротивление внешним воздействиям и стремящиеся вернуть ему первоначальную форму и размеры.

Внутренними усилиями в сопротивлении материалов называются силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Внутренние усилия определяются основным методом сопротивления материалов – *методом сечений*, основанном на принципе частного равновесия. В сопротивлении материалов все тела рассматриваются в равновесии. Для решения задач используются уравнения равновесия, полученные в теоретической механике для тела в пространстве.

Метод сечений заключается в мысленном рассечении тела плоскостью и рассмотрении равновесия любой из отсеченных частей.

Если все тело находится в равновесии, то и каждая его часть должна находиться в равновесии под действием внешних и внутренних сил (рис. 4,а). Внутренние силы определяются из уравнений равновесия, составленных для рассматриваемой части тела.

Действие отсеченной части тела на оставшуюся заменяется ***главным вектором внутренних сил R_0*** , приложенным в центре тяжести поперечного сечения и ***главным моментом M_0*** системы внутренних сил, действующих по проведенному сечению, относительно некоторой оси, проходящей через центр тяжести сечения (рис. 4, б).

Разложив главный вектор R_0 по осям (рис. 4, в), получим три составляющие:

N_z - продольная сила;

Q_x - поперечная сила по оси x ;

Q_y - поперечная сила по оси y .

Главный момент тоже принято представлять в виде моментов пар сил в трех плоскостях проекции (рис. 4, г):

M_x - момент сил относительно Ox ;

M_y - момент сил относительно Oy ;

M_z - момент сил относительно Oz .

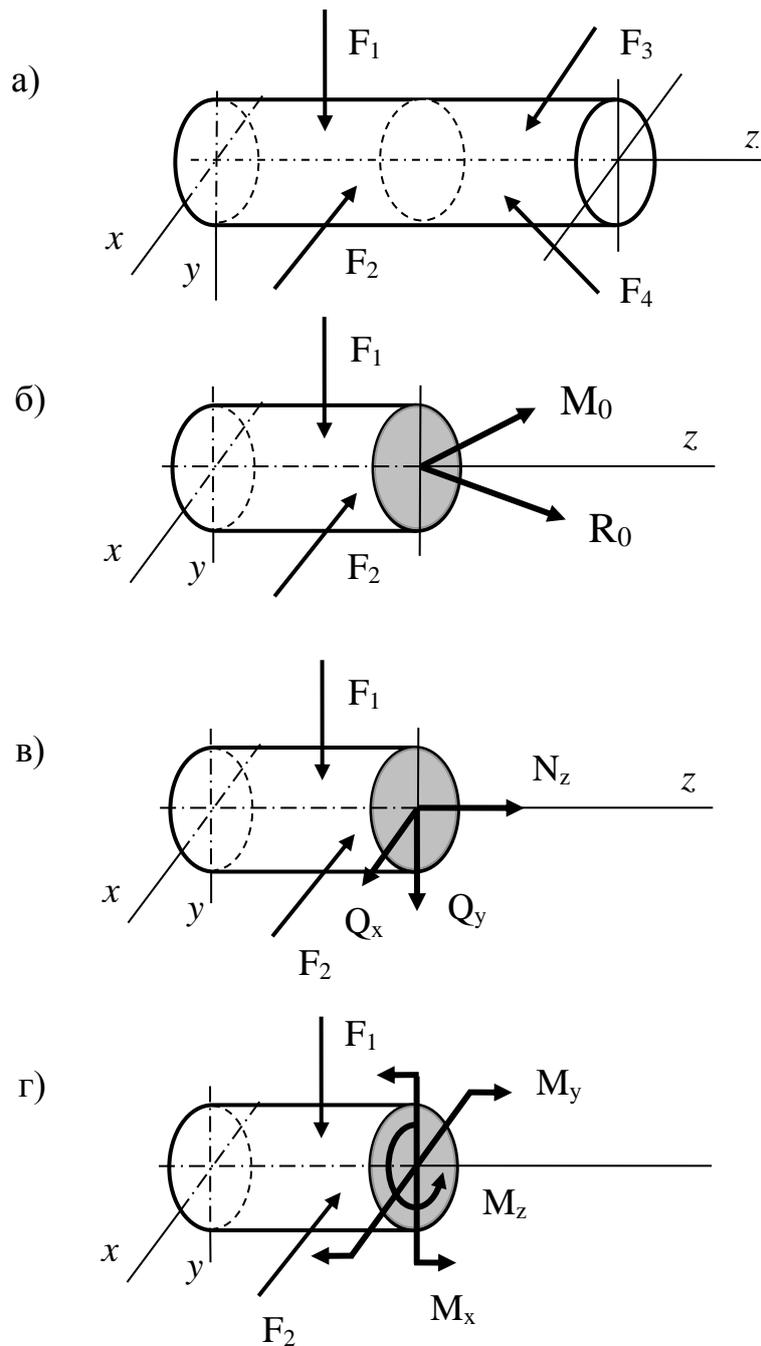


Рис. 4. Внутренние усилия и метод их определения

Полученные составляющие сил упругости носят название **внутренних силовых факторов**, каждый из которых вызывает определенную деформацию элемента конструкции. Внутренние силовые факторы уравнивают приложенные к этому элементу внешние силы. Используя шесть уравнений равновесия, можно получить величину внутренних усилий:

$$\begin{aligned}
 N_z &= \sum_0^n F_{kz}; & M_z &= \sum_0^n m_z(F_k); \\
 Q_x &= \sum_0^n F_{kx}; & M_x &= \sum_0^n m_x(F_k); \\
 Q_y &= \sum_0^n F_{ky}; & M_y &= \sum_0^n m_y(F_k).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Из приведенных уравнений следует, что:

N_z – *продольная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oz внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса. Продольная сила вызывает растяжение или сжатие.

Q_x – *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Ox внешних сил, действующих на отсеченную часть.

Q_y – *поперечная сила*, равная алгебраической сумме проекций на ось Oy внешних сил, действующих на отсеченную часть.

Силы Q_x и Q_y вызывают сдвиг сечения.

M_z – *крутящий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси Oz . Вызывает скручивание бруса.

M_x – *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Ox .

M_y – *изгибающий момент*, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси Oy .

Моменты M_x и M_y вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

1.7 НАПРЯЖЕНИЕ

Метод сечений позволяет определить величину внутреннего силового фактора в сечении, но не даёт возможности установить закон распределения внутренних сил по сечению. Для оценки прочности необходимо определить величину силы, приходящуюся на любую точку поперечного сечения.

Величину интенсивности внутренних сил в точке поперечного сечения называют внутренним напряжением или просто *напряжением*.

Напряжение характеризует величину внутренней силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения.

Рассмотрим произвольно нагруженный брус (рис. 5, а) и применим к нему метод сечений.

Выделим в сечении бесконечно малый элемент площади dA . В виду малости этого элемента можно считать, что в его пределах внутренние силы, приложенные в различных точках, одинаковы по модулю и направлению и, следовательно, представляют собой систему параллельных сил. Равнодействующую этой системы обозначим dR_0 . Разделив её на площадь элементарной площадки, определим интенсивность внутренних сил, то есть полное напряжение S в точках элементарной площадки dA :

$$S = \frac{dR_0}{dA} \quad (2)$$

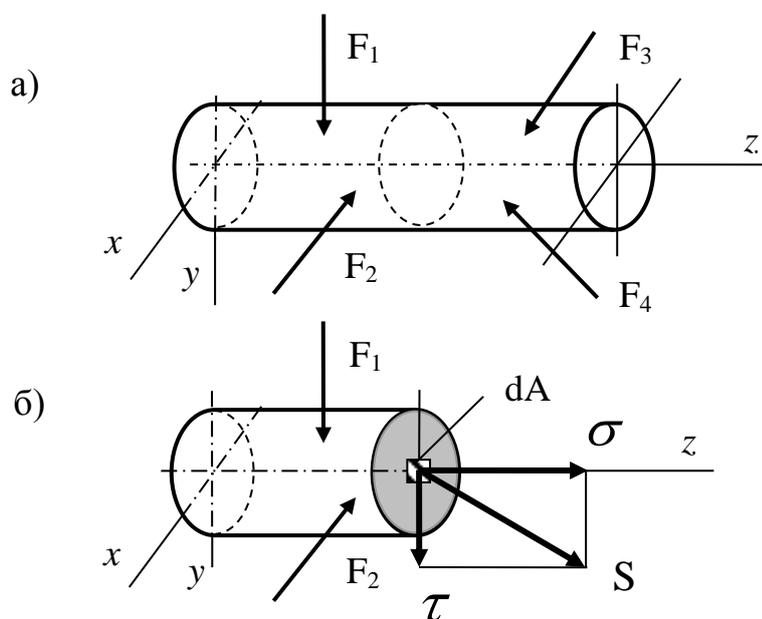


Рис. 5. Напряжения, возникающие в поперечных сечениях

Таким образом, *напряжение – это внутренняя сила, отнесённая к единице площади сечения*. Напряжение есть величина векторная.

Направление полного напряжения совпадает с направлением главного вектора внутренних сил. Единицы напряжения: $\text{Н/м}^2 = \text{Па}, \text{МПа}, \text{кН/см}^2$.

Вектор полного напряжения раскладывается на две составляющие (рис. 5, б).

Проекция полного напряжения на нормаль к площадке называется *нормальным напряжением* σ . Вектор нормального напряжения совпадает по направлению с продольной силой. Величина нормального напряжения определяется как отношение продольной силы к площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (3)$$

Проекция полного напряжения на касательную к площадке называется *касательным напряжением* τ . Вектор касательного напряжения по направлению совпадает с поперечной силой. Величина касательного напряжения определяется как отношение поперечной силы к площади поперечного сечения

$$\tau = \frac{Q}{A}. \quad (4)$$

Нормальное напряжение характеризует сопротивление сечения растяжению или сжатию, а касательное – сдвигу.

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения в рассматриваемой точке по данному сечению:

$$S = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (5)$$

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой напряженное состояние в этой точке.

В сопротивлении материалов нормальные и касательные напряжения имеют очень важное значение, так как от них зависит прочность сооружения.

В каждом поперечном сечении бруса напряжения связаны определенными зависимостями с внутренними усилиями. Продольная сила вызывает появление нормального напряжения, а поперечная сила – касательного напряжения. Изгибающий момент вызывает появление нормальных напряжений, переменных по сечению. Крутящий момент вызывает сдвиг сечения вокруг продольной оси, поэтому появляются касательные напряжения.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что изучает сопротивление материалов как наука?
2. Каковы критерии надежности работы сооружений?
3. Какова основная задача сопромата?
4. Что такое расчётная схема или расчётная система сооружения?
5. Перечислите физические свойства материалов.
6. Назовите основные формы элементов конструкций.
7. Типы опорных закреплений.
8. Какие балки называются статически определимыми?
9. Как определяются реакции опор для различных типов балок.
10. Внешние нагрузки и их классификация.
11. Какие нагрузки принято считать сосредоточенными?
12. Что такое распределенная нагрузка?
13. Перечислите основные виды деформаций элементов конструкций.
14. Внутренние усилия и метод их определения.
15. Что называется продольной силой, поперечной силой?
16. Сущность метода сечений.
17. Что такое крутящий момент, изгибающий момент?
18. Что такое напряжение? Составляющие полного напряжения?
19. Дайте определения нормального и касательного напряжений.

Глава 2

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ. ОСНОВЫ РАСЧЁТА СЖАТО-РАСТЯНУТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

2.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Растяжение и сжатие – это простой и часто встречающийся случай напряженного состояния элементов конструкций.

Одним из самых распространенных элементов инженерных конструкций является брус. *Брусом* (или стержнем) называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Стержни являются основными элементами многих инженерных конструкций и сооружений, таких, например, как ферма. Осевое или центральное растяжение (сжатие) – простейший вид деформации стержня, которой подвергаются элементы конструкций. При этом нагрузки в виде сосредоточенных или распределенных сил приложены в центре тяжести поперечного сечения стержня и линия их действия совпадает с его продольной осью. Для расчёта на прочность и жёсткость стержня необходимо определять внутренние усилия, напряжения и деформации, возникающие под действием внешних нагрузок. Необходимо принять во внимание следующие выводы, полученные опытным путем:

1. Поперечные сечения стержня, плоские и параллельные друг другу до деформации, остаются такими же и после неё. Это относится и к продольным сечениям. Данное обстоятельство носит название *гипотезы плоских сечений или гипотезы Бернулли*.

2. Все продольные волокна стержня в процессе деформации удлиняются или укорачиваются на одну длину. Следовательно, напряжения в поперечном сечении распределяются равномерно.

3. При действии растягивающей нагрузки поперечный размер стержня уменьшается, а при действии сжимающей нагрузки – увеличивается. Следовательно, продольная деформация стержня сопровождается одновременной поперечной деформацией, причём эти деформации имеют разные знаки.

Очевидно, что при осевом растяжении (сжатии) единственным внутренним усилием будет продольная сила, определяемая методом сечений. Следовательно, *центральное растяжение или сжатие* – это такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает только продольная сила, растягивающая или сжимающая, а все остальные внутренние усилия равны нулю.

2.2 ПРОДОЛЬНАЯ СИЛА

Продольная сила является проекцией главного вектора внутренних сил на продольную ось стержня. Считается, что внутренняя продольная сила действует вдоль оси растягиваемого или сжимаемого стержня перпендикулярно (по нормали) к его поперечным сечениям.

Продольная сила обозначается буквой *N*. Единицы измерения продольной силы совпадают с единицами измерения внешних нагрузок, в частности сосредоточенных сил, измеряющихся в *N, кН*.

Растягивающие продольные силы считаются положительными, а *сжимающие* – отрицательными. Продольная сила, как и все внутренние усилия, определяется *методом сечений*, основанном на принципе частного равновесия. В тех случаях, когда её значения неодинаковы в различных сечениях бруса, строят *эпюру продольных сил*.

Эпюрой называется графическое изображение изменения продольной силы по длине стержня. Эпюра необходима для расчёта стержней на прочность, так как по ней легко определить опасные сечения элемента – сечения, где продольная сила достигает наибольших абсолютных значений.

Определение внутренних сил требуется для оценки несущей способности элемента конструкции. Мерой внутренних усилий является **напряжение**.

2.3 НОРМАЛЬНОЕ НАПРЯЖЕНИЕ

НАПРЯЖЕНИЕ – это усилие, приходящееся на единицу площади.

При центральном растяжении и сжатии в сечениях стержней возникает только **нормальное напряжение**, являющееся проекцией полного напряжения на нормаль к сечению. Нормальное напряжение обозначается σ и имеет единицы измерения: **МПа** или **кН/см²**, то есть единицу силы, отнесённую к единице площади.

В случае, когда усилия распределяются по сечению равномерно, нормальное напряжение, возникающее в сечении, определяется по формуле (3):

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила, A – площадь поперечного сечения стержня.

Итак, в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении и сжатии возникают равномерно распределенные нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Нормальное напряжение считается положительным при растяжении и отрицательным при сжатии.

Эпюра нормальных напряжений строится по такому же принципу, как эпюра продольных сил. Каждая её ордината характеризует в принятом масштабе значение напряжений в соответствующем сечении стержня.

При построении эпюры напряжений приходится, как правило, разбивать стержень на большее число участков по длине, чем при построении эпюры продольных сил. Их границы определяются не только

сечениями, где изменяется внешняя нагрузка, но и сечениями, где меняется площадь поперечного сечения.

По эпюре нормальных напряжений выполняется **проверка прочности** сжато-растянутых стержней.

Под проверкой прочности конструкции или её элемента подразумевается ответ на следующий вопрос: разрушится ли конструкция под действием конкретной внешней нагрузки, а если не разрушится, то с каким запасом она работает?

Считается, что материал разрушается тогда, когда возникающее в нем напряжение превышает свое критическое значение. Это предельное значение называется **расчетным сопротивлением материала R** .

У каждого материала (стали, алюминия, дерева, бетона) своё значение расчетного сопротивления. Другими словами, конструкция не разрушится, пока выполняется условие прочности.

Условие прочности выражается в том, чтобы максимальное нормальное напряжение в стержне не превышало **расчётного сопротивления**, и записывается в виде следующего неравенства

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq R, \quad (6)$$

где N_{\max} – максимальное значение продольной силы в сечениях стержня, а A – площадь поперечного сечения.

Условие прочности позволяет выполнять три вида расчетов:

1. **Проверка прочности**

При заданной внешней нагрузке и заданных размерах поперечного сечения стержня определяется наибольшее напряжение, возникающее в его сечениях, которое сравнивается с расчётным сопротивлением материала стержня

$$\sigma_{\max} \leq R. \quad (7)$$

2. *Определение допускаемой нагрузки*

Нагрузка не должна превышать величину произведения расчетного сопротивления материала стержня на площадь его поперечного сечения

$$N_{\max} \leq R \cdot A. \quad (8)$$

3. *Подбор поперечного сечения стержня*

При заданной внешней нагрузке и заданном расчетном сопротивлении материала определяется требуемая площадь поперечного сечения, которая выражается из правой части условия прочности

$$A_{\text{тp}} \geq \frac{N_{\max}}{R}. \quad (9)$$

Целью расчёта на прочность является сочетание надёжности работы элемента конструкции с его экономичностью, то есть необходимо подобрать требуемые размеры поперечного сечения стержня, при которых будет выполняться условие прочности, при наименьшем расходе материала.

2.4 ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим прямой стержень постоянного поперечного сечения длиной l , закреплённый сверху и нагруженный растягивающей сосредоточенной силой F . Под действием силы стержень удлиняется на величину Δl (рис. 6).

Δl - *абсолютная продольная деформация* – разница между конечными и начальными продольными размерами стержня

$$\Delta l = l_1 - l. \quad (10)$$

Относительная продольная деформация – отношение абсолютной продольной деформации к первоначальной длине стержня

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (11)$$

Относительная продольная деформация – величина безразмерная.

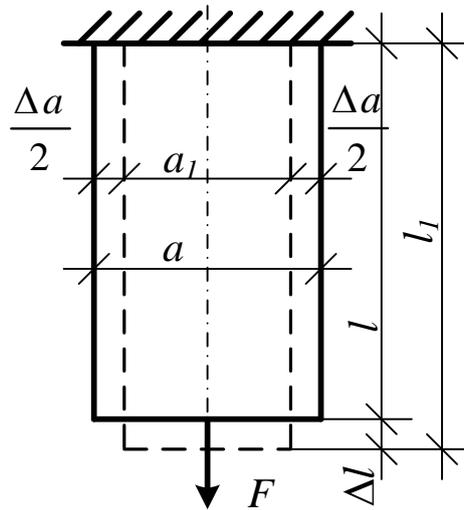


Рис. 6. Продольные и поперечные деформации стержня

Как при растяжении, так и при сжатии стержня помимо продольной линейной деформации в нём появляется и **поперечная деформация**.

Δa - абсолютная поперечная деформация, равная

$$\Delta a = a_1 - a. \quad (12)$$

ε' - относительная поперечная деформация, равная отношению абсолютной поперечной деформации к первоначальному поперечному размеру

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \quad (13)$$

При растяжении стержень сужается, а при сжатии его поперечные размеры становятся больше. Знаки значений продольной и поперечной деформации разные, потому что увеличение продольного размера нагруженного стержня влечёт уменьшение поперечных размеров, и наоборот.

Зависимость между продольной и поперечной относительной деформацией устанавливает закон Пуассона, который утверждает, что **при напряжениях, не превышающих предела упругости, относительная поперечная деформация прямо пропорциональна относительной продольной деформации, но имеет обратный знак:**

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (14)$$

где μ - коэффициент Пуассона, величина безразмерная и для каждого материала конкретная и постоянная. Значения коэффициента Пуассона для твердых материалов лежат в пределах от 0 до 0,5.

Опытным путём установлено, что чем больше внешняя сила, растягивающая стержень, тем больше его удлинение. Чем больше площадь поперечного сечения, тем удлинение стержня меньше.

В качестве эксперимента стержень, например стальной, подвергается растяжению на разрывной машине. В процессе испытания специальное устройство автоматически вычерчивает график, изображающий зависимость между нормальным напряжением в поперечных сечениях стержня и относительной деформацией, который представляет собой *диаграмму растяжения*.

Пока растягивающие напряжения не достигают предела пропорциональности, диаграмма представляет собой прямую линию, которая выражает прямую пропорциональную зависимость между напряжением и относительной продольной деформацией (рис. 7).

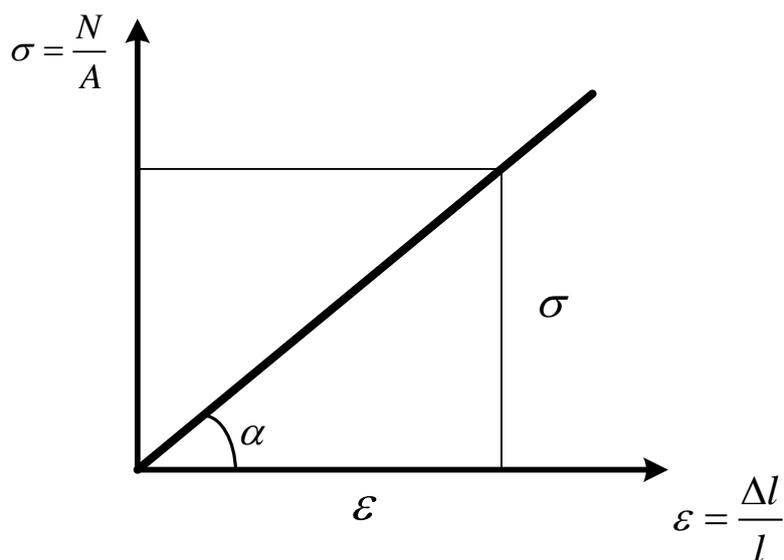


Рис. 7. Диаграмма растяжения стального стержня

Из прямоугольного треугольника, в котором катетом противолежащего угла является нормальное напряжение, а катетом прилежащего угла – относительная продольная деформация выразим тангенс угла α :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \text{ откуда } \sigma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \varepsilon.$$

Величина угла α зависит от физических свойств материала, из которого изготовлен испытываемый образец.

Обозначая $\operatorname{tg} \alpha = E$, получим

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \quad (15)$$

Эта зависимость установлена **Робертом Гуком** в 1678 году и справедлива только для материалов, работающих упруго. Закон, устанавливающий прямую пропорциональную зависимость между напряжениями и деформациями, получил название *закона Гука*.

При осевом растяжении и сжатии нормальное напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации.

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости материала* или модулем Юнга. Чем жестче материал, тем модуль упругости больше. Модуль упругости имеет ту же размерность, что и напряжение, поскольку относительная деформация – безразмерная величина. Таким образом, размерность модуля упругости есть единица силы, делённая на площадь – $\text{Н/м}^2 = \text{Па}, \text{МПа}, \text{кН/см}^2$.

Для различных материалов модуль упругости имеет разные значения. Например, для углеродистых сталей его значение находится в пределах

$$E_{ст} = (1,9 \div 2,1) \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \text{для меди и чугуна } E_m = E_{ч} = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

для алюминия $E_{ал} = 0,7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Модуль упругости и коэффициент Пуассона являются исчерпывающими механическими (физическими) характеристиками каждого упругого материала.

При решении задач чаще используется *развернутый закон Гука*.

Подставляя в формулу (15) закона Гука $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$,

выразим абсолютную продольную деформацию

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (16)$$

Произведение модуля упругости на геометрическую характеристику сечения EA , стоящее в знаменателе формулы (16) является комплексной характеристикой сечения и называется *жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении и сжатии*. Откуда следует, что удлинение стержня, вызванное продольной силой N , тем меньше, чем жёстче сечение стержня, то есть чем больше по величине произведение EA .

Величина
$$C = \frac{EA}{l} \quad (17)$$

называется *жесткостью стержня*. В связи с этим формулу (16) можно записать в следующем виде

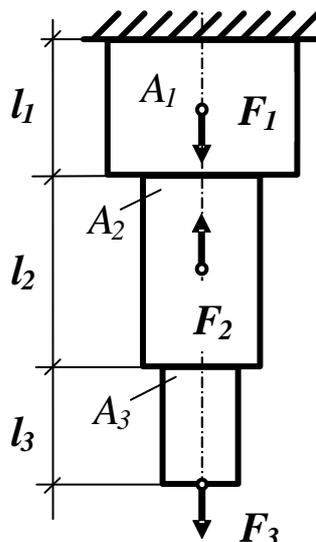
$$\Delta l = \frac{N}{C} \quad (18)$$

При осевом растяжении и сжатии абсолютная деформация прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна жесткости стержня.

Для наглядного представления деформации и оценки жесткости стержня строится эпюра перемещений. Определение перемещений необходимо начинать от неподвижного конца стержня, то есть от заделки. Искомое перемещение можно определить, суммируя деформации отдельных участков стержня. При этом необходимо учитывать, что знак деформаций должен соответствовать знаку продольной силы.

Пример 1. Для статически определимого прямого трёхступенчатого стального стержня требуется построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений и дать оценку прочности материала. Внешние силы приложены вдоль продольной оси стержня.

Дано: $F_1 = 80 \text{ кН}$, $F_2 = 40 \text{ кН}$, $F_3 = 60 \text{ кН}$;
 $A_1 = 10 \text{ см}^2$, $A_2 = 5 \text{ см}^2$, $A_3 = 3 \text{ см}^2$;
 $l_1 = 80 \text{ см}$, $l_2 = 100 \text{ см}$, $l_3 = 40 \text{ см}$;
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $R = 210 \text{ МПа}$.



Решение: вычертим стержень в соответствии с его размерами, проведём границы участков и нулевые линии эпюр.

Расчёт начинаем с определения реакций жёсткой заделки. Так как все внешние силы приложены вдоль продольной оси стержня, то в заделке будет возникать только одна вертикальная реакция, а две других будут равны нулю. Произвольно выбираем направление реакции. Заданный стержень является статически определимым, поэтому для нахождения неизвестной реакции составляем уравнение равновесия стержня в виде суммы проекций всех сил на его продольную ось, совпадающую с осью Y прямоугольной системы координат:

$$\sum F_y = 0; \quad R - F_1 + F_2 - F_3 = 0;$$

$$R = F_1 - F_2 + F_3 = 80 - 40 + 60 = 100 \text{ кН}.$$

Положительное значение вычисленной реакции жесткой заделки говорит о правильно выбранном её направлении. То есть заданный стержень находится в равновесии под действием внешних сил и реакции опоры (сумма всех сил, направленных в одну сторону равна сумме сил, направленных в другую сторону). В случае отрицательного значения реакции необходимо изменить её направление и в дальнейших расчетах считать реакцию положительной.

Выделим характерные сечения трёхступенчатого стержня, в которых будем определять продольные силы и напряжения. Для этого мысленно разделим стержень на участки. Границы участков стержня проходят там, где изменяется площадь поперечного сечения стержня и где приложены внешние нагрузки.

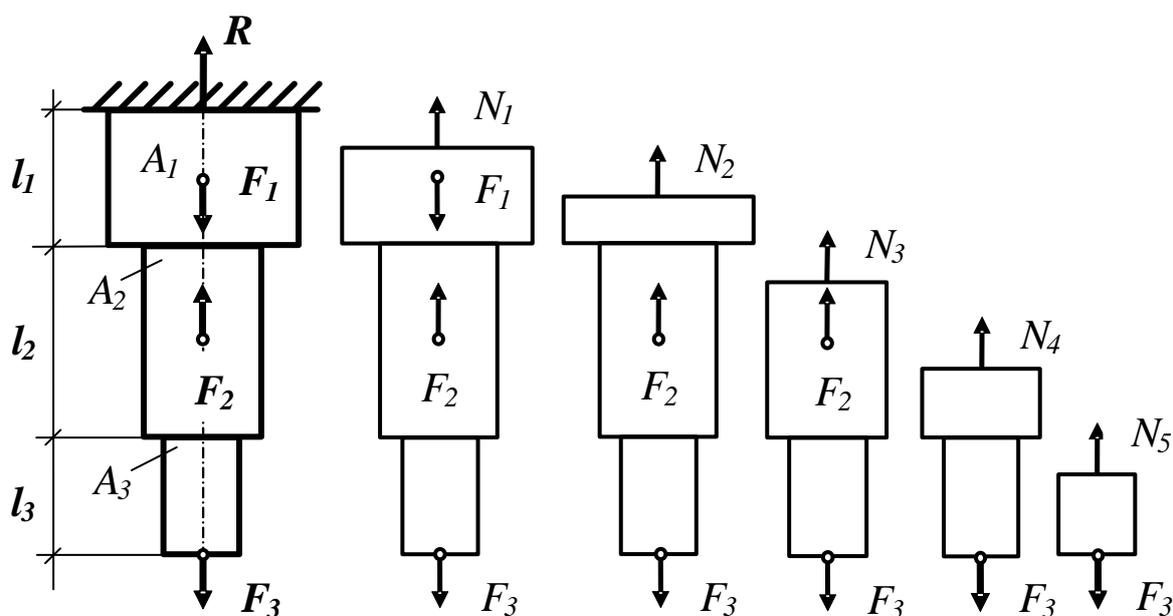


Рис. 8. Определение внутренних усилий методом сечений

Значение продольной силы в любой отсечённой части стержня находится методом сечений на основе уравнений статики из условия равновесия этой части стержня. Для этого каждый характерный участок стержня мысленно разрезаем сечением, отбрасываем одну его часть (любую), действие отброшенной части на оставшуюся заменяем внутренним усилием (продольной силой) и составляем уравнение равновесия в виде суммы

проекций всех внешних сил на продольную ось стержня. Направление продольной силы в каждом сечении выбираем положительным, то есть растягивающим часть стержня.

Вычисляем таким образом значения продольной силы на каждом участке стержня:

$$N_1 - F_1 + F_2 - F_3 = 0; \quad N_1 = F_1 - F_2 + F_3 = 100 \text{ кН};$$

$$N_2 + F_2 - F_3 = 0; \quad N_2 = F_3 - F_2 = 20 \text{ кН};$$

$$N_3 + F_2 - F_3 = 0; \quad N_3 = F_3 - F_2 = 20 \text{ кН};$$

$$N_4 - F_3 = 0; \quad N_4 = F_3 = 60 \text{ кН};$$

$$N_5 - F_3 = 0; \quad N_5 = F_3 = 60 \text{ кН}.$$

На основании найденных значений продольных сил в характерных сечениях стержня строим эпюру продольных сил (рис. 9, а).

Нормальные напряжения в тех же сечениях стержня определим по формуле (3):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{20 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 20 \cdot 10^6 \text{ Па} = 20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 40 \cdot 10^6 \text{ Па} = 40 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{60 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-4}} = 120 \cdot 10^6 \text{ Па} = 120 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{N_5}{A_3} = \frac{60 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па} = 200 \text{ МПа}.$$

По полученным данным строим эпюру напряжений (рис. 9, б).

Под действием внешней нагрузки статически определимый стержень деформируется (растягивается или сжимается). Возникают продольная и

поперечная деформации. Соответственно, каждое поперечное сечение стержня получает перемещение. Неподвижным остаётся только опорное сечение. Поэтому эпюра перемещений строится, начиная от жесткой заделки, в которой перемещение равно нулю. Каждое последующее сечение поступательно перемещается на величину деформации участка, расположенного между жесткой заделкой и рассматриваемым сечением.

Для определения перемещений отдельных сечений ступенчатого стержня по формуле (16) развёрнутого закона Гука вычислим абсолютные деформации всех участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,2 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,04 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,04 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2 / 2}{EA_2} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 1 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,1 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_2 / 2}{EA_2} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 1 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,3 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = \frac{N_5 l_3}{EA_3} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,4 \text{ мм}.$$

Найдём перемещения характерных сечений стержня, как алгебраическую сумму абсолютных деформаций рассматриваемых участков:

$$\delta_1 = \Delta l_1 = 0,2 \text{ мм};$$

$$\delta_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,2 + 0,04 = 0,24 \text{ мм};$$

$$\delta_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,24 + 0,1 = 0,34 \text{ мм};$$

$$\delta_4 = \delta_3 + \Delta l_4 = 0,34 + 0,3 = 0,64 \text{ мм};$$

$$\delta_5 = \delta_4 + \Delta l_5 = 0,64 + 0,4 = 1,04 \text{ мм}.$$

Таким образом, незакреплённый конец стержня поступательно перемещается на 1,04 мм, то есть стержень растягивается на 1,04 мм (о том, что произошло именно растяжение стержня можем судить по положительному значению последнего перемещения).

На основании результатов расчёта строим эпюру перемещений характерных сечений стержня (рис. 9, в).

Прочность материала стержня проверим в сечении, где напряжение наибольшее по абсолютному значению:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_5}{A_3} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Следовательно, недонапряжение материала стержня составляет

$$\frac{210 - 200}{210} \cdot 100\% = 4,8\%.$$

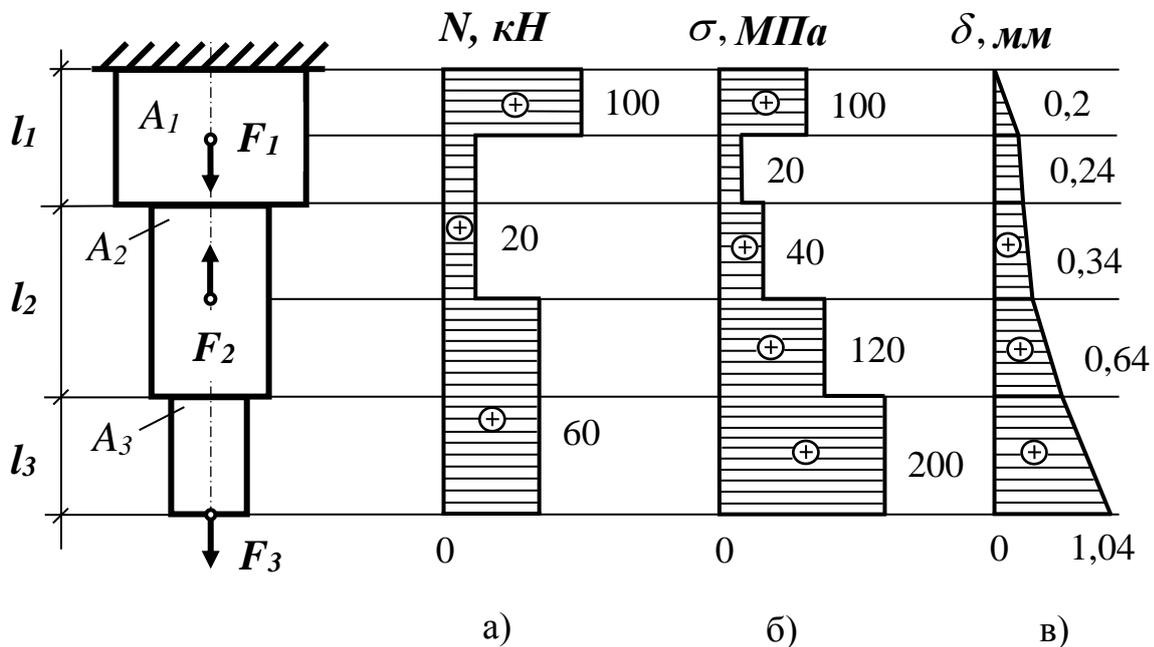


Рис. 9. Расчет статически определимого прямого ступенчатого стержня

2.5 РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 1

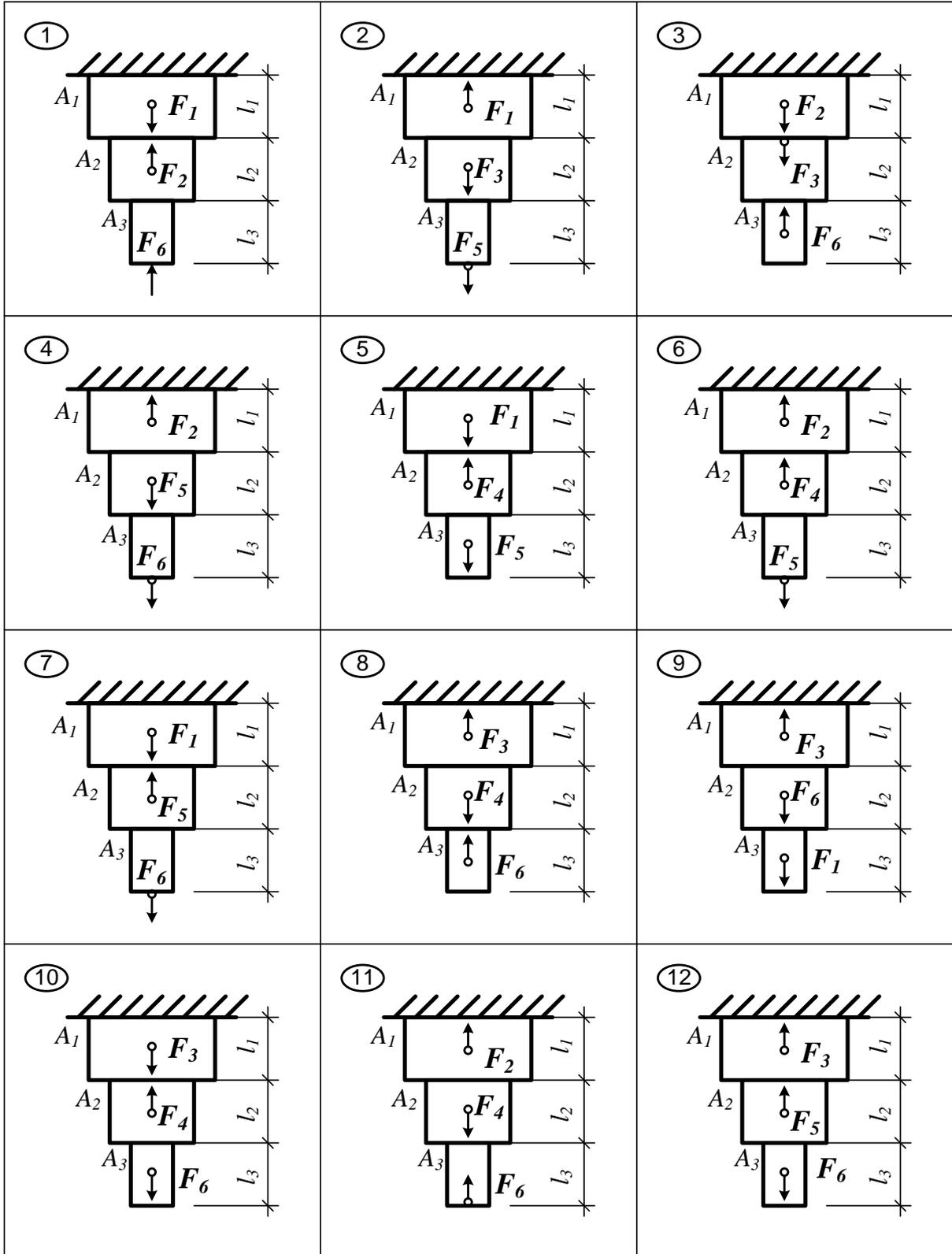
Центральное растяжение и сжатие статически определимого прямого ступенчатого стержня

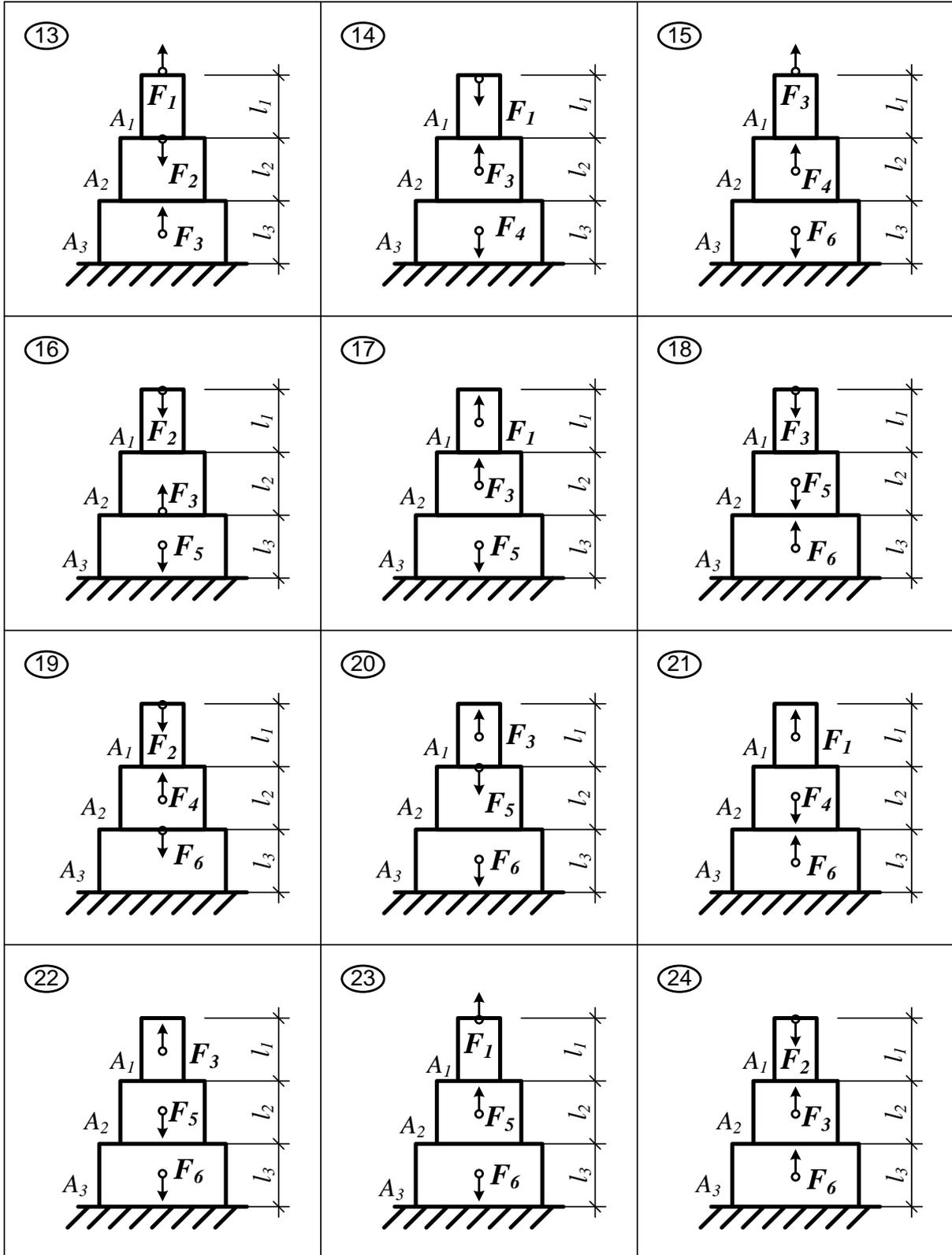
Статически определимый ступенчатый стержень находится под действием внешних сосредоточенных сил, приложенных по концам или в центре соответствующего участка стержня вдоль его продольной оси. Материал стержня – сталь с расчётным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$.

Требуется:

1. Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.
2. Оценить прочность стержня.

Схему для расчёта и числовые данные к ней выбрать в соответствии с заданным вариантом (рис. 10, табл. 1).





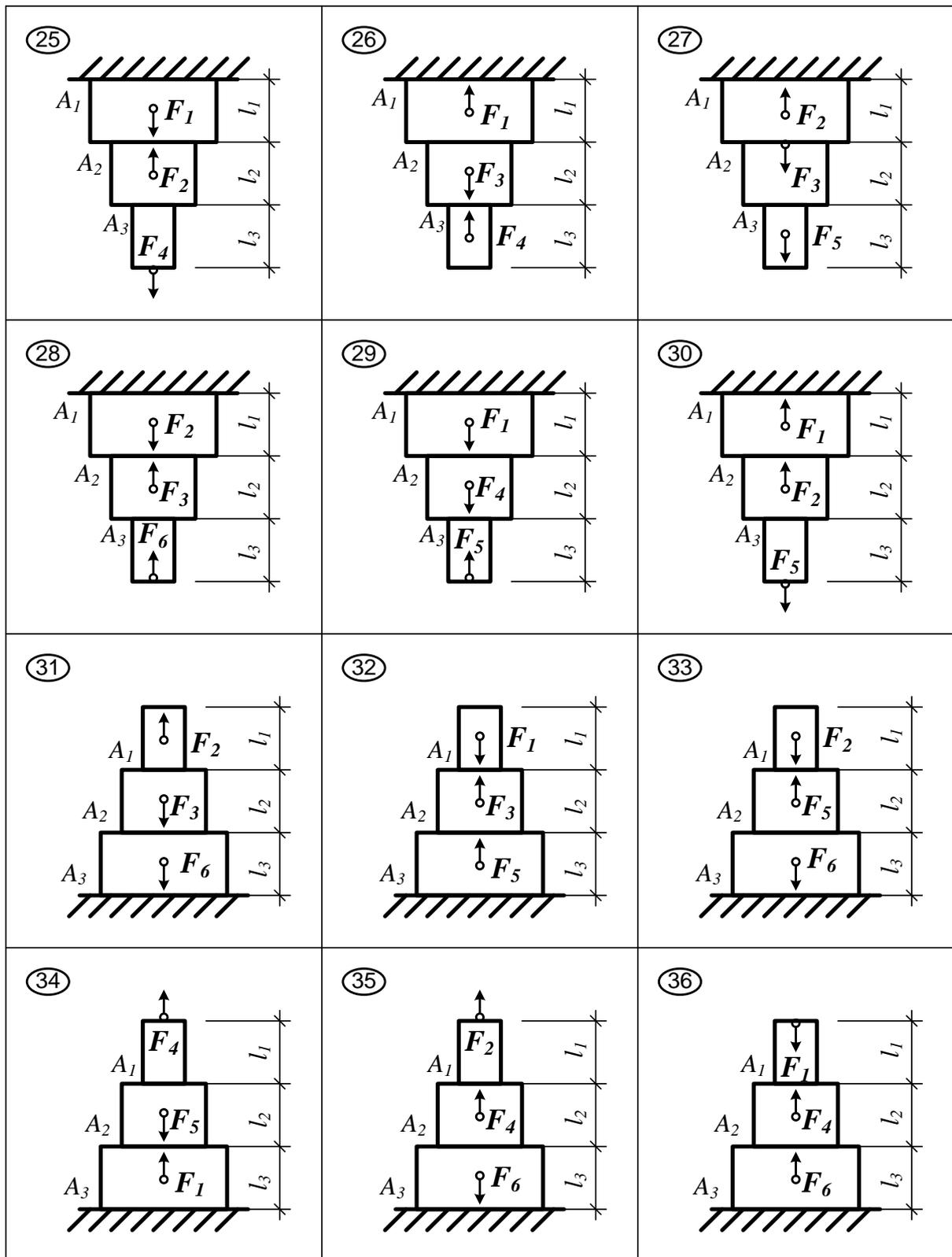


Рис. 10. Расчётные схемы статически-определимых стержней

Числовые данные к расчётно-графическим заданиям № 1 и № 2

Номер задания	Длина участка, см			Площадь поперечного сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	l_1	l_2	l_3	A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	38	46	50	6	4	8	160	180	60	140	80	100
2	60	54	48	10	12	6	120	100	160	80	60	140
3	64	40	70	3	8	5	50	120	70	90	160	80
4	80	36	60	4	12	8	70	160	100	80	120	60
5	56	80	40	8	10	6	120	50	80	140	70	100
6	80	64	44	6	8	10	60	120	70	80	100	140
7	40	80	50	8	4	6	60	180	160	140	100	80
8	50	46	70	10	4	4	120	80	200	160	120	60
9	80	40	30	14	4	8	80	140	160	60	60	80
10	42	60	80	12	8	6	100	140	100	120	40	60
11	52	42	62	12	16	8	60	120	160	80	100	40
12	78	50	60	8	4	16	120	80	140	100	60	120
13	30	80	42	10	12	6	80	100	120	80	60	80
14	42	62	50	6	12	4	120	140	100	60	80	60
15	60	30	48	10	4	8	140	80	60	100	120	40
16	70	50	60	6	8	4	100	120	100	140	40	80
17	62	36	72	12	6	6	120	100	80	60	120	100
18	64	40	64	10	4	8	140	100	120	80	140	80
19	74	48	62	6	8	6	40	120	80	160	200	60
20	54	68	48	4	8	12	180	200	140	100	80	100
21	40	64	72	8	12	8	60	40	140	160	180	60
22	36	80	70	6	10	4	140	100	160	180	120	80
23	50	40	62	4	12	8	60	160	80	120	100	60
24	80	58	40	4	8	10	180	100	140	160	120	120
25	56	46	32	12	6	8	60	160	80	120	100	60
26	60	74	42	6	12	4	140	100	160	180	200	80
27	70	30	40	4	12	6	60	80	160	140	100	80
28	80	40	62	10	4	6	180	140	100	160	140	100
29	62	80	42	6	8	10	140	80	60	180	160	80
30	38	70	60	12	4	6	120	140	120	100	160	140
31	64	30	80	8	6	4	160	120	80	60	160	100
32	70	60	50	4	8	10	180	160	80	100	120	140
33	28	48	80	12	8	6	80	140	60	120	100	160
34	34	70	60	8	10	4	140	200	100	120	80	120
35	62	40	50	6	12	8	60	180	160	140	100	80
36	50	60	48	8	12	10	180	100	140	120	80	60

2.6 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕЙ

Статически неопределимыми называются стержни (рис. 11, а), для которых нахождение внутренних усилий и опорных реакций методами статики невозможно.

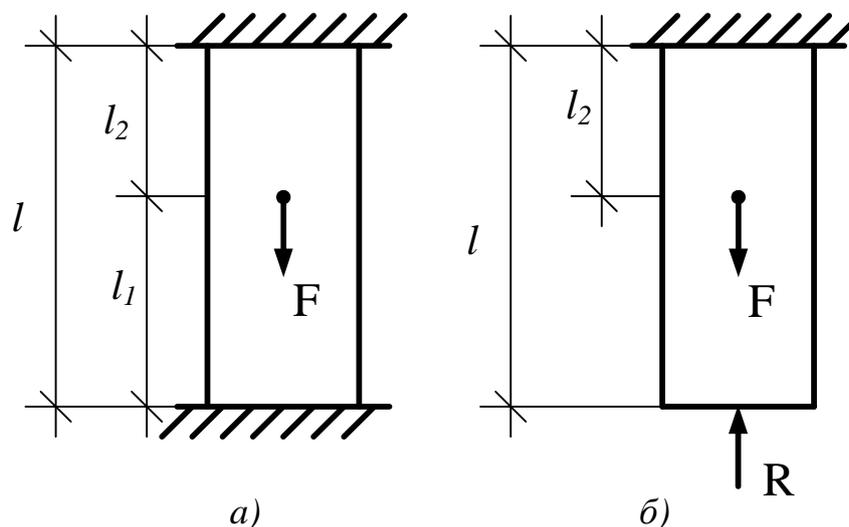


Рис. 11. Статически неопределимый стержень

Для раскрытия статической неопределимости требуется составление дополнительных уравнений, учитывающих деформацию стержня. Для этого мысленно отбрасывают одну заделку и заменяют её действие неизвестной опорной реакцией R (рис. 11, б). Значение этой реакции определяется из условия, что сечение в отброшенной заделке не перемещается:

$$\delta = \Delta l_F - \Delta l_R = 0. \quad (19)$$

Абсолютную деформацию участков стержня определяем по формуле развёрнутого закона Гука (16). Абсолютная деформация стержня от действия внешней сосредоточенной силы F :

$$\Delta l_F = \frac{Fl_2}{EA}. \quad (20)$$

Абсолютная деформация стержня от действия реакции R :

$$\Delta l_R = \frac{Rl}{EA}. \quad (21)$$

Подставляя выражения абсолютных деформаций в уравнение (19), находим неизвестную реакцию жесткой заделки:

$$R = \frac{Fl_2}{l}. \quad (22)$$

Аналогично находится и опорная реакция в верхней заделке. Равенство нулю суммы проекций на вертикальную ось внешних нагрузок и опорных реакций свидетельствует о правильности вычисления последних.

После нахождения опорных реакций расчёт стержня и анализ его напряжённо-деформированного состояния производится как для статически определимого.

Пример 2. Для двухступенчатого статически неопределимого стального стержня (рис. 12, а) найти опорные реакции, построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и оценить прочность стержня. Внешние силы приложены вдоль продольной оси стержня.

Дано: $F_1 = 80 \text{ кН}; F_2 = 60 \text{ кН};$
 $A_1 = 6 \text{ см}^2; A_2 = 4 \text{ см}^2;$
 $l_1 = 120 \text{ см}; l_2 = 80 \text{ см};$
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; R = 210 \text{ МПа}.$

Решение. Для определения значения верхней опорной реакции мысленно отбрасываем верхнее защемление и заменяем его неизвестной реакцией R_I (рис. 12, б). Направление реакции выбираем произвольно. Используя формулу развёрнутого закона Гука (16) и принцип независимости действия сил, рассматриваем деформацию каждого участка стержня от действия неизвестной опорной реакции и каждой внешней силы в отдельности. При этом деформацию сжатых участков учитываем со знаком «минус», а растянутых – со знаком «плюс». Уравнение составляется из условия, что суммарная деформация всех участков стержня должна быть равна нулю, так как статически неопределимый стержень закреплен с двух сторон жесткими заделками, поэтому первоначальная общая длина стержня не изменяется и остается постоянной. Так, например, реакция R_I сжимает оба

участка стержня, сила F_1 растягивает участок, длина которого равна $l_1/2$ и участок длиной l_2 , а сила F_2 сжимает участок длиной l_2 . Суммарная же деформация всех участков стержня от действия всех сил и опорной реакции должна быть равна нулю:

$$-\frac{R_1 l_1}{EA_1} - \frac{R_1 l_2}{EA_2} + \frac{F_1 l_1 / 2}{EA_1} + \frac{F_1 l_2}{EA_2} - \frac{F_2 l_2}{EA_2} = 0;$$

Подставив значения заданных внешних сил, а также длин и площадей участков стержня и решив уравнение, получим значение реакции $R_1 = 30$ кН.

Аналогично определяем значение нижней опорной реакции R_2 , для чего отбрасываем нижнее защемление (рис. 12, в) и составляем уравнение деформации всех участков стержня, используя вышеизложенное условие:

$$-\frac{R_2 l_1}{EA_1} - \frac{R_2 l_2}{EA_2} - \frac{F_1 l_1 / 2}{EA_1} + \frac{F_2 l_1}{EA_1} = 0;$$

откуда находим значение реакции $R_2 = 10$ кН.

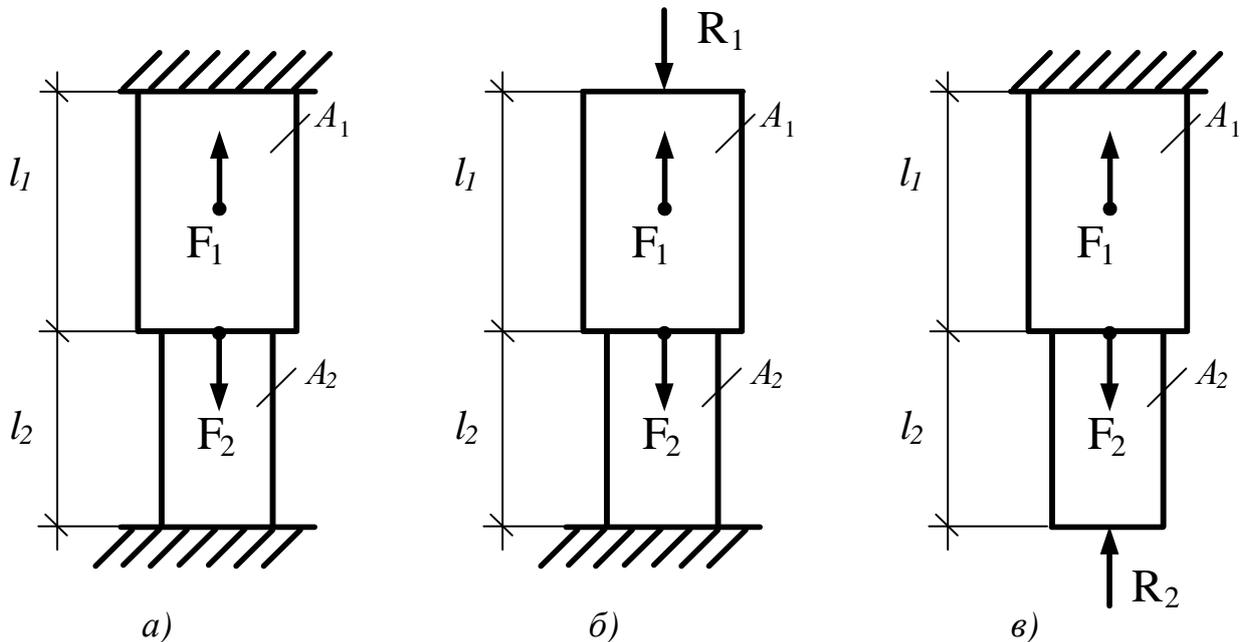


Рис. 12. Статически неопределимый стержень. Определение реакций опор

Положительные значения найденных реакций свидетельствуют о правильно выбранном направлении. В том случае, если значение опорной реакции получается отрицательным, необходимо изменить её направление на

противоположное и в дальнейших расчетах значение реакции считать положительным.

Для проверки правильности вычисления опорных реакций составляем уравнение равновесия стержня в виде суммы проекций всех сил на продольную ось стержня, которая должна быть равна нулю

$$\sum F_Y = 0; \quad -R_1 + F_1 - F_2 + R_2 = 0.$$

Далее на основе метода сечений находим значения продольных сил в характерных сечениях стержня (рис. 13). Стержень имеет три участка, каждый из которых поочередно разрезается сечениями. Границы участков проходят там, где изменяется площадь поперечного сечения стержня и в тех сечениях, где к заданному стержню приложены внешние силы. Таким образом, метод сечений для заданного стержня будем применять три раза. Проводим сечение 1-1, отбрасываем нижнюю часть стержня (можно отбрасывать любую часть стержня), действие отброшенной части на оставшуюся заменяем внутренней продольной силой N_1 . Направление продольной силы (рис. 13, а) выбираем таким образом, чтобы оставшаяся часть стержня находилась в равновесии (в рассматриваемом примере – вверх). В более сложных случаях расчёта, когда правильное направление определить затруднительно, продольная сила направляется в сторону отброшенной части стержня, а знак вычисленной продольной силы указывает на вид деформации данного участка стержня («плюс» - растяжение, «минус» - сжатие), который отображается на эпюре продольных сил. Составляем уравнение равновесия отсеченной части стержня в виде суммы проекций всех сил на продольную ось стержня, из которого находим неизвестную продольную силу:

$$N_1 - R_1 = 0; \quad N_1 = R_1 = 30 \text{ êÍ} .$$

Далее, разрезаем стержень сечением 2-2, отбрасываем его нижнюю часть (рис. 13, б), заменяем действие отброшенной части стержня на

оставшуюся продольной силой N_2 и составляем уравнение равновесия, определяя неизвестную продольную силу:

$$-N_2 - R_1 + F_1 = 0; \quad N_2 = -R_1 + F_1 = 50 \text{êÍ} .$$

Аналогично, делаем сечение 3-3, отбрасывая теперь уже верхнюю часть стержня (рис. 13, в), находим продольную силу N_3 :

$$-N_3 + R_2 = 0; \quad N_3 = R_2 = 10 \text{кН}.$$

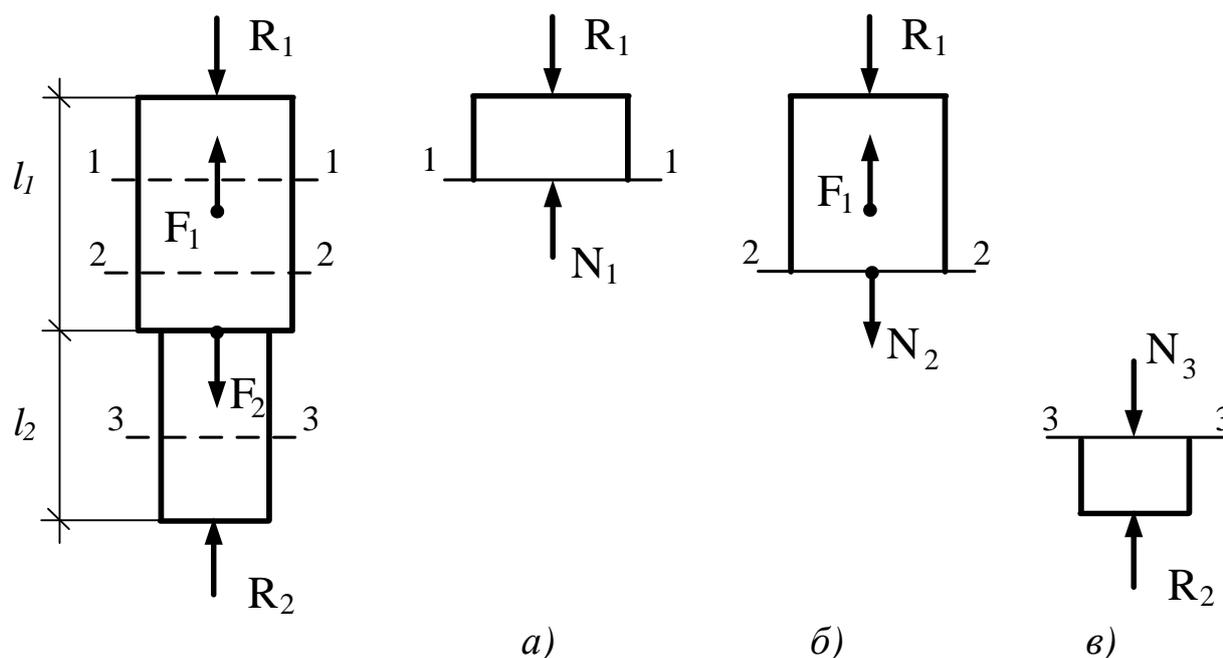


Рис. 13. Определение внутренних усилий методом сечений

Используя полученные значения продольной силы на каждом участке, строим эпюру продольных сил (рис. 14, а) для всего стержня в целом.

Выполняем проверку правильности построения эпюры продольных сил. В поперечном сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, эпюра продольных сил должна иметь скачок (разницу значений в одном и том же сечении) на величину данной силы. Таким образом, эпюра продольных сил должна иметь столько скачков, сколько внешних сил приложено к заданному стержню.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня вычисляем по формуле (3)

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-30 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{50 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 83,3 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ МПа}.$$

Используя полученные значения, строим эпюру нормальных напряжений (рис. 14, б).

Построение эпюры перемещений для статически неопределимого ступенчатого стержня можно начинать с любой стороны, так как стержень имеет жесткие заделки с двух сторон, и перемещение в них всегда равно нулю. Величина перемещений характерных поперечных сечений стержня зависит от величины деформаций участков стержня. Каждое последующее сечение поступательно перемещается на величину деформации участка, расположенного между жесткой заделкой и рассматриваемым сечением.

Абсолютные деформации отдельных участков стержня вычисляем по формуле (16) развёрнутого закона Гука:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{-30 \cdot 10^3 \cdot 1,2 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_{1/2}}{EA_1} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 1,2 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_2} = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = -0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,1 \text{ мм}.$$

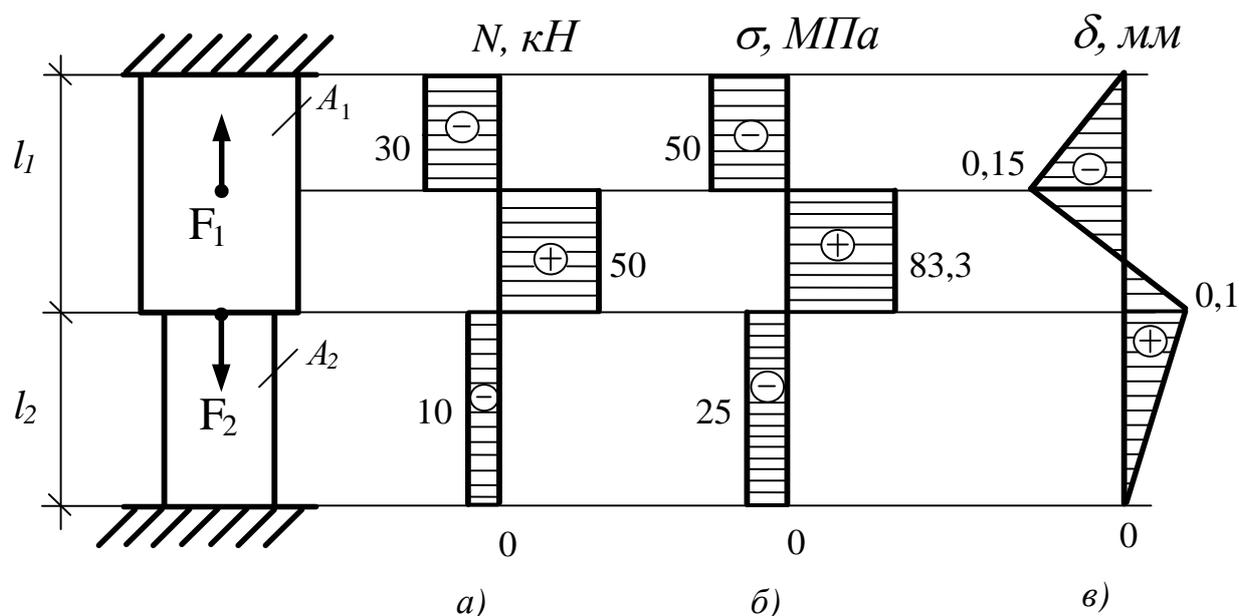


Рис. 14. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений для статически неопределимого стержня

Перемещения характерных сечений стержня находим как алгебраическую сумму абсолютных деформаций соответствующих участков:

$$\delta_1 = \Delta l_1 = -0,15 \text{ мм};$$

$$\delta_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = -0,15 + 0,25 = 0,1 \text{ мм};$$

$$\delta_3 = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0,1 - 0,1 = 0.$$

Эпюра вертикальных перемещений поперечных сечений стержня построена на рисунке 14, в.

Прочность материала стержня проверим в том сечении, где нормальное напряжение наибольшее по абсолютному значению:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_2}{A_1} = 83,3 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Следовательно, недонапряжение материала стержня составляет

$$\frac{210 - 83,3}{210} \cdot 100\% = 60,3\%.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой вид деформации называется растяжением или сжатием?
2. Что называется продольной силой?
3. Каким методом определяется продольная сила?
4. Что называется нормальным напряжением?
5. Какие деформации возникают при растяжении и сжатии?
6. В чём различие между реальным объектом и его расчётной схемой?
7. Что характеризует модуль продольной упругости?
8. В чём заключается сущность метода сечений?
9. Закон Гука. Развернутый закон Гука.
10. Как выполняется проверка прочности материала стержня при растяжении или сжатии?

2.7 РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 2

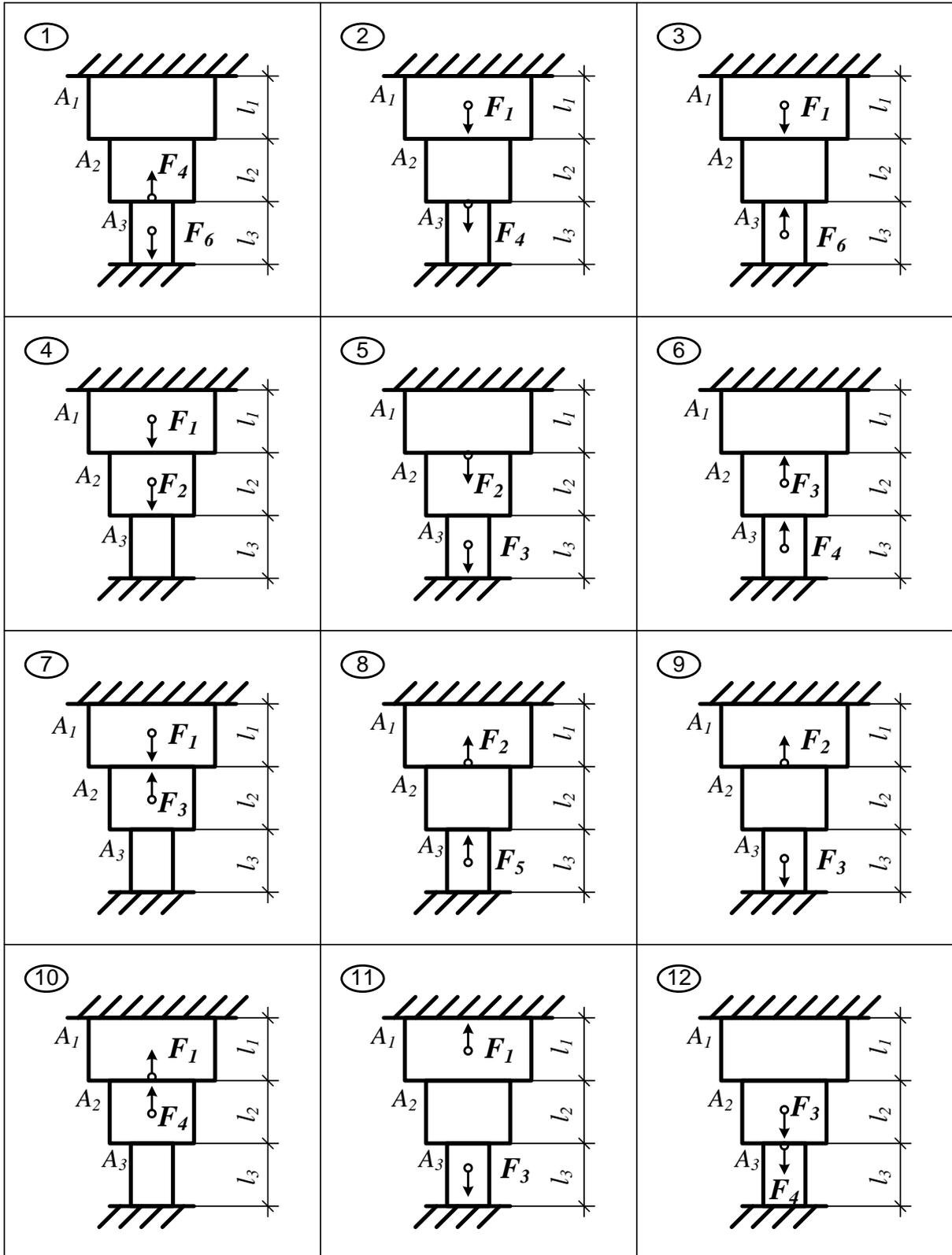
Центральное растяжение и сжатие статически неопределимого прямого ступенчатого стержня

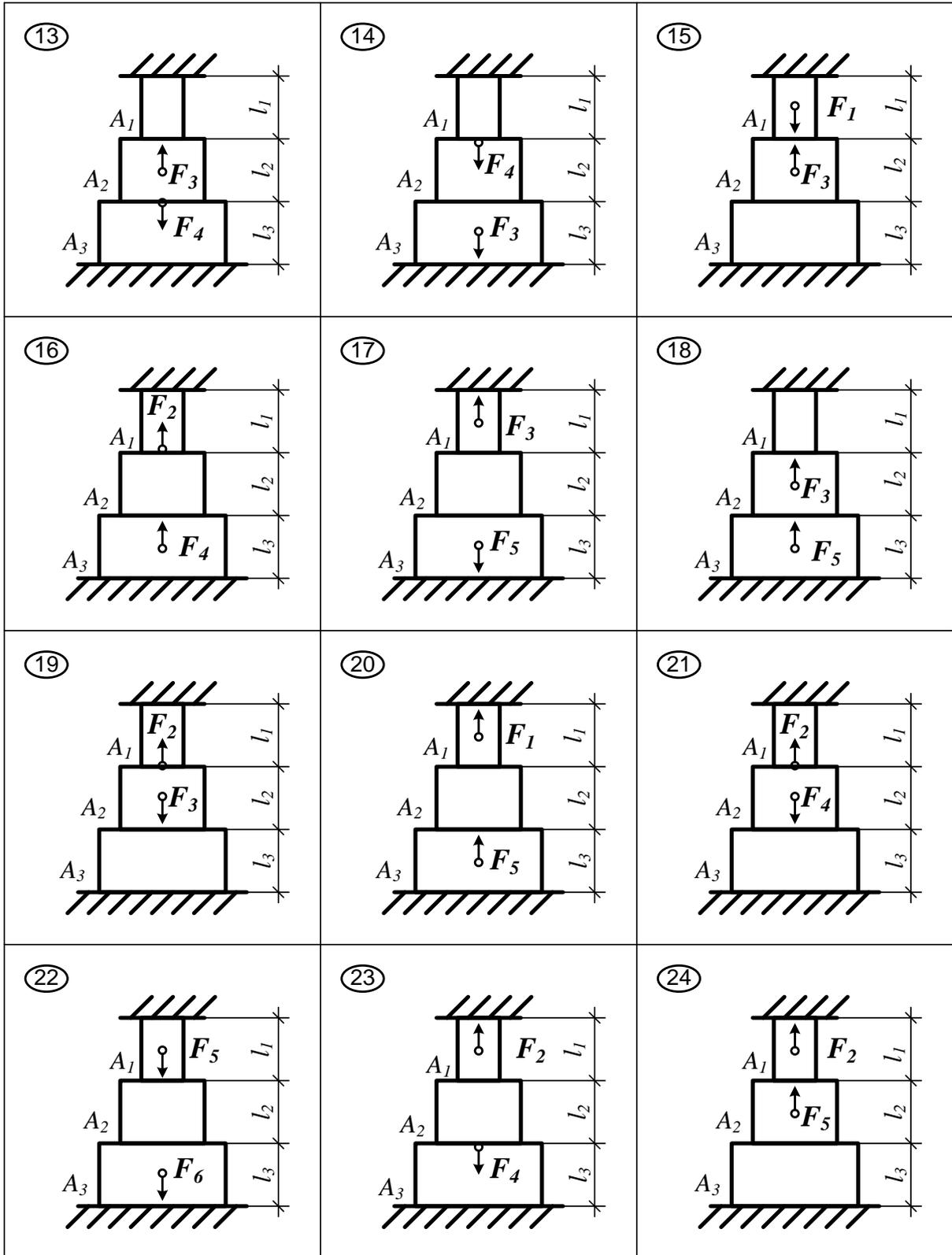
Статически неопределимый прямой ступенчатый стержень нагружен внешними продольными сосредоточенными силами. Материал стержня – сталь с расчётным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$.

Требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.
3. Оценить прочность стержня.

Расчётную схему и числовые данные к ней выбрать в соответствии с заданным вариантом (рис. 15, табл. 1).





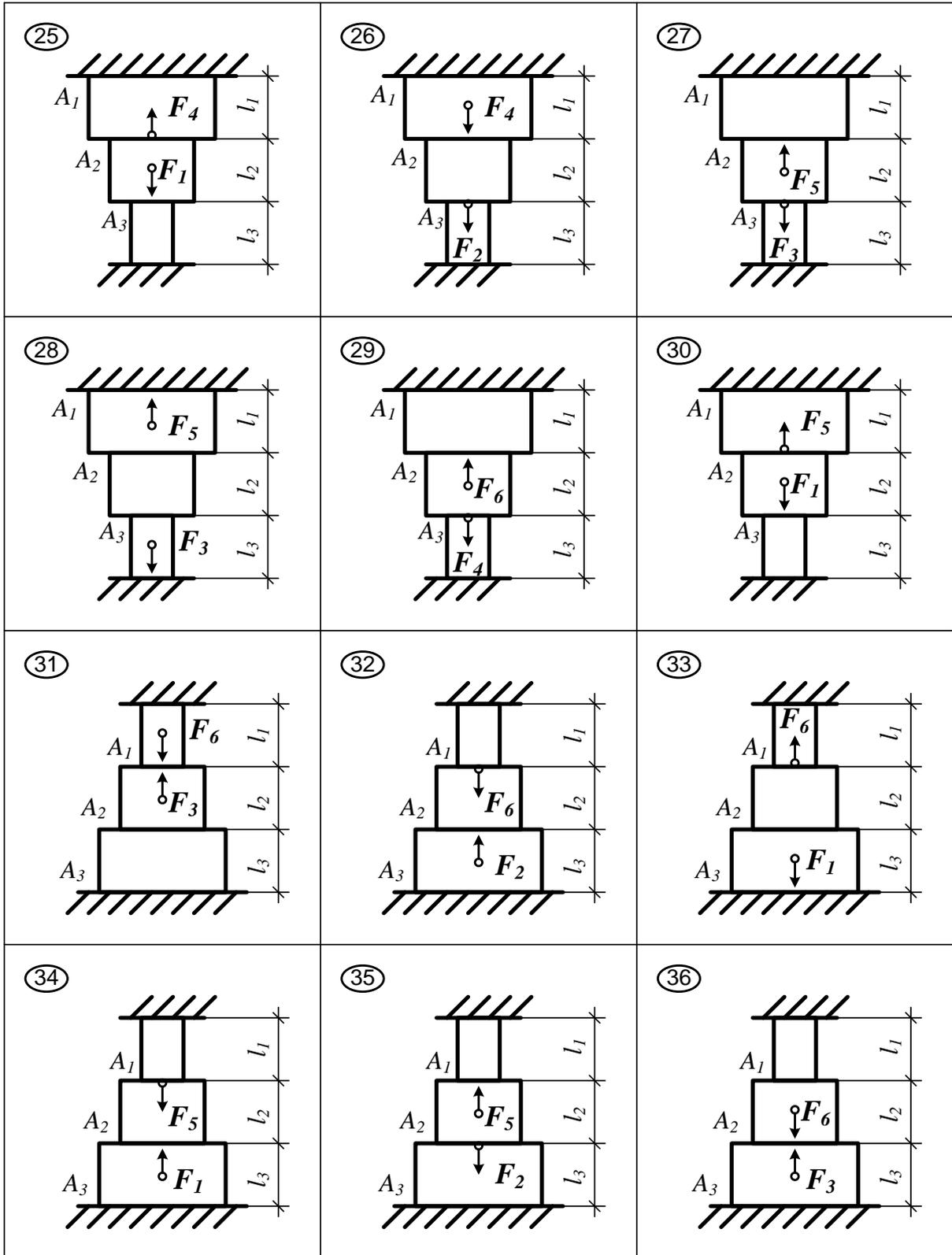


Рис. 15. Расчетные схемы статически неопределимых стержней

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

3.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

При осевом растяжении и сжатии прочность и жесткость стержней, а также напряжения, возникающие в их сечениях, зависят от площадей поперечных сечений рассматриваемых стержней. Площадь является важнейшей характеристикой стержня. Форма же поперечного сечения практически не оказывает влияния на перечисленные величины. Это связано с тем, что при осевом растяжении и сжатии напряжения распределяются равномерно по поперечному сечению.

ПЛОЩАДЬ – простейшая геометрическая характеристика поперечного сечения. Пусть сечение состоит из элементарных площадок dA , тогда площадь всего сечения

$$A = \int dA. \quad (23)$$

При расчетах на изгиб и кручение, а также при расчете устойчивости продольно сжатых стержней используются более сложные геометрические характеристики сечений, которые зависят не только от величины и формы поперечного сечения, но также от положения осей и точек, относительно которых они вычисляются. К ним относятся: статический момент сечения, осевые, центробежный и полярный моменты инерции сечения.

3.2 СТАТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СЕЧЕНИЯ

Выделим на поперечном сечении стержня произвольной формы элементарную площадку dA с координатами x и y (рис. 16).

Статическим моментом сечения относительно произвольной оси называется взятая по всей его площади A сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояние до этой оси, то есть интеграл вида:

$$S_y = \int_A x dA; \quad S_x = \int y dA. \quad (24)$$

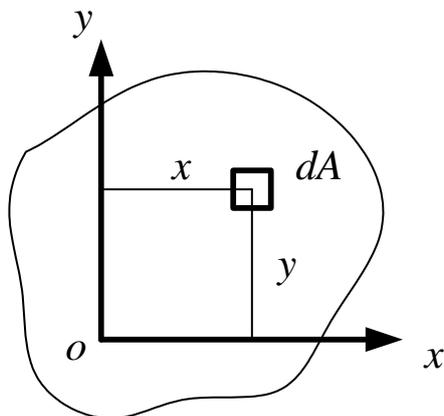


Рис. 16. Статический момент сечения

СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

1. Размерность – линейная единица в 3-й степени (см^3 , м^3 и т.д.).
2. Статический момент может быть положительным, отрицательным, равным нулю, в зависимости от расположения оси, относительно которой он определяется.
3. Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси. Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно различных осей.

$$\begin{aligned} S_x &= \sum S_x^n = S_x^1 + S_x^2 + \dots + S_x^n, \\ S_y &= \sum S_y^n = S_y^1 + S_y^2 + \dots + S_y^n. \end{aligned} \quad (25)$$

4. Статический момент любой площади A относительно какой-либо оси равен произведению этой площади A на расстояние от её центра тяжести до данной оси

$$S_x = y_c A, \quad S_y = x_c A. \quad (26)$$

Это свойство позволяет определять положение центра тяжести любого сложного сечения (рис. 17).

Тогда координаты центра тяжести будут вычисляться по формулам

$$y_c = \frac{S_x}{A}; \quad x_c = \frac{S_y}{A}. \quad (27)$$

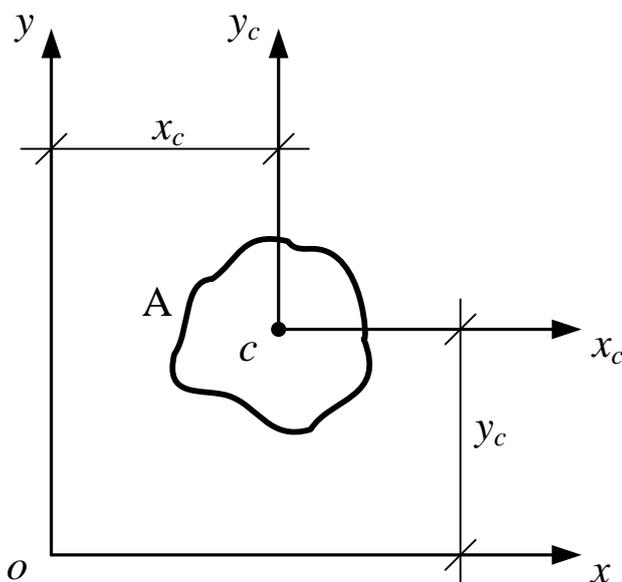


Рис. 17. Свойства статического момента

Из свойства вытекают важные **следствия**:

- а) если оси проходят через центр тяжести, то статические моменты равны нулю;
- б) если статические моменты равны нулю, то оси проходят через центр тяжести.

Оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются **центрными осями**.

Пример 3. Определить положение центра тяжести сложного сечения, показанного на рисунке 18.

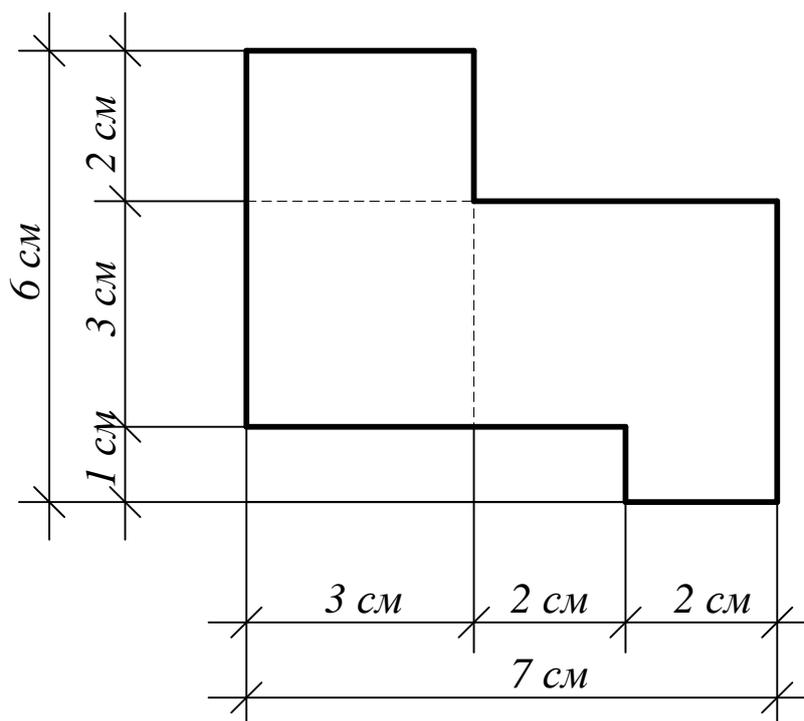


Рис. 18. Заданное сложное сечение

Положение центра тяжести сечения на плоскости определяется при помощи двух координат x_c и y_c . Для их нахождения выполним следующие действия:

1. Вычертим сечение в масштабе, покажем все необходимые оси и размеры.
2. Разобьём сложное сечение на ряд простых.
3. Для каждого сечения выберем прямоугольную систему координат с началом в его центре тяжести.
4. Вычислим площадь каждого прямоугольника

$$A_1 = 5 \cdot 3 = 15 \text{ см}^2; \quad A_2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ см}^2; \quad A_3 = 4 \cdot 2 = 8 \text{ см}^2.$$

5. Определим площадь всего сечения как сумму площадей простых сечений

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 15 + 6 + 8 = 29 \text{ см}^2.$$

6. Выберем вспомогательные оси x_b и y_b таким образом, чтобы всё сечение находилось в одной, желательно положительной, четверти плоскости.
7. Вычислим статические моменты каждого прямоугольника относительно вспомогательных осей, используя свойство статического момента

$$S_{x_b}^1 = A_1 \cdot y_1 = 15 \cdot 3,5 = 52,5 \text{ см}^3, \quad S_{y_b}^1 = A_1 \cdot x_1 = 15 \cdot 1,5 = 22,5;$$

$$S_{x_b}^2 = A_2 \cdot y_2 = 6 \cdot 2,5 = 15 \text{ см}^3, \quad S_{y_b}^2 = A_2 \cdot x_2 = 6 \cdot 4 = 24;$$

$$S_{x_b}^3 = A_3 \cdot y_3 = 8 \cdot 2 = 16 \text{ см}^3, \quad S_{y_b}^3 = A_3 \cdot x_3 = 8 \cdot 6 = 48 \text{ см}^3.$$

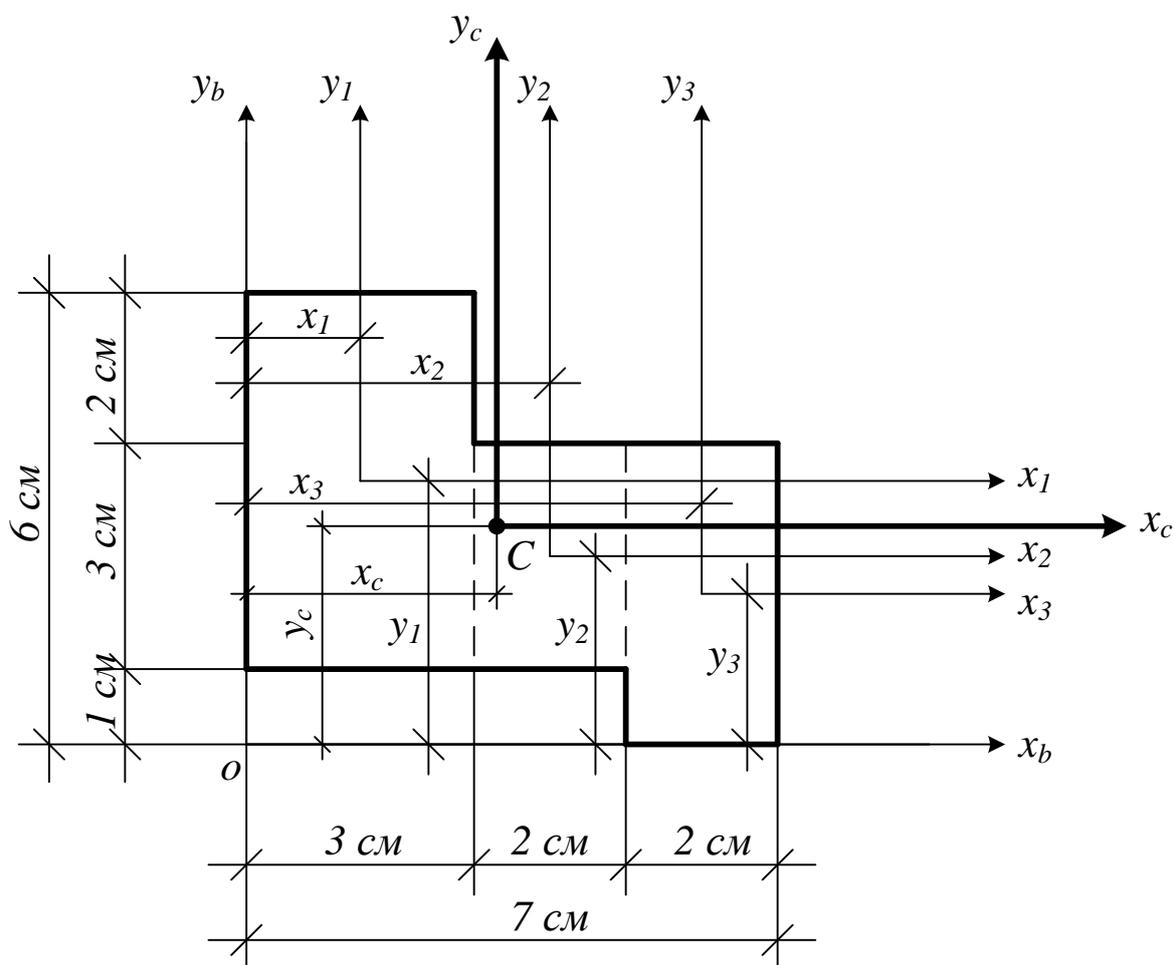


Рис. 19. Определение координат центра тяжести сложного сечения

8. Находим статические моменты всего сечения относительно вспомогательных осей, как сумму статических моментов простых сечений, используя свойство геометрических характеристик

$$S_{xb} = S_{xb}^1 + S_{xb}^2 + S_{xb}^3 = 52,5 + 15 + 16 = 83,5 \text{ см}^3,$$

$$S_{yb} = S_{yb}^1 + S_{yb}^2 + S_{yb}^3 = 22,5 + 24 + 48 = 94,5 \text{ см}^3.$$

9. Определим координаты центра тяжести всего сечения по формуле (27)

$$x_c = \frac{S_{yb}}{A} = \frac{94,5}{29} = 3,26 \text{ см}, \quad y_c = \frac{S_{xb}}{A} = \frac{83,5}{29} = 2,88 \text{ см}.$$

10. Построим центр тяжести сложного сечения, откладывая координаты x_c и y_c от начала координат вспомогательных осей.

11. Через полученный центр тяжести проводим оси x_c и y_c , которые называются центральными осями.

3.3 МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЯ

Выделим на поперечном сечении стержня произвольной формы элементарную площадку dA с координатами x и y и полярным радиусом ρ (рис. 20).

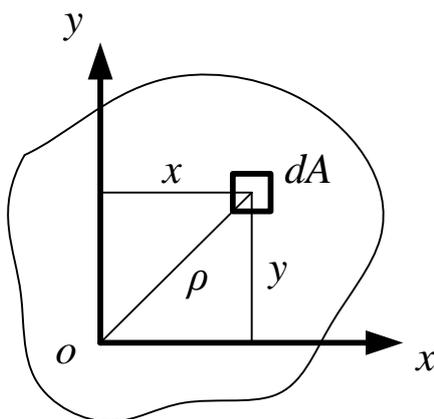


Рис. 20. Моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты расстояний до этой оси, то есть интеграл вида

$$I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA; \quad I \geq 0; \quad [см^4]. \quad (28)$$

Свойство: осевой момент инерции сложного сечения относительно какой либо оси равен сумме осевых моментов инерции всех частей этого сечения относительно той же оси

$$I_x = I_x^1 + I_x^2 + \dots + I_x^n. \quad (29)$$

Это свойство справедливо для всех геометрических характеристик. Нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно различных осей и точек.

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок dA на квадраты расстояний от этой точки (на квадраты полярных радиусов), то есть интеграл вида

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA; \quad I_\rho \geq 0; \quad [см^4]. \quad (30)$$

Свойство: сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей (рис. 1)

$$I_y + I_x = I_\rho. \quad (31)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A x^2 dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA; \\ I_y + I_x &= \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A \rho^2 dA = I_\rho; \\ I_x + I_y &= I_\rho, \quad \text{ч.т.д.} \end{aligned}$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния до этих осей

$$I_{xy} = \int_A xy dA; \quad I_{xy} < 0; I_{xy} > 0; I_{xy} = 0; [cm^4]. \quad (32)$$

Свойство: центробежный момент инерции сечения относительно осей, совпадающих с осями симметрии сечения равен нулю.

3.4 ИЗМЕНЕНИЕ ОСЕВЫХ И ЦЕНТРОБЕЖНОГО МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Установим зависимость между осевыми моментами инерции одного и того же сечения относительно осей, параллельных друг другу и отстоящих на расстояниях a и c друг от друга (рис. 21).

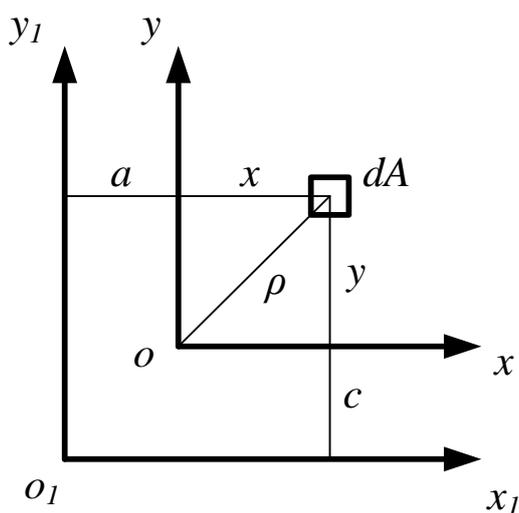


Рис. 21. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей координат

Осевые моменты инерции относительно осей, параллельных заданным, получим, подставив в формулы значения расстояний до новых осей

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A y^2 dA; & I_y &= \int_A x^2 dA; & I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA; & I_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA; \\
 x_1 &= x + a; & y_1 &= y + c; \\
 I_{x_1} &= \int_A (y + c)^2 dA = \int_A (y^2 + 2yc + c^2) dA = \int_A y^2 dA + \\
 &+ 2c \int_A y dA + c^2 \int_A dA = I_x + 2cS_x + c^2 A. \\
 I_{y_1} &= \int_A (x + a)^2 dA = I_y + 2aS_y + a^2 A.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Примечание: если первоначальные оси координат проходят через центр тяжести сечения, то есть являются центральными, то статические моменты равны нулю и формулы изменения осевых моментов инерции при параллельном переносе осей координат примут вид:

$$I_{x_1} = I_x + c^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + a^2 A. \tag{34}$$

Аналогично выведем формулы изменения центробежного момента инерции при параллельном переносе осей координат.

$$\begin{aligned}
 I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + a)(y + c) dA = \int_A (xy + xc + ay + ac) dA = \\
 &= \int_A xy dA + c \int_A x dA + a \int_A y dA + ac \int_A dA = I_{xy} + cS_y + aS_x + acA.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Примечание: 1) если первоначальные оси координат проходят через центр тяжести сечения, то статические моменты равны нулю и выражение примет следующий вид:

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + acA, \tag{36}$$

2) если сечение симметрично и одна из первоначальных осей проходит через центр тяжести и является осью симметрии, то центробежный момент инерции будет равен

$$I_{x_1 y_1} = acA. \tag{37}$$

3.5 ИЗМЕНЕНИЕ ОСЕВЫХ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Установим как изменятся осевые и центробежный моменты инерции при повороте осей координат на некоторый угол α . Такую задачу часто приходится решать при расчетах сложных (составных) сечений.

Пусть известны осевые и центробежный моменты инерции сечения относительно исходных осей x , y с началом координат в точке O (рис. 22).

Координаты элементарной площадки dA в исходной системе координат равны $x = OD$, $y = KD$. Координаты в новой системе $x_1 = OB$, $y_1 = KB$.

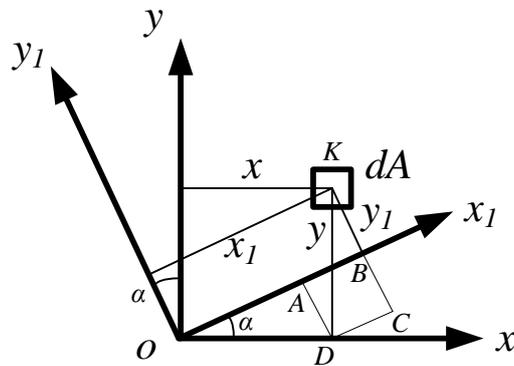


Рис. 22. Изменение моментов инерции при повороте осей координат

Выразим новые координаты x_1 и y_1 через старые. Для этого из точки D проведем прямые, параллельные осям x_1 и y_1 , а из точки K проведем прямую, параллельную новой оси y_1 . При пересечении этих линий с осью ox_1 получим точки A и B , а также точку C пересечения прямых DC и KC .

Новые координаты элементарной площадки установим из чертежа:

$$x_1 = OB = OA + AB = OD \cos \alpha + KD \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_1 = KB = KC - BC = KD \cos \alpha - OD \sin \alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Таким образом, имеем новые координаты элементарной площадки:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\y_1 &= y \cos \alpha - x \sin \alpha.\end{aligned}\quad (38)$$

Это есть формулы преобразования координат при повороте осей вокруг начала координат.

Вычислим моменты инерции сечения относительно новых осей

$$\begin{aligned}I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA - \\ &- 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (39)$$

Аналогично получим

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha.\quad (40)$$

Сложив почленно выражения осевых моментов инерции, получим

$$\begin{aligned}I_{x_1} + I_{y_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha + \\ &+ I_{xy} \sin 2\alpha = I_x (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + I_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = I_x + I_y.\end{aligned}$$

Отсюда следует важный вывод: *сумма осевых моментов инерции относительно двух любых взаимно перпендикулярных осей постоянна и не зависит от угла поворота осей вокруг начала координат*

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = \text{const}.\quad (41)$$

Центробежный момент инерции относительно осей, повернутых на угол α по отношению к заданным, определится подстановкой новых координат в выражение центробежного момента инерции:

$$\begin{aligned}I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(y \sin \alpha + x \cos \alpha) dA = \\ &= \sin \alpha \cos \alpha \left(\int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA \right) + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int_A xy dA;\end{aligned}$$

Откуда
$$I_{x_1y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (42)$$

3.6 ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ И ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ

Из вышеизложенного следует, что при повороте координатных осей моменты инерции изменяются, а их сумма остается величиной постоянной. Поэтому, очевидно, можно найти такое положение осей, при котором один из моментов инерции получит максимальное значение, а другой – минимальное из всех возможных. Такие моменты инерции называются *главными*, а соответствующие оси – главными осями инерции сечения. Если при этом оси проходят через центр тяжести сечения, то их называют *главными центральными осями инерции*.

Установлено, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю. Приравнивая центробежный момент инерции (42) к нулю, определим положение главных осей инерции

$$\begin{aligned} \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha &= 0; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \end{aligned} \quad (43)$$

Подставляя значение угла α в формулы изменения осевых моментов инерции при повороте осей координат (39) и (40), получим значения *главных осевых моментов инерции*.

Для построения эллипса инерции определим радиусы инерции по формулам

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (44)$$

Если I_x и I_y главные моменты инерции, то i_x и i_y - главные радиусы инерции. Эллипс инерции показывает направление наибольшей и наименьшей жесткости сечения и называется **центральный эллипсом инерции фигуры**.

Если моменты инерции относительно главных осей равны между собой, то радиусы инерции тоже равны между собой, тогда эллипс инерции обращается в круг инерции. Для таких сечений все оси являются главными осями. К числу таких сечений относятся круг, кольцо, квадрат и т.д.

Нахождение величины главных моментов инерции и положения главных центральных осей связано с решением задач расчета на прочность и жесткость балок и стержней сложного сечения при изгибе, внецентренном растяжении или сжатии, а также с расчетами на устойчивость продольно сжатых стержней.

В расчетной практике используются геометрические характеристики как простых, так и сложных (составных) сечений. Сведения о геометрических характеристиках простых фигур можно найти в различных инженерных справочниках, содержащих готовые формулы. Напомним, что простыми фигурами называют те, у которых известны положение центра тяжести и формула площади. Координаты центра тяжести и формулы для определения площадей для некоторых простых сечений размещены в приложении 4.

Пример 4. Найти положение главных центральных осей инерции и величину главных моментов инерции для заданного сечения, приведенного на рисунке 23, а.

Сечение составлено из двутавра № 12 (рис. 23, б), прямоугольника (рис. 23, в) и неравнобокого уголка № 8/5 (рис. 23, г).

Из сортамента прокатной стали выписываем необходимые данные. При этом присваиваем двутавру индекс 1, листу - индекс 2, а уголку - индекс 3.

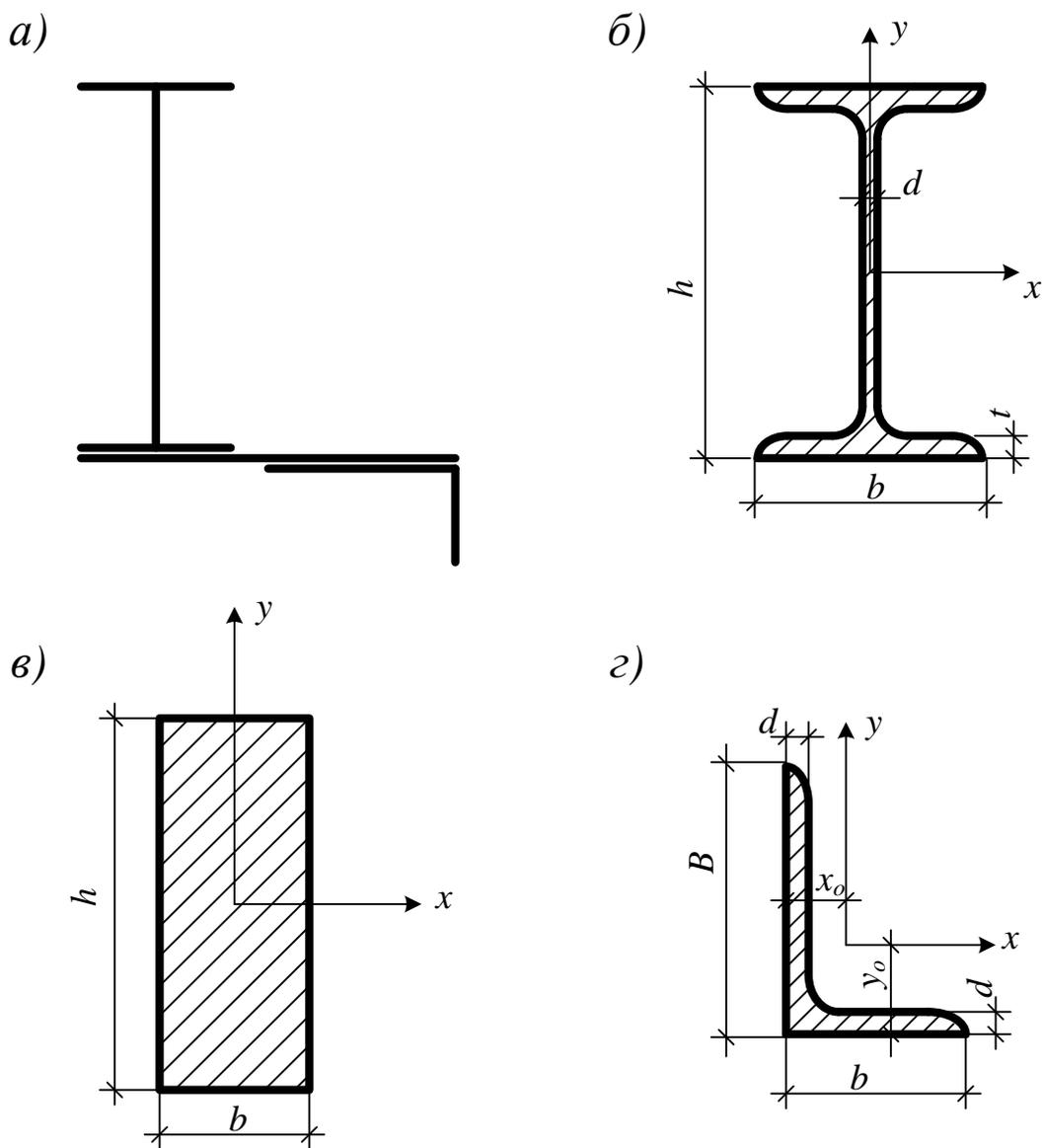


Рис. 23. Геометрический расчет сложного сечения
 а) составное сечение; б) двутавр; в) лист; г) уголок

1. Двутавр № 12(ГОСТ 8239-89):

$$h = 120 \text{ мм}, b = 64 \text{ мм}, d = 4,8 \text{ мм}, t = 7,3 \text{ мм}, A = 14,7 \text{ см}^2,$$

$$I_x = 350 \text{ см}^4, I_y = 27,9 \text{ см}^4.$$

2. Прямоугольный лист: $h = 16 \text{ см}, b = 2 \text{ см}.$

3. Неравнобокий уголок (ГОСТ 8509-89):

$$B = 80 \text{ мм}, b = 50 \text{ мм}, d = 5 \text{ мм}, A = 6,36 \text{ см}^2, \operatorname{tg} \alpha = 0,387,$$

$$x_0 = 1,13 \text{ см}, y_0 = 2,6 \text{ см}, I_x = 41,6 \text{ см}^4, I_y = 12,7 \text{ см}^4, I_{\min} = 7,58 \text{ см}^4.$$

Вычертим сечение в масштабе, показав все необходимые оси и размеры (рис. 24). Для каждого сечения выберем прямоугольную систему координат с началом в центре тяжести сечения. Системы координат выбираются параллельными друг другу. Обозначим все оси соответствующими индексами.

Вычислим площадь всего сечения как сумму площадей простых сечений

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 14,7 + 32 + 6,36 = 53,06 \text{ см}^2.$$

Определим осевые и центробежные моменты инерции каждого сечения относительно осей, проходящих через их центр тяжести.

Для двутавра: $I_{x_1} = 350 \text{ см}^4$, $I_{y_1} = 27,9 \text{ см}^4$, $I_{x_1 y_1} = 0$.

Для прямоугольника:

$$I_{x_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{16 \cdot 2^3}{12} \approx 10,67 \text{ см}^4, \quad I_{y_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 16^3}{12} \approx 682,67 \text{ см}^4, \quad I_{x_2 y_2} = 0.$$

Для неравнобокого уголка:

$$I_{x_3} = 12,7 \text{ см}^4, \quad I_{y_3} = 41,6 \text{ см}^4, \quad I_{u_{\min}} = 7,58,$$

$$I_{xy} = \frac{I_x + I_y - I_{u_{\min}}}{2} \sin 2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,387, \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,387, \quad \alpha \approx 21,156;$$

$$2\alpha = 42,3; \quad \sin 2\alpha = 0,673;$$

$$I_{x_3 y_3} = \frac{41,6 + 12,7 - 7,58}{2} \cdot 0,673 = 15,72.$$

Для определения положения центра тяжести всего сечения выберем вспомогательные оси x_b и y_b , относительно которых вычислим статические моменты каждого сечения

$$S_{x_b}^1 = A_1 \cdot \left(\frac{h_1}{2} + b_2 + b_3 \right) = 14,7(6 + 2 + 5) = 191,1 \text{ см}^3,$$

$$S_{y_b}^1 = A_1 \cdot \frac{b_2}{2} = 14,7 \cdot 3,2 = 47,04 \text{ см}^3,$$

$$S_{xb}^2 = A_2 \left(\frac{b_2}{2} + b_3 \right) = 32 \cdot 6 = 192 \text{ см}^3,$$

$$S_{yb}^2 = A_2 \frac{h_2}{2} = 32 \cdot 8 = 256 \text{ см}^3,$$

$$S_{xb}^3 = A_3 (b_3 - x_0) = 6,36 \cdot (5 - 1,13) = 24,61 \text{ см}^3,$$

$$S_{yb}^3 = A_3 (h_2 - y_0) = 6,36 \cdot (16 - 2,6) = 85,22 \text{ см}^3.$$

Определим суммарные статические моменты всего сечения относительно вспомогательных осей

$$S_{xb} = S_{xb}^1 + S_{xb}^2 + S_{xb}^3 = 191,1 + 192 + 24,61 = 407,71 \text{ см}^3,$$

$$S_{yb} = S_{yb}^1 + S_{yb}^2 + S_{yb}^3 = 47,04 + 256 + 85,22 = 388,26 \text{ см}^3.$$

Координаты центра тяжести составного сечения вычислим по формулам (26):

$$x_c = \frac{S_{yb}}{A} = \frac{388,26}{53,06} = 7,3 \text{ см}, \quad y_c = \frac{S_{xb}}{A} = \frac{407,71}{53,06} = 7,7 \text{ см}.$$

Нанесём на чертеже центр тяжести C всего сечения и проведём через него центральные оси x_c и y_c , параллельные вспомогательным осям.

Определим осевые и центробежные моменты инерции каждого сечения относительно центральных осей. Для этого будем использовать формулы изменения моментов инерции при параллельном переносе осей координат (34), (35):

$$I_{xc} = I_x + c^2 A; \quad I_{yc} = I_y + a^2 A; \quad I_{xcyc} = I_{xy} + acA,$$

где I_x и I_y – осевые моменты инерции рассматриваемого сечения, относительно осей, проходящих через его центр тяжести,

I_{xy} – центробежный момент инерции рассматриваемого сечения относительно осей, проходящих через его центр тяжести,

c – расстояние между центральной осью x_c и осью x , проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения,

a – расстояние между центральной осью y_c и осью y , проходящей через центр тяжести рассматриваемого сечения,

A – площадь рассматриваемого сечения.

Вычислим осевые моменты инерции для двутавра относительно центральных осей

$$I_{x_c}^1 = I_{x_1} + c_1^2 A_1, \quad I_{y_c}^1 = I_{y_1} + a_1^2 A_1,$$

$$c_1 = (b_3 + b_2 + \frac{h_1}{2}) - y_c = 5 + 2 + 6 - 7,7 = 5,3 \text{ см},$$

$$a_1 = -(x_c - \frac{b_1}{2}) = -(7,3 - 3,2) = -4,1 \text{ см},$$

$$I_{x_c}^1 = 350 + (5,3)^2 \cdot 14,7 = 762,9 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c}^1 = 27,9 + (-4,1)^2 \cdot 14,7 = 275 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для двутавра относительно центральных осей

$$I_{x_c y_c}^1 = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 A_1 = 0 + 5,3 \cdot (-4,1) \cdot 14,7 = -319,43 \text{ см}^4.$$

Определим осевые моменты инерции для прямоугольника относительно центральных осей

$$I_{x_c}^2 = I_{x_2} + c_2^2 A_2, \quad I_{y_c}^2 = I_{y_2} + a_2^2 A_2,$$

$$c_2 = -(y_c - b_3 - \frac{b_2}{2}) = -(7,7 - 5 - 1) = -1,7 \text{ см},$$

$$a_2 = \frac{h_2}{2} - x_c = 8 - 7,3 = 0,7 \text{ см},$$

$$I_{x_c}^2 = 10,67 + (-1,7)^2 \cdot 32 = 103,15 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c}^2 = 682,67 + (0,7)^2 \cdot 32 = 698,35 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для прямоугольника относительно центральных осей будет равен

$$I_{x_c y_c}^2 = I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 A_2 = 0 + (-1,7) \cdot 0,7 \cdot 32 = -38,08 \text{ см}^4.$$

Вычислим осевые моменты инерции для неравнобокого уголка относительно центральных осей

$$I_{x_c}^3 = I_{x_3} + c_3^2 A_3, \quad I_{y_c}^3 = I_{y_3} + a_3^2 A_3,$$

$$c_3 = -(y_c - (b_3 - x_0)) = -(7,7 - 3,87) = -3,83 \text{ см},$$

$$a_3 = h_2 - y_0 - x_c = 16 - 2,6 - 7,3 = 6,1 \text{ см},$$

$$I_{x_c}^3 = 12,7 + (-3,83)^2 \cdot 6,36 = 105,99 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c}^3 = 41,6 + (6,1)^2 \cdot 6,36 = 278,256 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для неравнобокого уголка относительно центральных осей

$$I_{x_c y_c}^3 = I_{x_3 y_3} + a_3 c_3 A_3 = 15,72 + 6,1 \cdot (-3,83) \cdot 6,36 = -7,64 \text{ см}^4.$$

Определим осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно центральных осей как суммы осевых и центробежных моментов инерции каждого сечения относительно центральных осей

$$I_{x_c} = I_{x_c}^1 + I_{x_c}^2 + I_{x_c}^3 = 762,9 + 103,15 + 105,99 = 972,04 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^1 + I_{y_c}^2 + I_{y_c}^3 = 275 + 698,35 + 278,256 = 1251,6 \text{ см}^4,$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^1 + I_{x_c y_c}^2 + I_{x_c y_c}^3 = -319,43 - 38,08 - 7,64 = -365,15 \text{ см}^4.$$

Установим положение главных центральных осей инерции, для чего по формуле (43) вычислим угол α

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2 \cdot (-365,15)}{972,04 - 1251,6} = -2,61,$$

$$2\alpha = \operatorname{arctg}(-2,61) \approx -69,05^\circ, \quad \alpha \approx -34,53^\circ.$$

Построим главные оси инерции, поворачивая центральные оси на угол α по часовой стрелке (рис. 24).

Определим главные моменты инерции по формулам (39), (40)

$$I_x = I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \sin^2 \alpha - I_{xcyc} \sin 2\alpha,$$

$$I_y = I_{xc} \sin^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \alpha + I_{xcyc} \sin 2\alpha.$$

Предварительно вычислив

$$\sin \alpha = -0,567, \quad \cos \alpha = 0,824, \quad \sin 2\alpha = -0,934,$$

$$\sin^2 \alpha = 0,3215, \quad \cos^2 \alpha = 0,679,$$

подставим в формулы (38), (39) значения осевых и центробежного момента инерции всего сечения относительно центральных осей

$$I_x = 972,04 \cdot 0,679 + 1251,6 \cdot 0,3215 - (-365,15) \cdot (-0,934) \approx 722,78 \text{ см}^4,$$

$$I_y = 1251,6 \cdot 0,679 + 972,04 \cdot 0,3215 + (-365,15) \cdot (-0,934) \approx 1501,89 \text{ см}^4.$$

Для проверки вычисленных значений главных моментов инерции используем свойство осевых моментов инерции, суть которого заключается в том, что при повороте осей координат на любой угол сумма осевых моментов инерции остается постоянной величиной

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_x + I_y,$$

подставив вычисленные значения получим

$$972,04 + 1251,6 = 722,784 + 1501,89,$$

$$2223,64 \approx 2224,67.$$

Минимальная погрешность, полученная в расчетах из-за округления чисел, при проверке допустима.

Определим радиусы инерции по формулам (44):

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{722,78}{53,06}} = \sqrt{13,62} \approx 3,7 \text{ см},$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{1501,89}{53,06}} = \sqrt{28,3} \approx 5,3 \text{ см}.$$

Для построения эллипса инерции на главных осях откладываем вычисленные значения радиусов инерции (рис. 24).

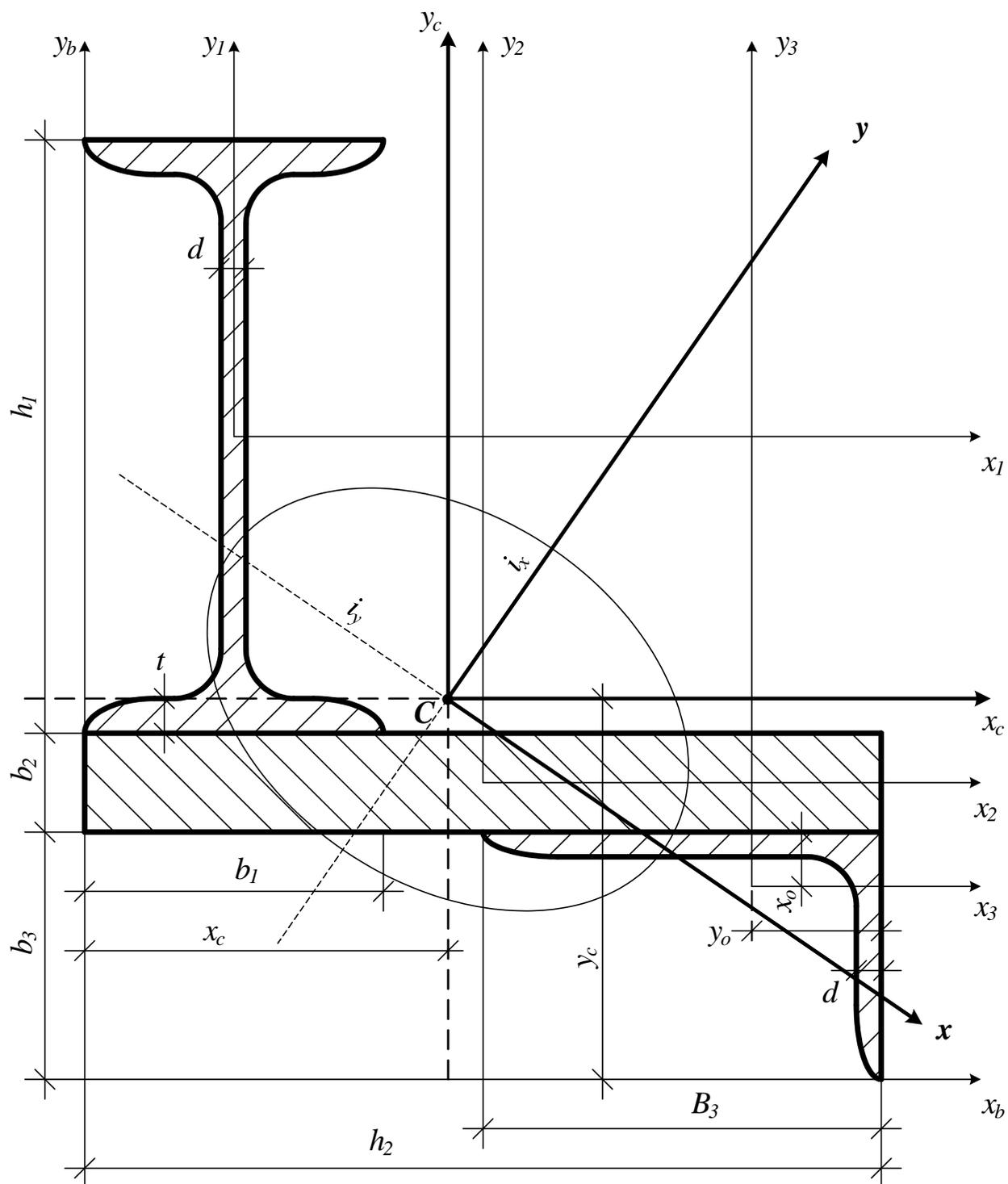


Рис. 24. Построение главных осей и эллипса инерции составного сечения

3.7 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 3

Геометрический расчет составных сечений.

Определение положения главных центральных осей инерции

для сложных сечений

Для заданного сечения, состоящего из прямоугольника (листа) и прокатных профилей, требуется определить:

- 1) положение центра тяжести сложного сечения;
- 2) осевые и центробежный моменты инерции относительно центральных осей, проведенных через центр тяжести;
- 3) положение главных центральных осей инерции;
- 4) значения главных моментов инерции;
- 5) вычислить радиусы инерции и построить эллипс инерции.

Схемы сечений и числовые данные к ним выбрать из табл. 2 и рис. 25 согласно заданному варианту. Первая цифра – номер схемы, вторая – номер строки из таблицы числовых данных. Данные для прокатных профилей взять по ГОСТ (приложение 3).

Оформить работу на листе ватмана формата А3.

ПОРЯДОК РАСЧЕТА

1. Вычертить сечение в масштабе, показать все необходимые оси и размеры

Для того, чтобы вычертить сечение в масштабе, необходимо выписать из ГОСТ размеры заданных профилей, а также величины, необходимые для дальнейшего расчета:

Для уголка равнобокого: $b, d, A, I_x, I_{x_0 \max}, I_{y_0 \min}, z_0$.

Для уголка неравнобокого: $B, b, d, A, I_x, I_y, I_{u \min}, x_0, y_0, tg\alpha$.

Для двутавровой балки: h, b, A, d, t, I_x, I_y .

Для швеллера: $h, b, A, d, t, I_x, I_y, z_0$.

2. Разбить сложное сечение на простые части

Для вычисления моментов инерции сложное сечение разбивается на ряд простых частей, для того чтобы их геометрические характеристики можно было вычислить по формулам или найти по таблице.

Для каждой части **выбрать прямоугольную систему координат** с началом в центре тяжести фигуры. Системы координат принимаются параллельными.

3. Определить площадь всего сечения как сумму площадей простых сечений: $A=A_1+A_2+A_3$

4. Определить осевые и центробежные моменты инерции простых сечений относительно осей, проходящих через их центр тяжести

Прямоугольный лист: $I_x = \frac{hb^3}{12}; I_y = \frac{bh^3}{12}; I_{xy} = 0$.

Уголок равнобокий: $I_x, I_y - \text{в } \tilde{A}\tilde{I} \tilde{N}\tilde{O}, I_{xy} = \frac{I_{x_0 \max} - I_{y_0 \min}}{2}$.

Уголок неравнобокий: $I_x, I_y - \text{в } \tilde{A}\tilde{I} \tilde{N}\tilde{O}, I_{xy} = \frac{I_x + I_y - 2I_{u \min}}{2} \sin 2\alpha$.

Двутавровая балка: $I_x, I_y - \text{в } \tilde{A}\tilde{I} \tilde{N}\tilde{O}, I_{xy} = 0$, так как оси X и Y – оси симметрии.

Швеллер: $I_x, I_y - \text{в } \tilde{A}\tilde{I} \tilde{N}\tilde{O}, I_{xy} = 0$, так как ось X – ось симметрии.

Примечание: для прямоугольника, двутавра и швеллера центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через их центры тяжести равен нулю.

5. Выбрать вспомогательные оси

6. Определить статические моменты каждого сечения относительно вспомогательных осей

7. Определить статические моменты всего сечения относительно вспомогательных осей

8. Определить положение центра тяжести всего сечения

Координаты центра тяжести определяются по формулам

$$x_c = \frac{S_{yb}}{A}, \quad y_c = \frac{S_{xb}}{A}$$

и откладываются от вспомогательных осей. Через полученный центр тяжести проводятся центральные оси, параллельные вспомогательным.

9. Определить осевые и центробежные моменты инерции каждого сечения относительно центральных осей

Для их определения используются формулы изменения осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей координат

$$I_{xc} = I_x + c^2 A; \quad I_{yc} = I_y + a^2 A; \quad I_{xcyc} = I_{xy} + acA,$$

где a – расстояния между осями y и y_c , c – между осями x и x_c рассматриваемого сечения.

10. Определить осевые и центробежные моменты инерции всего сечения относительно центральных осей, как сумму моментов инерции простых сечений относительно тех же осей

11. Определить положение главных центральных осей инерции

Из условия равенства нулю центробежного момента инерции относительно главных осей инерции находится тангенс двойного угла по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xcyc}}{I_{xc} - I_{yc}}.$$

Положительное значение угла откладывается против часовой стрелки.

12. Вычертить главные оси инерции, поворачивая центральные оси на вычисленный угол

13. Определить главные моменты инерции сложного сечения

Для их вычисления используются формулы изменения моментов инерции при повороте осей координат

$$I_x = I_{xc} \cos^2 \alpha + I_{yc} \sin^2 \alpha - I_{xcyc} \sin 2\alpha,$$

$$I_y = I_{xc} \sin^2 \alpha + I_{yc} \cos^2 \alpha + I_{xcyc} \sin 2\alpha.$$

14. Определить радиусы инерции

Радиусы инерции определяются по формулам $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$,

где I_x, I_y – главные моменты инерции,

A – площадь всего сечения.

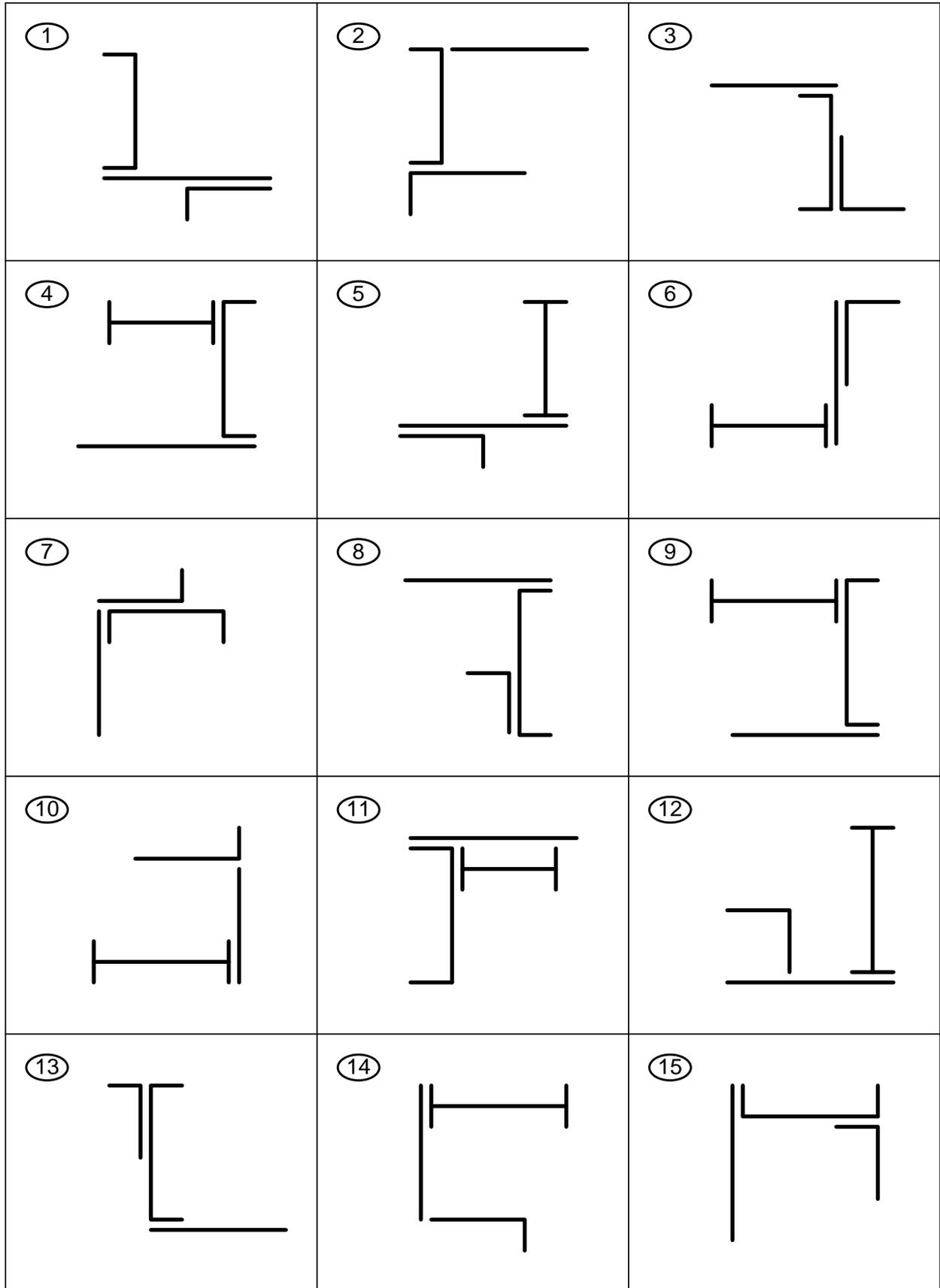
15. Построить эллипс инерции

Эллипс инерции строится на главных осях, при этом i_x откладывается перпендикулярно оси x , а i_y - перпендикулярно оси y .

Таблица 2

Числовые данные к работе «Геометрический расчет составных сечений»

Номер варианта	РАЗМЕРЫ				НОМЕР	
	листа, см		уголка, мм		двутавра (ГОСТ 8239-89)	швеллера (ГОСТ 8240-89)
	<i>h</i>	<i>b</i>	равнобокого (ГОСТ 8509-89)	неравнобокого (ГОСТ 8510-89)		
1	22	1,8	80x80x8		18	22
2	18	2,2		100x63x6	16	18
3	22	2,2	90x90x7		20	24
4	20	1,6		110x70x7	18а	22
5	20	2,4	100x100x16		22	18а
6	22	1,6		90x56x8	20а	14
7	24	2,2	110x110x7		24	30
8	18	2		125x80x12	22	16
9	16	2,2	125x125x16		18	16а
10	24	1,8		100x63x8	16	20
11	18	1,8	80x80x6		22	24
12	16	2		110x70x8	18	18а
13	24	2	90x90x8		16	22
14	18	1,6		100x63x10	24	24а
15	16	1,8	100x100x12		18а	20а
16	20	2,2		90x56x6	20	30
17	22	2,4	140x140x10		16	22
18	18	1,4		80x50x6	20а	18
19	20	1,8	110x110x8		18	16
20	16	2,4		125x80x10	24	14
21	22	1,4	160x160x12		22	20
22	24	1,6		140x90x10	18	30
23	18	2,4	70x70x8		20	16
24	20	2		125x80x8	16	22
25	22	2	75x75x9		18а	18
26	18	1,6		140x90x8	24	14
27	20	1,6	100x100x14		24а	20
28	22	1,8		80x50x5	20	18
29	24	1,8	125x125x10		18	22
30	20	2,4		75x50x8	16	30



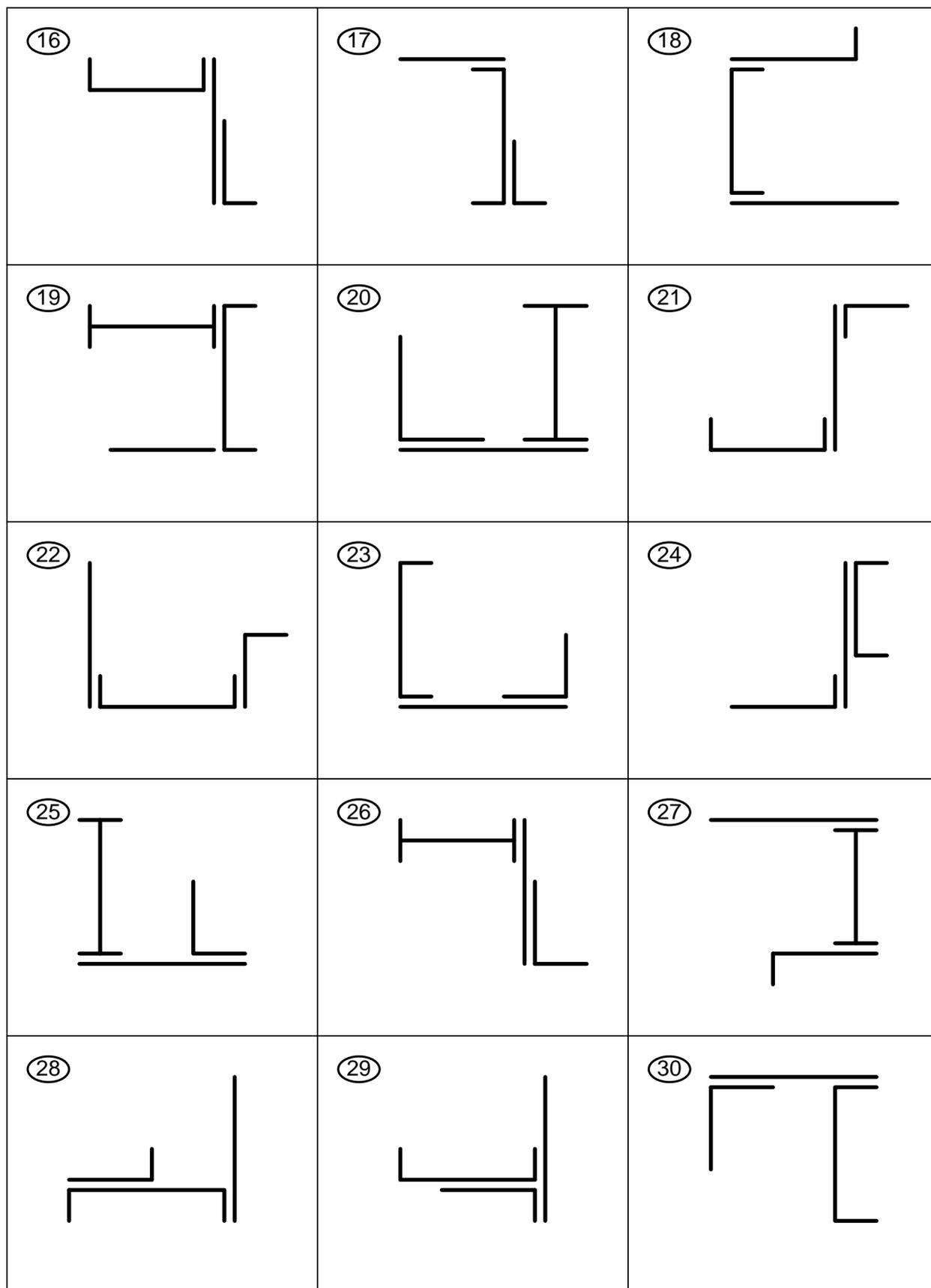


Рис. 25. Расчетные схемы к работе «Геометрический расчет составных сечений»

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Перечислите все геометрические характеристики.
2. Что называется статическим моментом инерции?
3. Свойства статического момента инерции.
4. Как вычислить статический момент инерции любого сечения?
5. Порядок определения координат центра тяжести любого сечения.
6. Запишите формулы, по которым вычисляются координаты центра тяжести сечения.
7. Какие оси называются центральными?
8. Что называется осевым моментом инерции сечения?
9. Свойства осевых моментов инерции.
10. Как изменяются осевые моменты инерции сечения при параллельном переносе осей координат?
11. Чему равны осевые моменты инерции для прямоугольника?
12. Как изменяются осевые моменты инерции при повороте осей координат?
13. Что называется центробежным моментом инерции сечения?
14. Как изменяется центробежный момент инерции при параллельном переносе осей координат?
15. Свойства центробежного момента инерции.
16. Чему равен центробежный момент инерции для симметричных сечений?
17. Какие оси называются главными осями инерции?
18. Как определяется положение главных осей инерции?
19. Какие значения принимают осевые моменты инерции относительно главных осей?
20. По каким формулам определяются радиусы инерции?
21. Как строится эллипс инерции?

Глава 4

ПРЯМОЙ ИЗГИБ

4.1 ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

ИЗГИБ – самый распространенный вид деформации элементов строительных конструкций. В отличие от других видов деформации (центральное растяжение и сжатие, кручение), при которых оси брусьев остаются прямыми после деформации, при изгибе происходит искривление продольных осей прямых брусьев.

Прямой брус, работающий на изгиб, называется **балкой**.

Итак, **изгиб** – это такой вид деформации, при котором происходит искривление продольных осей балок.

Изгиб вызывают силы, перпендикулярные продольной оси балки, или пары сил, то есть моменты.

Если все внешние силы приложены в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей поперечного сечения балки, то такой изгиб называется **прямым (плоским)**.

При плоском поперечном изгибе балки её ось располагается в силовой плоскости, продольные волокна на выпуклой части балки растягиваются, на вогнутой – сжимаются. Слой промежуточных волокон, не изменяющих своей длины, называется **нейтральным**. Нейтральный слой пересекается с плоскостью поперечного сечения по нулевой линии, которая называется **нейтральной осью**.

Если же силовая плоскость не совпадает ни с одной из главных осей сечения, изгиб называется **косым**.

Под влиянием внешних сил, действующих на балку, возникают опорные реакции, для определения которых используются уравнения статики. Если уравнений равновесия достаточно для вычисления опорных реакций, балка

называется *статически определимой*, если уравнений равновесия недостаточно – балка *статически неопределима*.

4.2 ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИЗГИБЕ

При изгибе в поперечных сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора – *поперечная сила и изгибающий момент*, которые сопротивляются внешней нагрузке, сохраняя состояние равновесия, которое балка имела до приложения к ней внешней нагрузки.

Вид деформации, при котором в поперечном сечении балки действует только изгибающий момент, называется *чистым изгибом*.

Если в сечении действует также поперечная сила, то такой вид деформации называется *поперечным изгибом*.

В качестве примера рассмотрим балку, нагруженную двумя сосредоточенными силами, равноудаленными от опор.

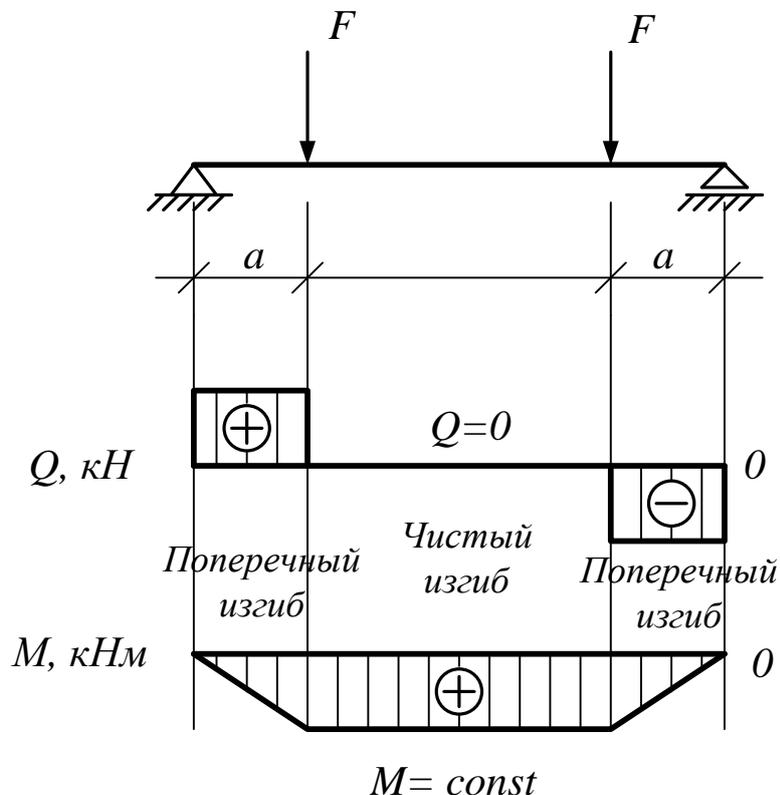


Рис. 26. Разновидности изгиба: чистый изгиб и поперечный изгиб

Средний участок – случай чистого изгиба, крайние участки – поперечный изгиб (рис. 26).

Значения поперечной силы и изгибающего момента находятся методом сечений.

Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая реакции опор, действующих с одной стороны от рассматриваемого сечения, на ось, перпендикулярную продольной оси балки:

$$Q = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (45)$$

Поперечная сила считается положительной, если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения по часовой стрелке, то есть направлены вверх слева от сечения или вниз – справа от него (рис. 27).

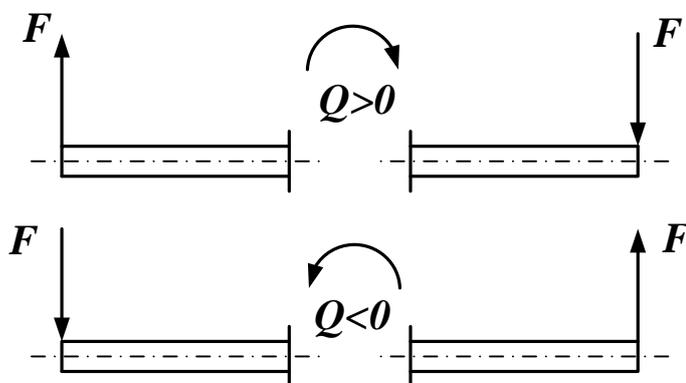


Рис. 27. Правило знаков для поперечной силы

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, включая реакции опор, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения, с одной стороны от него:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_i. \quad (46)$$

Изгибающий момент считается положительным, если внешние силы растягивают нижние волокна балки (рис. 28, а), а отрицательным, если растягиваются верхние волокна балки (рис. 28, б).

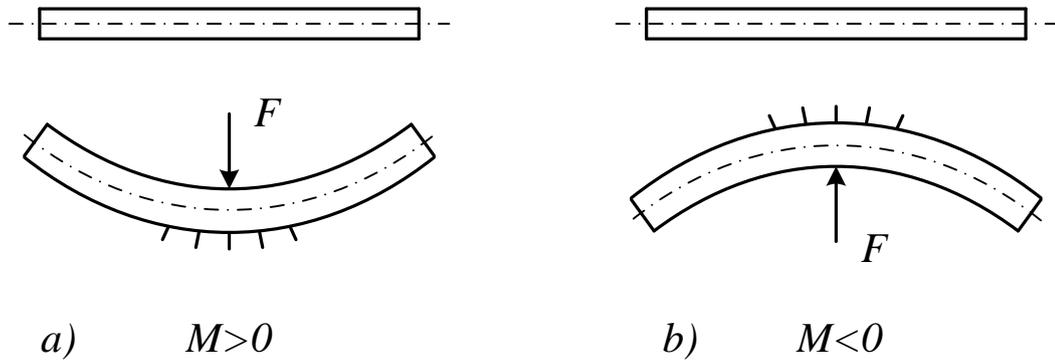


Рис. 28. Правило знаков для изгибающего момента

Вычислив значения поперечной силы и изгибающего момента в различных сечениях балки, строят **эпюры поперечных сил и изгибающих моментов**.

Эпюрой называется графическое изображение изменения внутреннего усилия по длине балки. При этом положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются вверх от оси эпюры, отрицательные – вниз, а эпюра изгибающих моментов строится со стороны растянутых волокон.

4.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Для вывода зависимостей рассмотрим балку, нагруженную системой сил (рис. 29).

На участке с распределенной нагрузкой двумя бесконечно близкими друг к другу сечениями выделим участок длиной dx . В левом торцевом

сечении возникают изгибающий момент M и поперечная сила Q , а в правом торцевом сечении - момент $M+dM$ и поперечная сила $Q+dQ$, где dM и dQ - приращения внутренних усилий на участке dx .

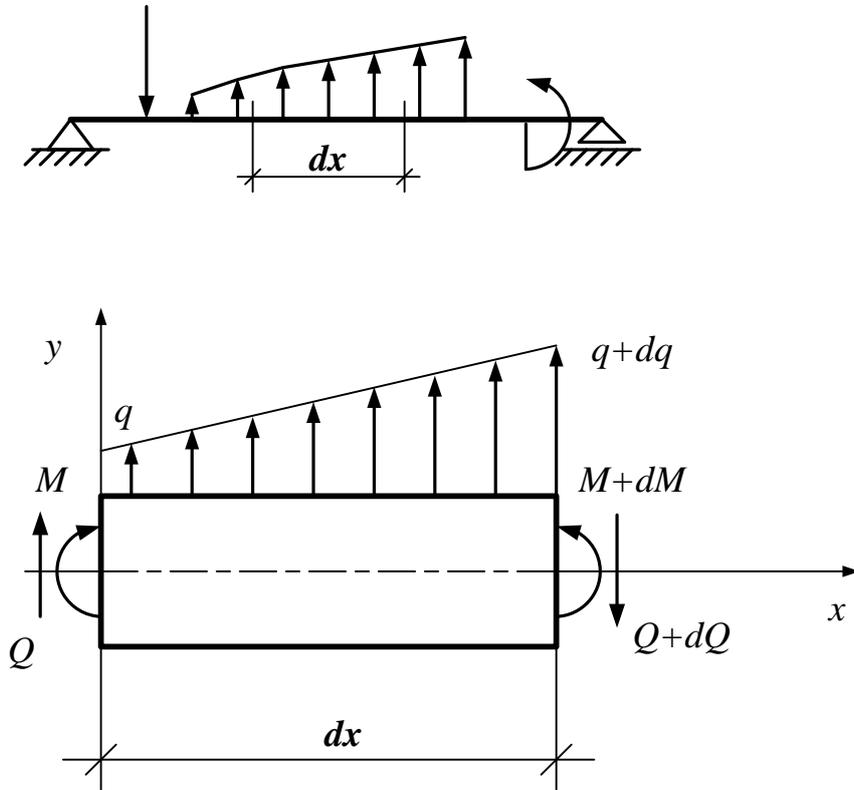


Рис. 29. Элемент балки, работающей на изгиб

Так как вся балка находится в равновесии, то в равновесии должен находиться и её элемент. Составим уравнение равновесия элемента балки в виде суммы проекций всех сил на ось Y :

$$\sum Y = 0; \quad Q + \frac{q + (q + dq)}{2} dx - (Q + dQ) = 0;$$

$$Q + \frac{qdx + qdx + dqdx}{2} - Q - dQ = 0;$$

$$qdx = dQ;$$

$$q = \frac{dQ}{dx}$$

(47)

Первая производная от поперечной силы по длине балки равна интенсивности распределенной нагрузки.

Для вывода зависимости между изгибающим моментом и поперечной силой составим уравнение равновесия элемента в виде суммы моментов действующих на него сил относительно центра тяжести правого торцевого сечения:

$$M + Qdx + qdx \frac{dx}{2} + \frac{1}{2} dqdx \frac{1}{3} dx - (M + dM) = 0;$$

$$M + Qdx - M - dM = 0;$$

$$Qdx = dM;$$

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (48)$$

Первая производная от изгибающего момента по длине балки равна поперечной силе.

$$q = \frac{d^2M}{dx^2} \quad (49)$$

Вторая производная от изгибающего момента по длине балки дает величину интенсивности распределенной нагрузки.

Полученные зависимости носят название *Теоремы Журавского*.

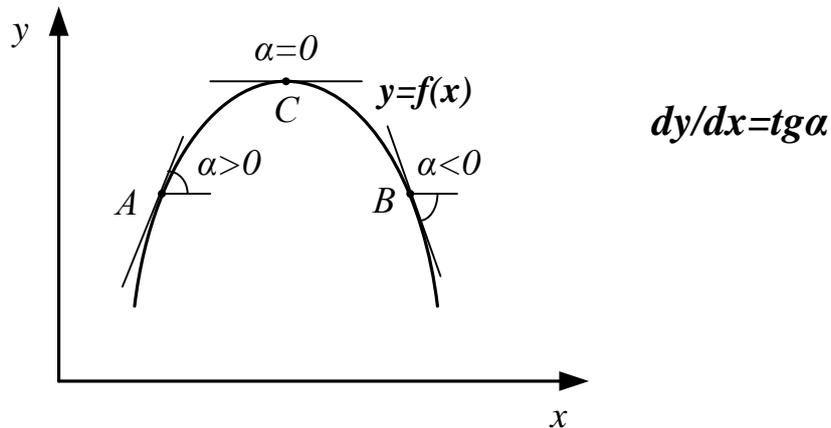


Рис. 30. График функции $y=f(x)$

Геометрический смысл первой производной заключается в следующем: при любом значении x она равна $tg\alpha$, где α – угол между касательной к кривой $y=f(x)$ и положительным направлением оси x (рис. 30):

$$1. \text{ если } \alpha > 0, \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0, \text{ это означает, что } y = f(x) \text{ возрастает};$$

$$2. \text{ если } \alpha < 0, \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0, \text{ это означает, что } y = f(x) \text{ убывает};$$

$$3. \text{ если } \alpha = 0, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0, \text{ это означает, что } y = f(x) \text{ имеет экстремум (max, min).}$$

Используя полученные зависимости, можно сделать важные выводы, позволяющие контролировать правильность построения эпюр внутренних усилий.

4.4 КОНТРОЛЬ ПРАВИЛЬНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР

1. Тангенс угла альфа между касательной к линии, ограничивающей эпюру моментов и осью эпюры равен поперечной силе в данном сечении: $tg\alpha=Q$.
2. Если на некотором участке балки поперечная сила положительна, то эпюра моментов возрастает, если отрицательна – убывает:
 $Q>0, tg\alpha>0$, момент возрастает, $Q<0, tg\alpha<0$, момент убывает.
3. Если эпюра поперечных сил переходит через ноль, меняя свой знак с плюса на минус, то момент имеет максимальное значение, при переходе с минуса на плюс, момент имеет минимальное значение.
4. На участке, где поперечная сила равна нулю, момент имеет постоянное значение: **$Q=0, M=const$.**
5. На участках, не нагруженных распределенной нагрузкой, эпюра поперечных сил, имеет очертание прямой, параллельной нулевой линии, а эпюра моментов – наклонная прямая.

6. На участках, загруженных равномерно распределенной нагрузкой, эпюра поперечных сил имеет очертание наклонной прямой, а эпюра моментов – парабола.
7. На участках, загруженных неравномерно распределенной нагрузкой, эпюры поперечных сил и моментов – кривые второго и третьего порядка.
8. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, эпюра поперечных сил должна иметь скачок на величину внешней силы, а эпюра моментов – перелом в направлении действия силы.
9. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, эпюра моментов должна иметь скачок на величину данного момента.

4.5 УСЛОВИЕ ПРОЧНОСТИ ПРИ ИЗГИБЕ

Условие прочности по нормальным напряжениям при изгибе имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W} \leq R_y, \quad (50)$$

где σ_{\max} - наибольшее нормальное напряжение,

M_{\max} – наибольший изгибающий момент, возникающий в сечениях балки,

W – момент сопротивления сечения (геометрическая характеристика, зависящая от формы и размеров сечения),

R_y - расчетное сопротивление материала балки при изгибе.

Условие прочности позволяет выполнять три вида расчётов:

1. **Проверка прочности.** Используя условие прочности, наибольшее напряжение, возникающее в сечениях балки, сравнивается с расчетным сопротивлением материала балки

$$\sigma_{\max} \leq R_y. \quad (51)$$

2. **Подбор поперечного сечения балок.** Для вычисленного наибольшего момента и при заданном расчетном сопротивлении материала определяется величина требуемого момента сопротивления материала

$$W_{mp} \geq \frac{|M_{\max}|}{R_y}, \quad (52)$$

исходя из которого подбираются необходимые размеры поперечного сечения балки заданной формы.

Запишем формулы для момента сопротивления простых, наиболее часто встречающихся форм поперечных сечений.

Для прямоугольного сечения с высотой h и шириной b

$$W_x = \frac{bh^2}{6}, W_y = \frac{hb^2}{6}. \quad \text{Для круглого сечения} - W = \frac{\pi d^3}{32}.$$

3. **Определение допускаемой нагрузки.** Для заданных размеров и формы поперечного сечения балки, а также при известном расчетном сопротивлении материала, определяется допускаемая нагрузка, которую может выдержать данная балка, не разрушаясь.

$$|M_{\max}| \leq W \cdot R_y \quad (53)$$

Пример 5. Для статически определимой однопролетной балки, нагруженной системой сил, требуется определить реакции опор, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подобрать необходимые размеры поперечных сечений. Балка прямоугольного поперечного сечения с соотношением $h/b=2$ изготовлена из стали с расчетным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$. $a = 2 \text{ м}$, $b = 4 \text{ м}$, $c = 2 \text{ м}$.

Статический расчет начинаем с определения реакций опор, для чего составляем уравнения равновесия балки в виде суммы моментов всех

внешних сил относительно опорных закреплений. Для проверки найденных реакций используем уравнение статики в виде суммы проекций всех внешних сил на ось, перпендикулярную продольной оси балки.

$$\sum M_A = 0, \quad -R_B(b+c) + F(b+c+a) - M + \frac{qb^2}{2} - \frac{qa^2}{2} = 0,$$

$$6R_B = 80 - 20 + 30, \quad R_B = 15 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0, \quad R_A(b+c) + Fa - q(a+b)\left(\frac{a+b}{2} + c\right) - M = 0,$$

$$6R_A = 20 + 150 - 20, \quad R_A = 25 \text{ кН}.$$

$$\sum F_Y = 0, \quad R_A - q(a+b) + R_B - F = 0 - \text{проверка},$$

$$25 - 30 + 15 - 10 = 0, \quad 0 = 0.$$

Для нахождения внутренних усилий в сечениях балки применяем метод сечений. Определяем границы участков для построения эпюр. Для каждого участка составляем выражения для вычисления поперечной силы и изгибающего момента, используя при этом вышеизложенные правила.

Поперечную силу в каждом сечении определяем как сумму всех внешних сил, включая реакции опор, с одной стороны (слева или справа) от рассматриваемого сечения. При этом силу, стремящуюся повернуть оставшуюся часть балки по часовой стрелке, будем брать со знаком «плюс», а против часовой стрелки – со знаком «минус». На участках, незагруженных распределенной нагрузкой, значение поперечной силы постоянно, а эпюра имеет очертание прямой, параллельной нулевой линии. При действии равномерно-распределенной нагрузки поперечная сила имеет различные значения, изменяющиеся по длине участка, и эпюра имеет вид наклонной прямой, для построения которой требуется как минимум два значения.

Изгибающий момент в каждом сечении балки определяем как сумму моментов от всех внешних сил, включая реакции опор, относительно центра тяжести сечения с одной стороны от него. Положительными считаются моменты от тех сил, которые растягивают нижние волокна балки, а отрицательными – верхние волокна. Эпюра изгибающих моментов строится

со стороны растянутых волокон балки. На участках, незагруженных распределенной нагрузкой, эпюра моментов имеет очертание наклонной прямой. При действии равномерно-распределенной нагрузки эпюра моментов – парабола, имеющая вогнутость в сторону действия нагрузки.

$$Q_1 = -qx_1; \quad x_1 = 0, Q_1 = 0; \quad x_1 = 2\text{ м}, Q_1 = -10 \text{ кН}.$$

$$M_1 = -\frac{qx_1^2}{2}; \quad x_1 = 0, M_1 = 0; \quad x_1 = 2\text{ м}, M_1 = -10 \text{ кНм}; \quad x_1 = 1\text{ м}, M_1 = -2,5 \text{ кНм}.$$

$$Q_2 = -q(a + x_2) + R_A; \quad x_2 = 0, Q_2 = 15 \text{ кН}; \quad x_2 = 4\text{ м}, Q_2 = -5 \text{ кН}.$$

$$M_2 = -q\frac{(a + x_2)^2}{2} + R_A x_2; \quad x_2 = 0, M_2 = -10 \text{ кНм}; \quad x_2 = 4\text{ м}, M_2 = 10 \text{ кНм}.$$

Если эпюра поперечных сил переходит через нулевую линию, необходимо определить значение изгибающего момента в данном сечении, так как оно является экстремальным на данном участке балки и может оказаться наиболее опасным при выполнении проверки прочности. Для его вычисления уравнение поперечных сил приравняем к нулю, откуда находим значение x_0 , при котором поперечная сила равна нулю. Подставляя затем x_0 в уравнение моментов для данного участка, вычисляем экстремальное (максимальное или минимальное) значение изгибающего момента.

$$-q(a + x_0) + R_A = 0; \quad x_0 = 3\text{ м}, \quad M_2 = 12,5 \text{ кНм}.$$

$$Q_3 = F - R_B; \quad Q_3 = 10 - 15 = -5 \text{ кН}.$$

$$M_3 = R_B x_3 - F(a + x_3); \quad x_3 = 0, M_3 = -20; \quad x_3 = 2\text{ м}, M_3 = -10 \text{ кНм}.$$

$$Q_4 = F; \quad Q_4 = 10 \text{ кН}.$$

$$M_4 = -F x_4; \quad x_4 = 0, M_4 = 0; \quad x_4 = 2\text{ м}, M_4 = -20 \text{ кНм}.$$

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для всех участков балки (рис. 31).

После построения эпюр необходимо произвести проверку правильности их построения.

4.6 МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНЫЕ БАЛКИ

Статически определимыми называются балки, количество неизвестных опорных реакций в которых не превышает трех. Неизвестные опорные реакции определяются при помощи уравнений равновесия, то есть уравнений статики.

Многопролетной шарнирно-консольной называется статически определимая балка, образованная из простых однопролетных и консольных балок, соединенных между собой шарнирами.

Шарнирные балки в сравнении с простыми и неразрезными имеют следующие *преимущества*:

1. Нагрузки, действующие на консоли балок, уменьшают величины максимальных изгибающих моментов в её пролётах. Таким образом, вследствие разгружающего влияния консольной нагрузки изгибающие моменты в сечениях шарнирной балки распределяются рациональнее, чем в сечениях простых балок, и поэтому шарнирные балки требуют меньшего расхода материалов, чем простые, перекрывающие заданные пролёты.

2. Неравномерное изменение температуры по высоте шарнирных балок не вызывает в них дополнительных напряжений в отличие от неразрезных балок, в которых такие напряжения могут оказаться значительными.

3. Сравнительно короткие элементы, составляющие шарнирную балку, представляют удобство для их массового заводского изготовления и механизированного монтажа.

К *недостаткам*, ограничивающим область применения шарнирно-консольных балок, относятся следующие:

1. Наличие шарниров усложняет изготовление и монтаж балок, обуславливает перелом упругой линии в местах установки шарниров, что при подвижной нагрузке вызывает толчки и удары.

2. Обрушение шарнирной балки в одном пролете может вызвать обрушение и некоторых других или приведет к обрушению всей балки.

3. Шарнирно-консольные балки имеют недостаточную жесткость.

Промежуточный шарнир позволяет составить одно уравнение, дополнительное к трем уравнениям статики для плоской системы сил, и тем самым снизить степень статической неопределимости балки на единицу. Возможно составить столько дополнительных уравнений статики, сколько промежуточных шарниров содержит балка.

Расчет шарнирно-консольной балки начинается с построения «поэтажной схемы», которая будет являться расчётной для заданной задачи.

«Поэтажной схемой» шарнирной балки называется совокупность её элементов, расположенных один за другим в разных уровнях. Для построения «поэтажной схемы» мысленно удаляем шарниры. Балки, которые способны самостоятельно «нести» нагрузку, являются *основными*. К ним относятся балки, лежащие на двух опорах, или консольные, закрепленные при помощи жесткой заделки.

Второстепенные – это балки, которые имеют только одну опору или не имеют их совсем. Недостающими опорами для них служат шарниры. Второстепенные балки вычерчиваются над основными. Шарниры заменяются шарнирно-неподвижными опорами, при помощи которых второстепенные балки опираются на основные. Расчет начинается с самой верхней второстепенной балки. Нагрузка с вышележащих балок на нижележащие передается через реакцию шарнира, причем значение реакции остается прежним, а направление меняется на противоположное.

Статический расчет шарнирно-консольной балки сводится к построению эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, по которым затем производится подбор поперечного сечения балки и проверка её прочности.

Пример 6. Для заданной статически определимой многопролетной шарнирно-консольной балки требуется построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

$$F = 10 \text{ кН}, \quad M = 4 \text{ кНм}, \quad q = 2 \text{ кН / м.}$$

$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 4 \text{ м}, \quad c = 3 \text{ м.}$$

Для заданной балки строим «поэтажную схему», для чего балку мысленно разрезаем по шарниру, шарнир заменяем шарнирно неподвижной опорой, при помощи которой второстепенную балку опираем на основную. Внешнюю нагрузку на схеме не показываем. Расчет начинаем со второстепенной балки. Вычерчиваем её ниже расчетной схемы, прикладываем заданную нагрузку. Определяем реакции опор и выполняем проверку правильности их нахождения:

$$\sum M_C = 0, \quad 2R_{III}a - Fa - M = 0; \quad \sum M_{III} = 0, \quad -2R_Ca + Fa - M = 0;$$

$$R_{III} = \frac{Fa + M}{2a} = \frac{24}{4} = 6 \text{ кН}. \quad R_C = \frac{Fa - M}{2a} = \frac{16}{4} = 4 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_Y = 0, \quad R_{III} + R_C - F = 0; \\ 6 + 4 - 10 = 0.$$

Определяем поперечную силу и изгибающий момент в каждом сечении второстепенной балки, используя метод сечений, правила нахождения внутренних усилий и правила знаков для них:

$$Q_1 = R_{III} = 6 \text{ кН};$$

$$M_1 = R_{III}x_1; \quad x_1 = 0, M_1 = 0; \quad x_1 = 2, M_1 = 12 \text{ кНм}.$$

$$Q_2 = -R_C = -4 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_Cx_2 + M; \quad x_2 = 0, M_2 = 4 \text{ кНм}; \quad x_2 = 2, M_2 = 12 \text{ кНм}.$$

$$Q_3 = 0;$$

$$M_3 = M = 4 \text{ кНм}.$$

Полученные значения поперечной силы и изгибающего момента откладываем от нулевых линий эпюр для второстепенной балки (рис. 32).

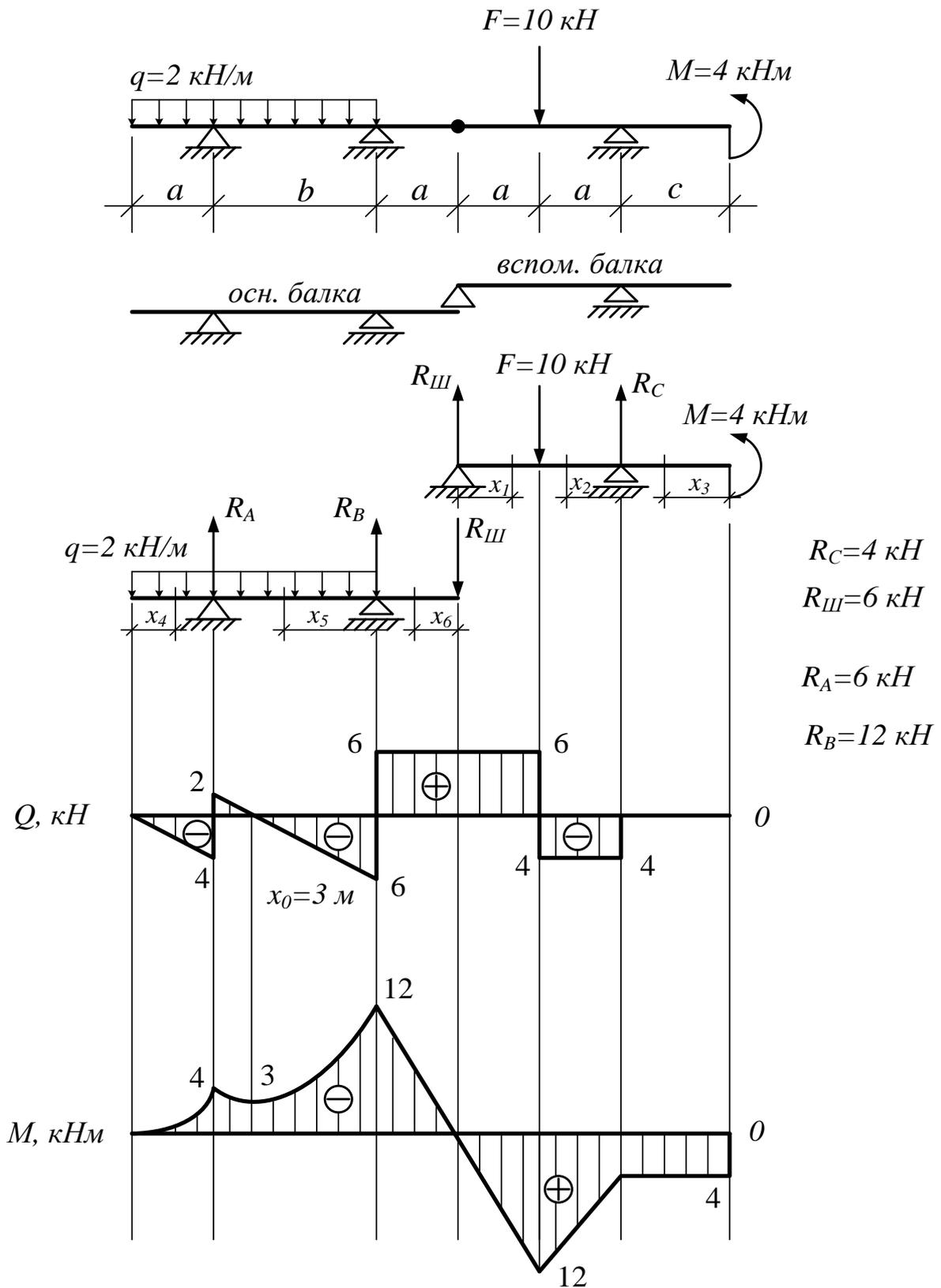


Рис. 32. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для статически определимой шарнирно-консольной балки

Переходим к расчету основной балки. Вычерчиваем её под второстепенной, прикладываем всю заданную нагрузку. Давление со второстепенной балки на основную передаем через реакцию шарнира, при этом значение реакции оставляем таким же, а направление меняем на противоположное.

Вычисляем значения неизвестных реакций опор, выполняем проверку правильности их определения:

$$\sum M_B = 0; \quad R_A b + R_{III} a - \frac{q(a+b)^2}{2}; \quad R_A = 6 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B b + R_{III} (b+a) + q(a+b) \left(\frac{a+b}{2} - a \right) = 0; \quad R_B = 12 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } R_A + R_B - q(a+b) - R_{III} = 0; \quad 6 + 12 - 2 \times 6 - 6 = 0.$$

Определяем поперечную силу и изгибающий момент в каждом сечении основной балки:

$$Q_4 = -qx_4; \quad x_4 = 0, Q_4 = 0; \quad x_4 = 2, Q_4 = -4 \text{ кН}.$$

$$M_4 = -\frac{qx_4^2}{2}; \quad x_4 = 0, M_4 = 0; \quad x_4 = 2, M_4 = -4 \text{ кНм}; \quad x_4 = 1, M_4 = -1 \text{ кНм}.$$

$$Q_5 = R_{III} - R_B + qx_5; \quad x_5 = 0, Q_5 = -6 \text{ кН}, \quad x_5 = 4, Q_5 = 2 \text{ кН}.$$

$$M_5 = R_B x_5 - R_{III} (a + x_5) - \frac{qx_5^2}{2}; \quad x_5 = 0, M_5 = -12; \quad x_5 = 4, M_5 = -4 \text{ кНм};$$

$$R_{III} - R_B + qx_0 = 0; \quad x_0 = 3 \text{ м}, \quad M_5 = -3 \text{ кНм}.$$

$$Q_6 = R_{III} = 6 \text{ кН}; \quad M_6 = -R_{III} x_6; \quad x_6 = 0, M_6 = 0; \quad x_6 = 2, M_6 = -12 \text{ кНм}.$$

Используя полученные значения, строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для всех участков многопролетной шарнирно-консольной балки (рис. 32). Выполняем проверку правильности их построения.

Момент в шарнире должен быть равен нулю, если к балке не приложен внешний момент.

4.7 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ПЛОСКИХ РАМ

Рамой называется геометрически неизменяемая стержневая система, элементы которой соединены между собой в узлах жестко или при помощи шарниров (рис. 33).

Горизонтальные или наклонные элементы рамы называются **ригелями**, а вертикальные – **стойками**.

Рамные системы имеют широкое применение в железобетонных, металлических и деревянных конструкциях.

Конструкции рам, встречающиеся в инженерной практике, очень разнообразны: однопролетные и многопролетные; одноярусные и многоярусные (многоэтажные). Одно- и многоэтажные рамы используются при возведении общественных зданий, корпусов, складов. Узкие многоэтажные рамы характерны для различного рода башен. Рамы широко применяются в инженерных сооружениях (мосты, трубы и т.д.).

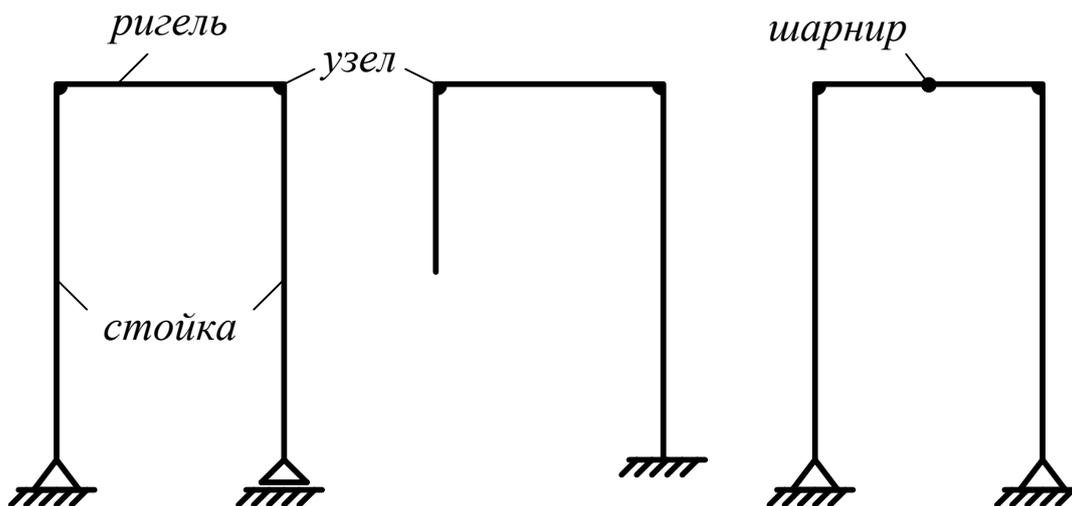


Рис. 33. Статически определимые рамы

Статически определимыми являются рамы, определение внутренних усилий в которых возможно при помощи уравнений статики (уравнений равновесия).

Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоских статически определимых рам производится в основном по тем же правилам, что и для балок.

Внутренние усилия, возникающие в любом поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трем силовым факторам: *поперечной силе Q , изгибающему моменту M и продольной силе N .*

Поперечная сила в любом сечении стержня рамы численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая реакции опор, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к продольной оси стержня. Положительный знак поперечной силы принимается, если она вызывает сдвиг по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения.

Изгибающий момент в любом сечении стержня рамы численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил относительно центра тяжести рассматриваемого сечения, с одной стороны от него. Эпюры моментов строятся со стороны растянутых волокон рамы и, в этом случае, отпадает необходимость в постановке знаков на этих эпюрах.

Продольная сила в каком-либо сечении стержня рамы численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, включая реакции опор, расположенных по одну сторону от сечения, на продольную ось стержня. При растяжении стержней продольная сила принимается положительной, а при сжатии – отрицательной.

Пример 7. Для заданной статически определимой рамы (рис. 34, а) требуется построить эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов.

$$F = 10 \text{ кН}, \quad M = 20 \text{ кНм}, \quad q = 5 \text{ кН / м.}$$

$$a = 3 \text{ м}, \quad b = 4 \text{ м}, \quad c = 3 \text{ м}, \quad d = 3 \text{ м.}$$

Расчет статически определимой рамы начинаем с определения реакций опор. Составляем уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на ось x и суммы моментов относительно опорных закреплений. Для проверки найденных реакций используем уравнение проекций всех сил на ось y :

$$\sum F_x = 0; \quad H_A - F = 0; \quad H_A = 10 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A b - q \frac{b^2}{2} + M - Fd + H_A d = 0;$$

$$R_A = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B b + M + q \frac{b^2}{2} = 0; \quad R_B = 15 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum F_Y = 0; \quad R_A + R_B - qb = 0.$$

Определяем поперечную и продольную силу, а также изгибающий момент в каждом сечении рамы, применяя вышеизложенные правила вычисления и правила знаков для внутренних усилий:

$$Q_1 = -H_A = -10 \text{ кН}; \quad N_1 = -R_A = -5 \text{ кН};$$

$$M_1 = -H_A y_1; \quad x_1 = 0, M_1 = 0; \quad x_1 = a, M_1 = -30 \text{ кНм}.$$

$$Q_2 = R_A - qx_2;$$

$$x_2 = 0, Q_2 = R_A = 5 \text{ кН}; \quad x_2 = b, Q_2 = -15 \text{ кН};$$

$$N_2 = -H_A = -10 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_A x_2 - \frac{qx_2^2}{2} - H_A a;$$

$$x_2 = 0, M_2 = -H_A a = -30 \text{ кНм}; \quad x_2 = b, M_2 = -50 \text{ кНм};$$

$$R_A - qx_0 = 0; \quad x_0 = 1 \text{ м}, M_2 = -27,5 \text{ кНм}.$$

$$Q_3 = F = 10 \text{ кН}; \quad N_3 = -R_B = -15 \text{ кН};$$

$$M_3 = -Fy_3 - M;$$

$$x_3 = 0, M_3 = -M = -20 \text{ кНм}, \quad x_3 = c, M_3 = -50 \text{ кНм}.$$

$$Q_4 = 0; \quad N_4 = -R_B = -15 \text{ кН};$$

$$M_4 = -M = -20 \text{ кНм}.$$

По вычисленным значениям строим эпюры внутренних усилий на нулевых линиях, повторяющих очертание рамы (рис. 34, б, в, г). Проверяем правильность их построения, используя контроль правильности для балок. В качестве дополнительной проверки рассматриваем равновесие узлов рамы.

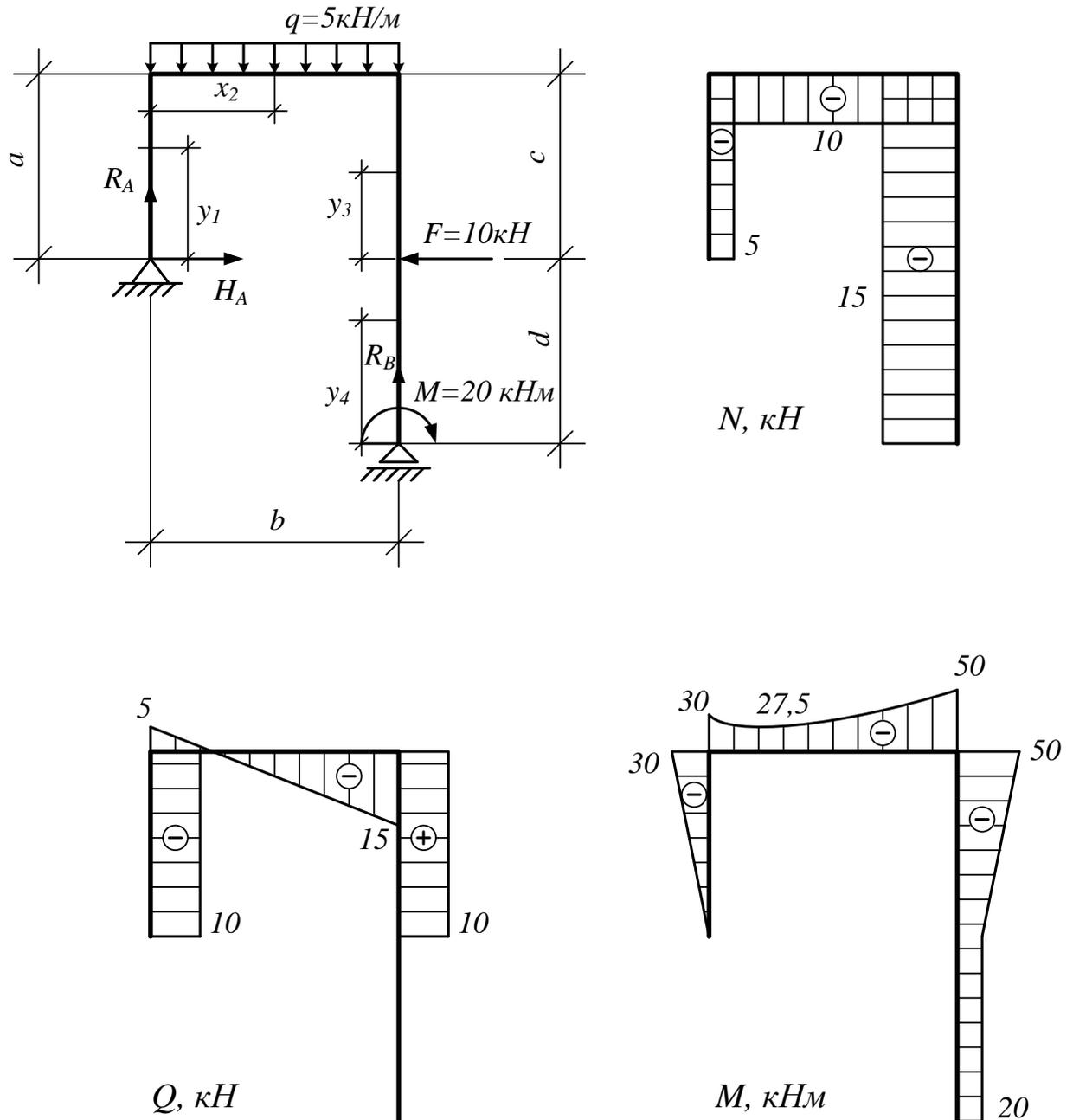


Рис. 34. Эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов для статически определимой рамы

4.8 РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ № 4

Построение эпюр внутренних усилий при изгибе.

Проверка прочности и подбор поперечного сечения балок.

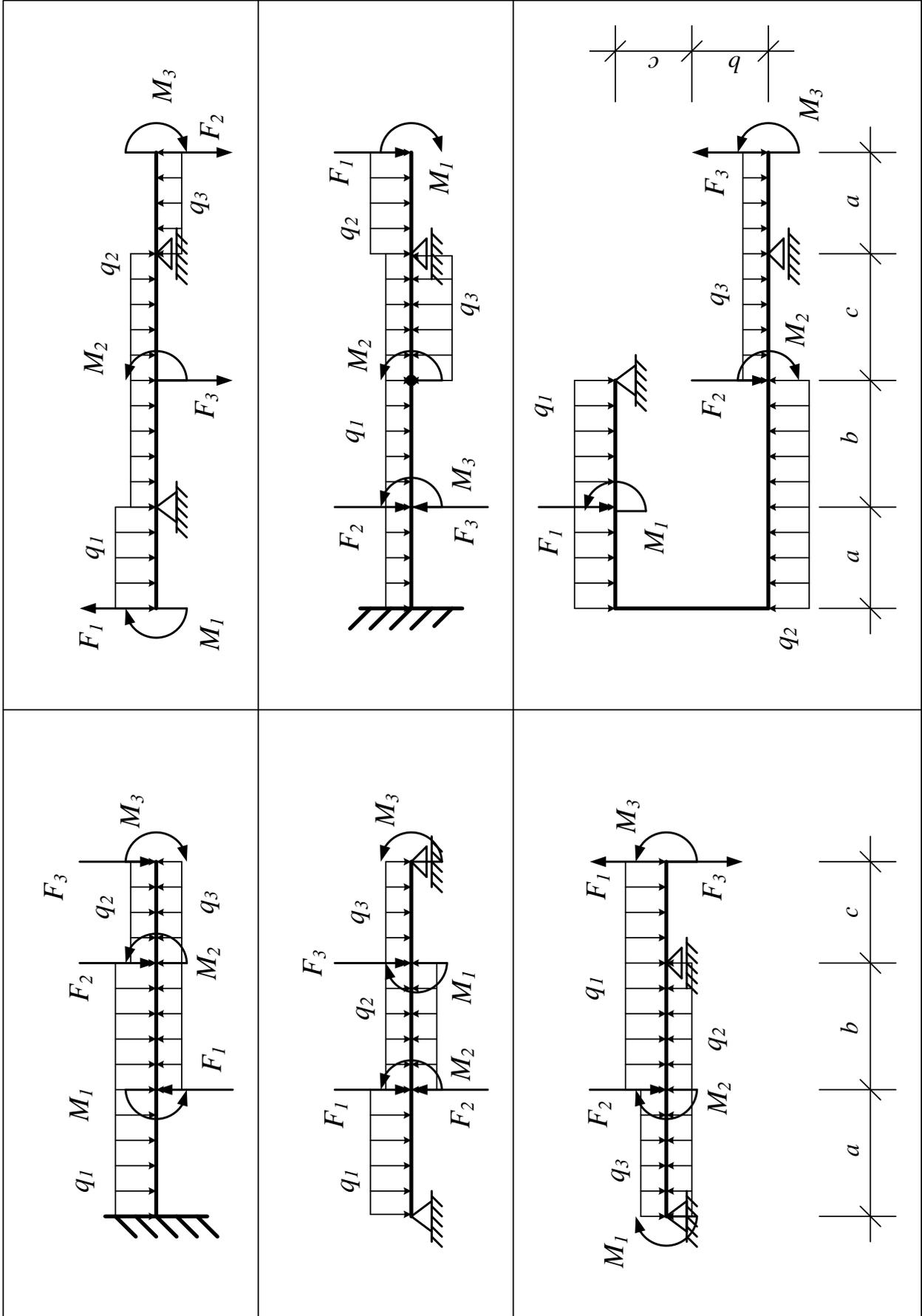
Для заданных схем статически определимых конструкций, находящихся под действием внешних нагрузок, требуется:

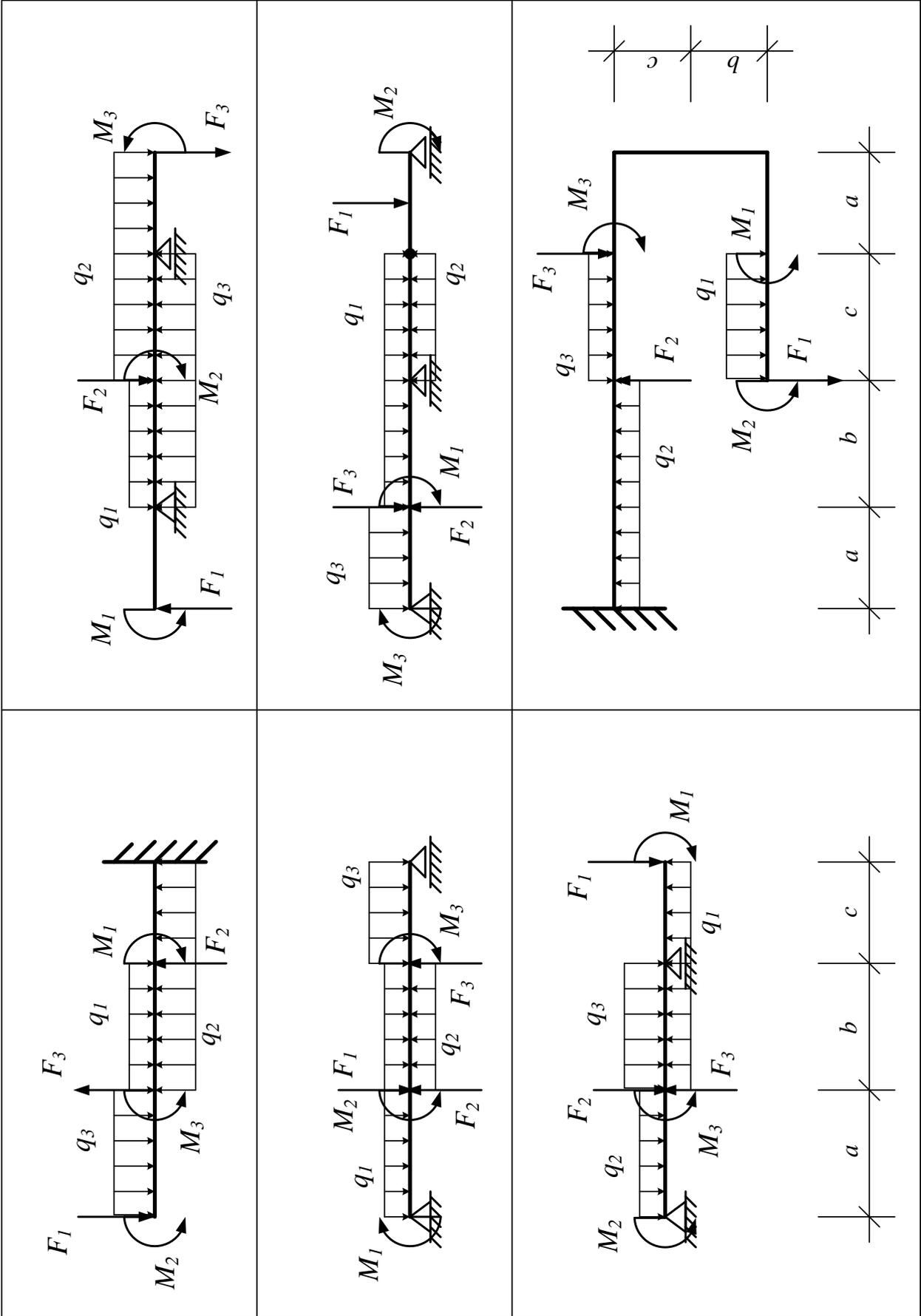
1. Определить опорные реакции и выполнить их проверку.
2. Определить внутренние усилия в характерных сечениях и построить соответствующие эпюры;
3. Выполнить проверку правильности построения эпюр;
4. Подобрать поперечные сечения балок:
 - а) для схемы 1 – прямоугольное $h \times b$ при расчетном сопротивлении $R = 16 \text{ МПа}$ (клееная древесина) и соотношении $h/b = 1,5$;
 - б) для схемы 2 – круглое диаметром d при расчетном сопротивлении $R = 190 \text{ МПа}$;
 - в) для схемы 3 – двутавр (ГОСТ 8239-89) при расчетном сопротивлении $R = 240 \text{ МПа}$ (сталь Ст3);
 - г) для схемы 4 – швеллер (ГОСТ 8240-89) при расчетном сопротивлении $R = 200 \text{ МПа}$ (сталь Ст3).

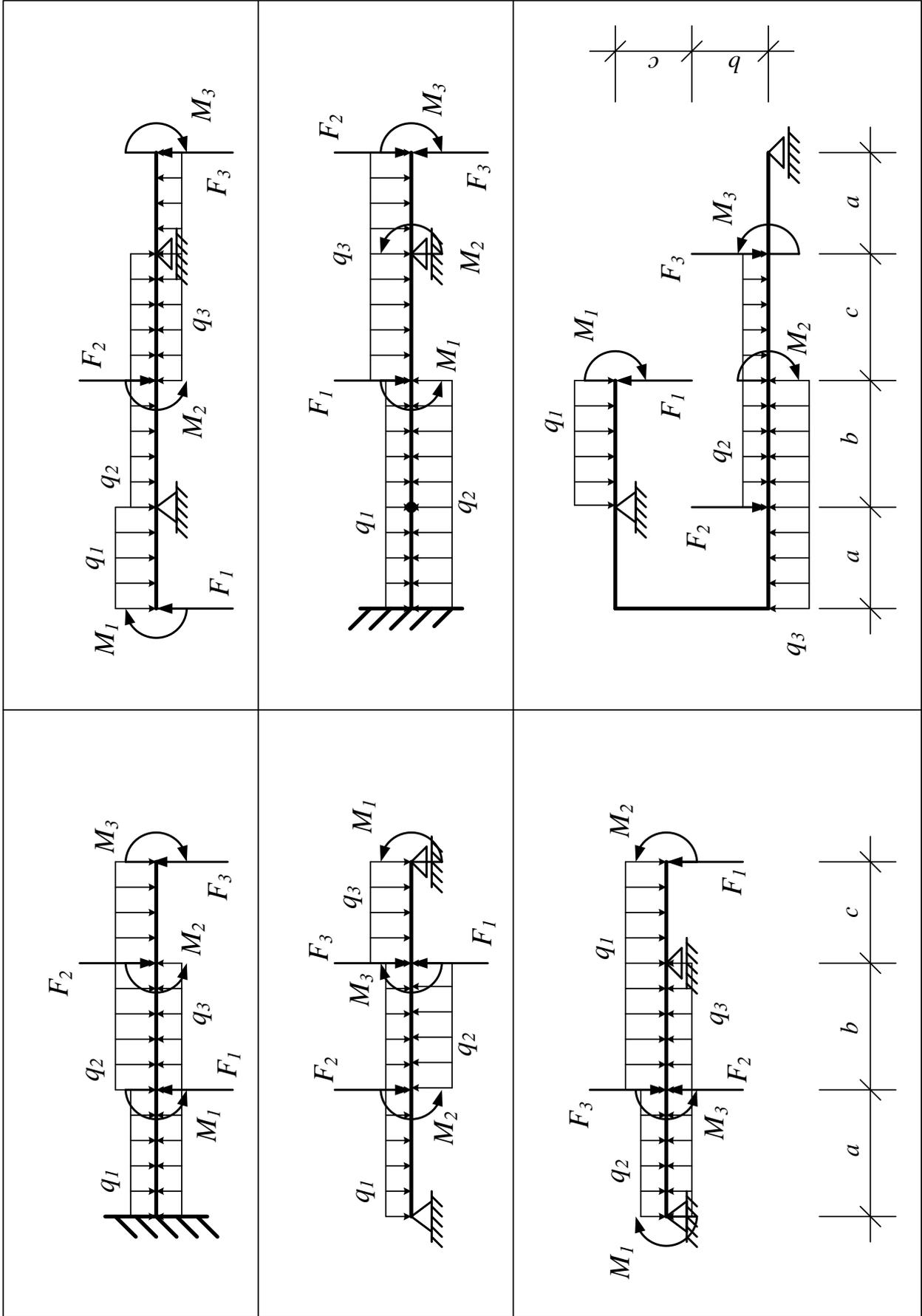
Схемы для расчёта и числовые данные к ним выбрать в соответствии с заданным вариантом (рис. 35, табл. 3).

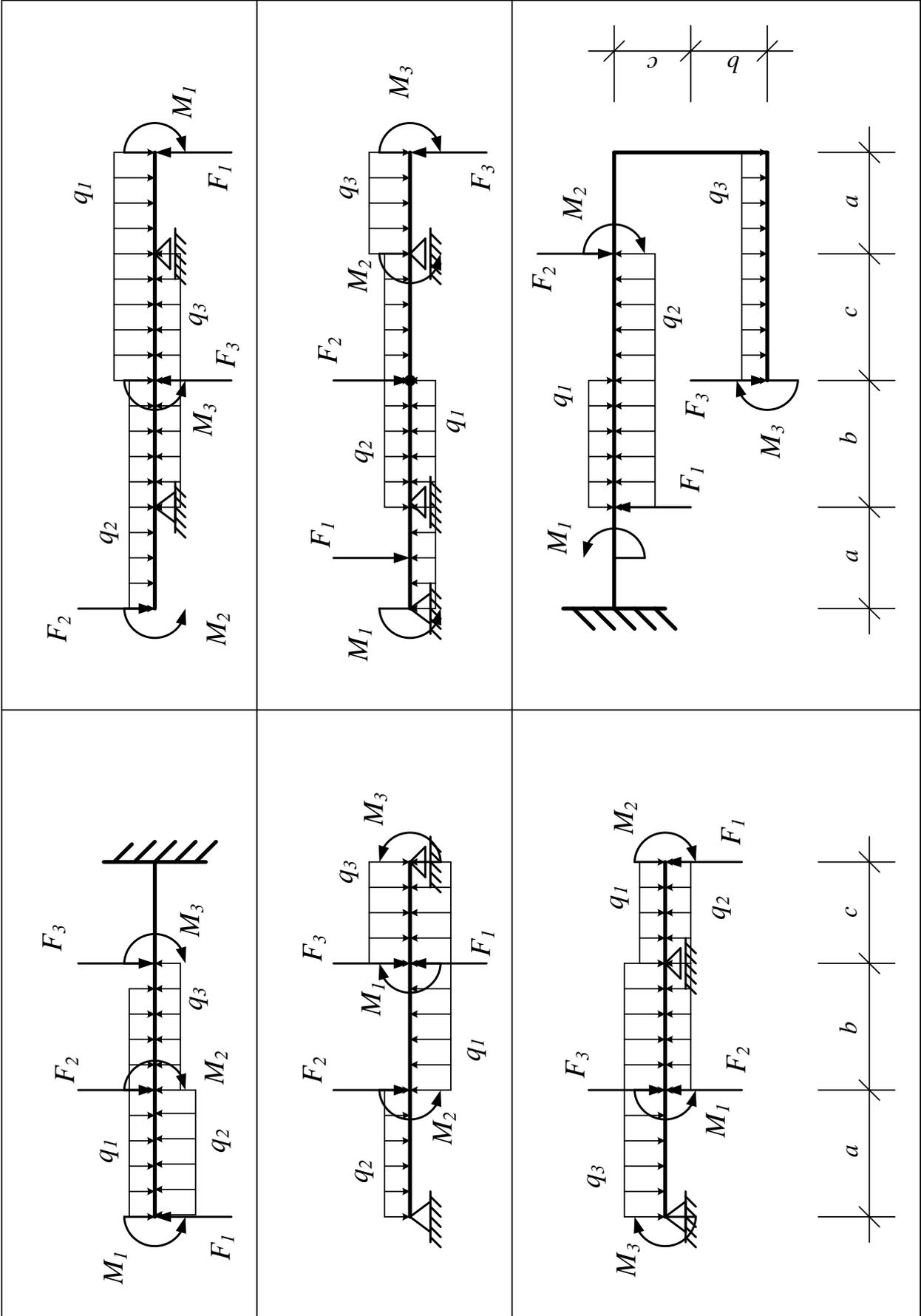
Числовые данные к расчётно-графическому заданию

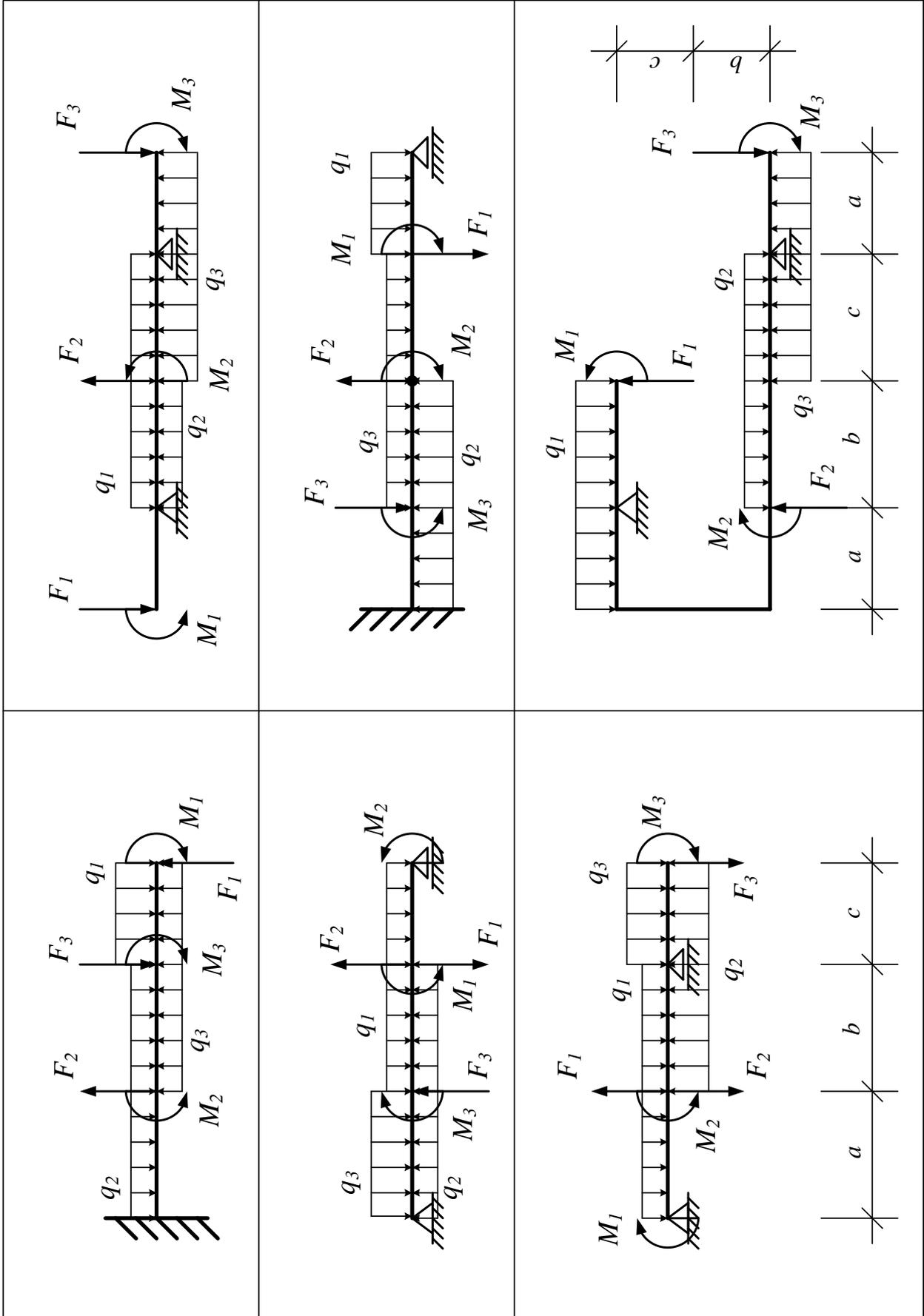
Номер задания	Размеры, м			Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	b	c	q, кН/м	F, кН	M, кНм	q	F	M
1	2	2	1,6	6	20	12	1	2	3
2	1,6	2	2,4	10	20	18	2	3	1
3	2	1,8	2	8	24	12	3	1	2
4	2,4	2	2	16	10	30	1	3	2
5	2	2,4	1,6	8	24	16	2	1	3
6	1,6	2	1,8	12	10	24	3	2	1
7	2	2	1,6	16	10	22	2	1	3
8	2	1,8	2	6	20	12	1	2	3
9	2,4	1,6	2	16	10	32	2	3	1
10	2	1,6	2,4	14	12	30	3	1	2
11	2,4	2	2,2	12	16	24	2	1	3
12	1,6	2	1,8	8	18	16	1	2	3
13	2,4	2	1,6	10	20	16	2	3	1
14	2	2,4	1,8	12	16	24	3	1	2
15	1,8	2	2,2	12	10	24	1	2	3
16	2	1,6	2	8	16	10	3	2	1
17	1,6	2	2,4	16	12	24	2	1	3
18	2,4	2	2	10	20	18	1	3	2
19	1,6	2	1,8	12	16	18	2	3	1
20	2	2,6	2,2	16	10	30	3	1	2
21	2,4	2	1,8	18	12	24	2	1	3
22	2,2	2,4	2	18	16	20	1	3	2
23	1,6	2,6	2	12	18	10	2	1	3
24	1,8	2	2	16	20	12	3	2	1
25	2	2	2,6	10	12	16	2	3	1

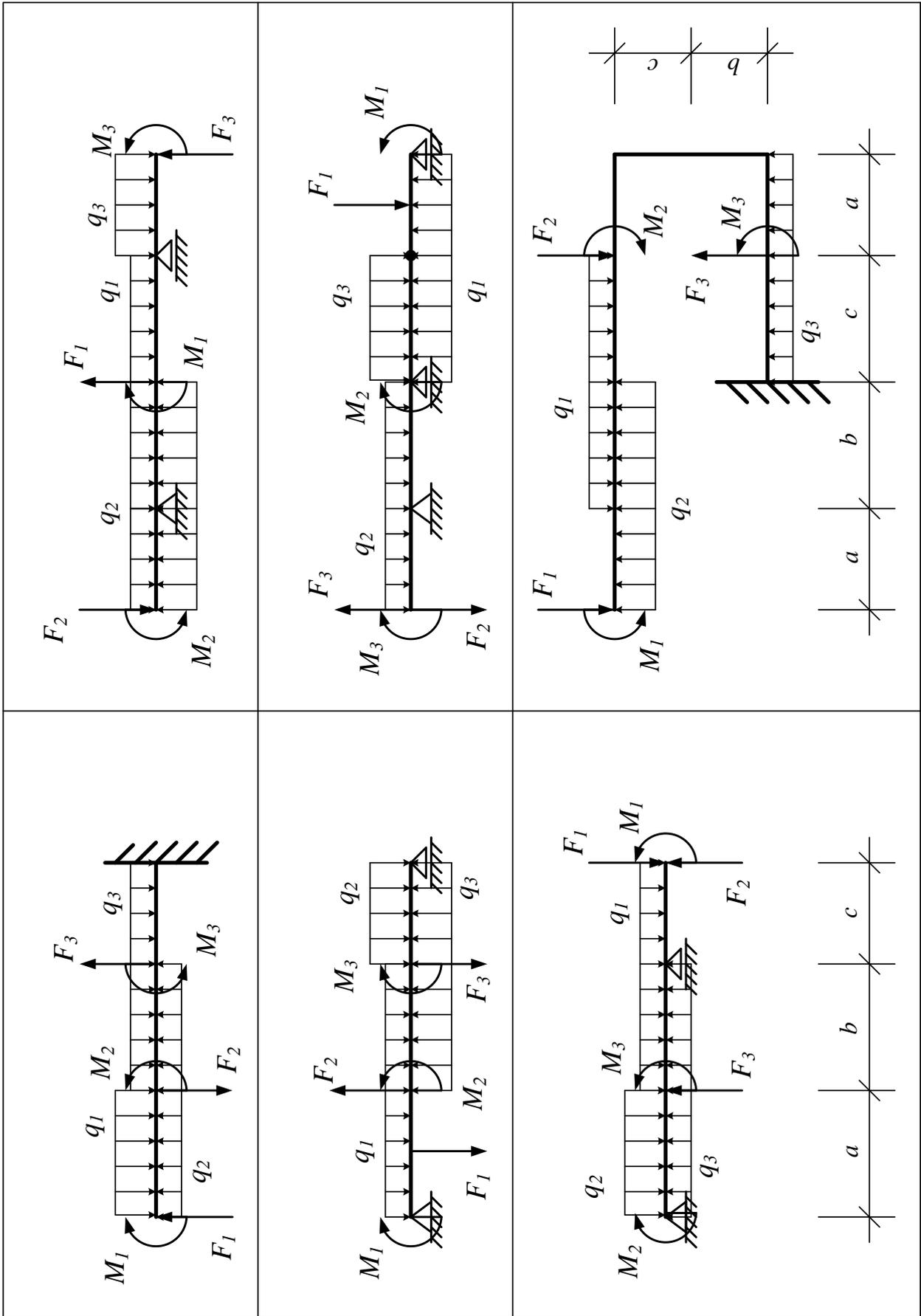


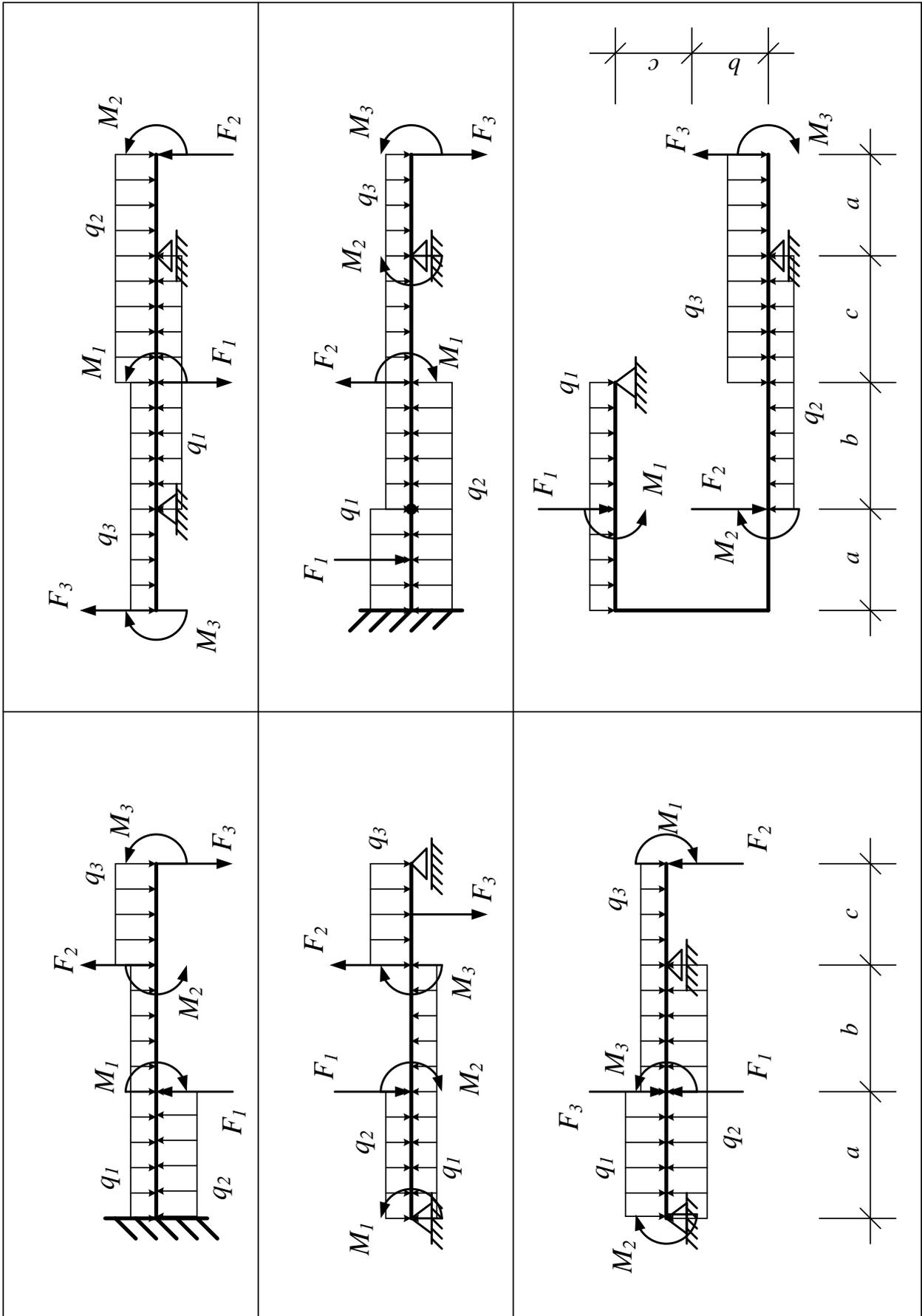


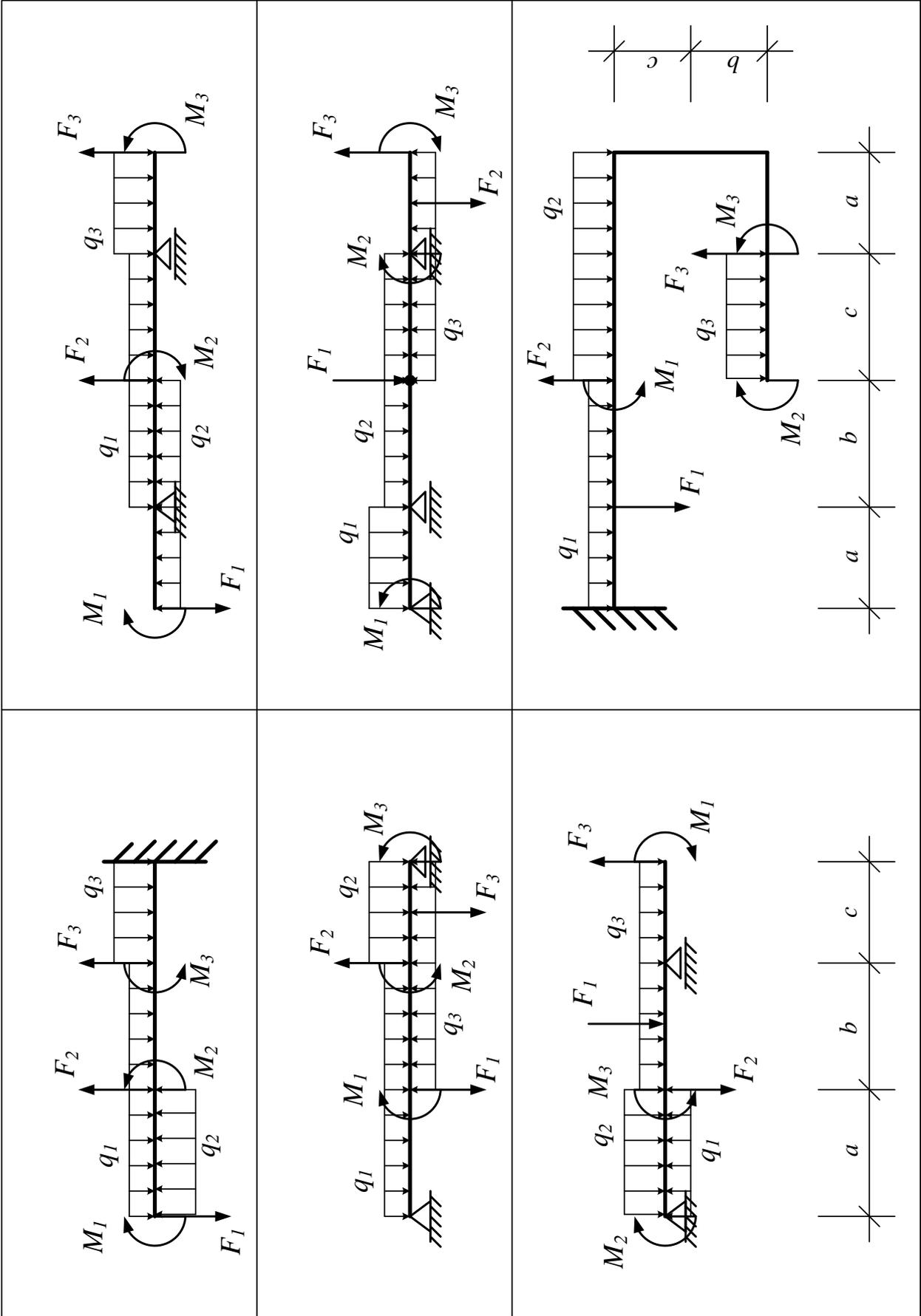


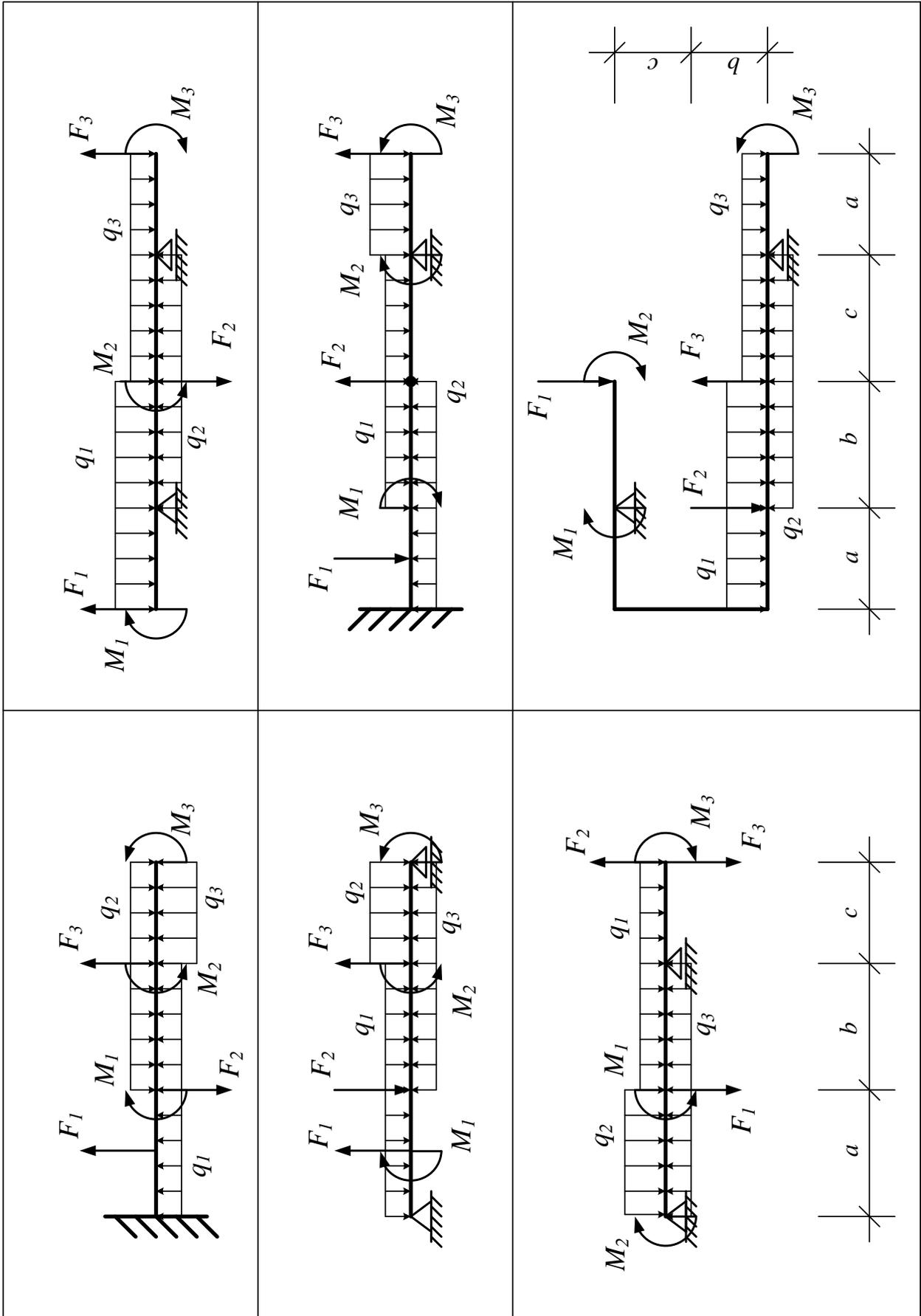












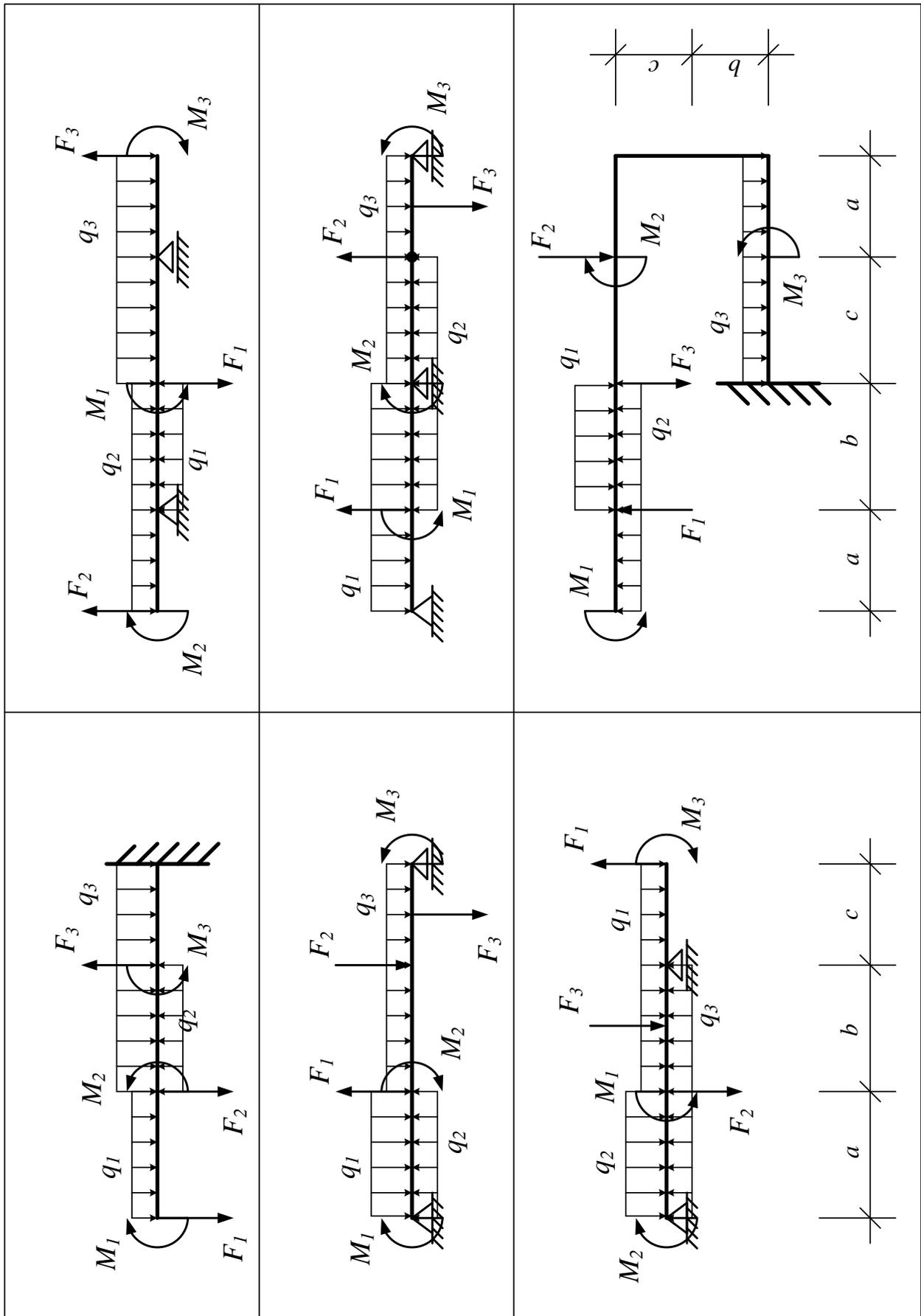


Рис. 35. Схемы для расчетно-графического задания

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дать определение поперечного и чистого изгиба.
2. Какие балки называются статически определимыми?
3. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении балки в общем случае действия на неё плоской системы сил?
4. Какие правила знаков принимаются для внутренних усилий при изгибе?
5. Как вычисляется значение поперечной силы и изгибающего момента в поперечных сечениях балки?
6. Что называется эпюрой внутренних усилий?
7. В чем заключается проверка правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?
8. Условие прочности балки при изгибе.
9. Как выполняется подбор поперечного сечения балки?
10. В чем заключается особенность расчета статически определимой шарнирно-консольной балки?
11. Как строится «поэтажная схема» для расчета шарнирно-консольной балки?
12. Какие балки являются основными, какие – второстепенными?
13. Как передается нагрузка с вышележащих на «поэтажной схеме» балок на нижележащие?
14. Какая конструкция называется рамой?
15. Какие внутренние усилия возникают в сечениях стержней рамы?
16. Правила определения внутренних усилий, возникающих в сечениях стержней рамы.
17. Правила знаков для определения внутренних усилий при расчете рам.
18. Особенность построения эпюры изгибающих моментов для рамы.

Приложение 1 Основные характеристики материалов

Материал	Модуль упругости	Модуль сдвига	Коэффициент Пуассона
	E, МПа	G, МПа	μ
Сталь	$2 \cdot 10^5$	$0,8 \cdot 10^5$	0,30
Чугун	$1 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	0,25
Алюминий	$0,7 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^5$	0,30
Медь	$1 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	0,32
Дерево (сосна)	$0,1 \cdot 10^5$	–	–

Приложение 2 Международная система единиц СИ

Длина. Единица величины – метр (*м*).

Масса. Единица величины – килограмм (*кг*).

Время. Единица величины – секунда (*с*).

Сила является производной трех факторов: *массы, длины и времени.*

Единица силы – ньютон (**Н**).

$$F(\text{Н}) = m(\text{кг}) \cdot a\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right) = m \cdot a\left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}\right), \Rightarrow 1\text{Н} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2},$$

То есть **1Н** – это сила, сообщающая телу массой **1 кг** ускорение величиной **1 м/с²** в направлении действия этой силы.

В курсе «Сопротивление материалов» чаще встречается обозначение единицы измерения силы **кН**: **1кН = 10³ Н**.

$$1\text{Н} = 10^5 \text{дин} = 0,102 \text{ кгс}.$$

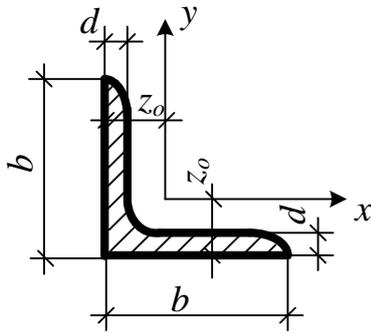
Давление, напряжение. Единица величины – паскаль (**Па**). **1Па = 1 Н/м²**.

В курсе «Сопротивление материалов» чаще встречается обозначение единицы измерения напряжения **МПа = 10⁶ Па = 10³ кН/м²**.

Приложение 3 Сортамент стали прокатной

Таблица 1

Сталь горячекатаная. Уголки равнополочные (ГОСТ 8509 - 93)



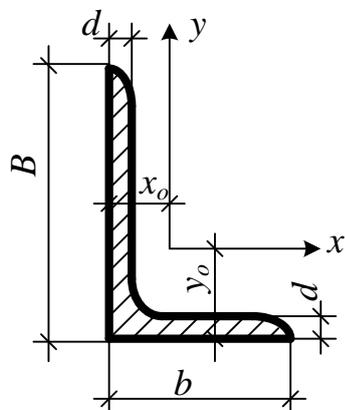
Обозначения:

- b – ширина полки;
 d – толщина полки;
 I – момент инерции;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани полки.

Номер профиля	Размеры, мм		Площадь сечения A , см ²	I_x см ⁴	$I_{x_{max}}$ см ⁴	$I_{y_{min}}$ см ⁴	z_0 см
	b	d					
1	2	3	4	5	6	7	8
5	50	3	2,96	7,11	11,3	2,95	1,33
		4	3,89	9,21	14,6	3,8	1,38
		5	4,8	11,2	17,8	4,63	1,42
5,6	56	4	4,38	13,1	20,8	5,41	1,52
		5	5,41	16	25,4	6,59	1,57
6,3	63	4	4,96	18,9	29,9	7,81	1,69
		5	6,13	23,1	36,6	9,52	1,74
		6	7,28	27,1	42,9	11,2	1,78
		5	6,86	31,9	50,7	13,2	1,9
7	70	6	8,15	37,6	59,6	15,5	1,94
		7	9,42	43	68,2	17,8	1,99
		8	10,7	48,2	76,4	20	2,02
7,5	75	5	7,39	39,5	62,6	16,4	2,02
		6	8,78	46,6	73,9	19,3	2,06
		7	10,1	53,3	84,6	22,1	2,1
		8	11,5	59,8	94,6	24,8	2,15
		9	12,8	66,1	105	27,5	2,18
8	80	5,5	8,63	52,7	83,6	21,8	2,17
		6	9,38	57	90,4	23,5	2,19
		7	10,8	65,3	104	27	2,23
		8	12,3	73,4	115	30,3	2,27
9	90	6	10,6	82,1	130	34	2,43
		7	12,3	94,3	150	38,9	2,47
		8	13,9	106	163	43,8	2,51
		9	16,6	118	186	48,6	2,55

1	2	3	4	5	6	7	8
10	100	7	13,8	131	207	54,2	2,71
		8	15,6	147	233	60,9	2,76
		10	19,2	179	284	74,1	2,83
		12	22,8	209	331	86,9	2,91
		14	26,3	237	375	99,3	2,99
		16	29,7	264	416	112	3,06
		7	15,2	176	279	72,7	2,96
10	110	8	17,2	198	315	81,8	3
		8	19,7	294	467	122	3,36
12,5	125	9	22	327	520	135	3,4
		10	24,3	360	571	149	3,45
		12	28,9	422	670	174	3,53
		14	33,4	482	764	200	3,61
		16	37,8	539	853	224	3,68
		9	24,7	466	739	192	3,73
14	140	10	27,3	512	814	211	3,82
		12	32,5	602	957	248	3,9
		10	31,4	774	1229	319	4,3
16	160	11	34,4	844	1341	348	4,35
		12	37,4	913	1450	376	4,39
		14	43,3	1046	1662	431	4,47
		16	45,1	1175	1366	485	4,55
		18	54,8	1259	2061	537	4,63
		11	38,8	1216	1933	500	4,85
18	180	12	42,2	1317	2093	540	4,89
		12	47,1	1823	2896	749	5,37
20	200	13	50,9	1961	3116	805	5,42
		14	54,6	2097	3333	861	5,46
		16	62	2363	3755	970	5,54
		20	76,5	2671	4560	1182	5,7
		25	94,3	3466	5494	1438	5,89
		14	60,4	2814	4470	1159	5,93
22	220	16	68,6	3175	5045	1306	6,02
		16	78,4	4717	7482	1942	6,75
25	250	18	87,7	5247	8337	2158	6,83
		20	97	5765	5160	2370	6,91
		22	106,1	6270	9961	3579	7
		25	119,7	7006	11125	2887	7,11
		28	133,1	7717	12244	3180	7,23
		30	142	8177	13965	3389	7,31

Таблица 2
Сталь горячекатаная. Уголки неравнополочные (ГОСТ 8510 - 89)

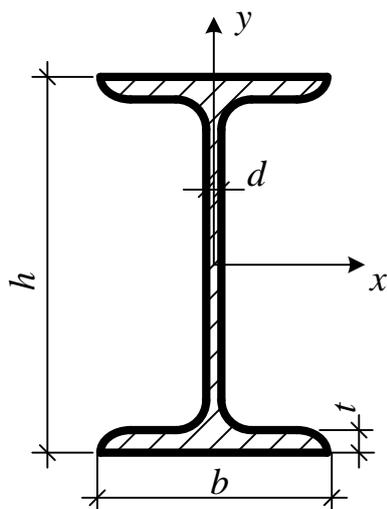
**Обозначения:**

- B – ширина большей полки;
 b – ширина меньшей полки;
 d – толщина полки;
 I – осевой момент инерции;
 x_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани большей полки;
 y_0 – расстояние от центра тяжести до наружной грани меньшей полки.

Номер проф.	Размеры, мм			Площ. сеч-я A см ²	I_x см ⁴	I_y см ⁴	$I_{u \min}$ см ⁴	Угол накл. оси $tg a$	x_0 см	y_0 см
	B	b	d							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	3,7	2,19	0,406	0,84	1,82
			5	4,41	13,8	4,48	2,66	0,404	0,88	1,86
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	5,16	3,07	0,397	0,91	2,03
			5	4,98	19,9	6,26	3,72	0,396	0,95	2,08
			6	5,9	23,3	7,28	4,36	0,393	0,99	2,12
			8	7,68	29,6	9,15	5,58	0,386	1,07	2,20
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	9,05	5,34	0,406	1,05	2,28
			6	6,11	34,8	12,5	7,24	0,436	1,17	2,39
7,5/5	75	50	6	7,25	40,9	14,6	8,48	0,435	1,21	2,44
			8	9,47	52,4	18,5	10,9	0,43	1,29	2,52
8/5	80	50	5	6,36	41,6	12,7	7,58	0,387	1,13	2,6
			6	7,55	49	14,8	8,88	0,386	1,17	2,65
			5,5	7,86	68,3	19,7	11,8	0,384	1,26	2,92
9/5,6	90	56	6	9,54	70,6	21,2	12,7	0,384	1,28	2,95
			8	11,18	90,9	27,1	16,3	0,38	1,36	3,04
10/6,3	100	63	6	9,58	98,3	30,6	18,2	0,393	1,42	3,23
			7	11,1	113	38	30,8	0,392	1,46	3,28
			8	12,6	127	39,2	23,4	0,391	1,5	3,32
			10	15,8	154	47,1	28,3	0,387	1,58	3,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11/7	110	70	6,5	11,4	142	46,6	26,9	0,402	1,58	3,55
			8	13,9	172	54,6	32,3	0,4	1,64	3,61
12,5/8	125	80	7	14,1	227	73,7	43,4	0,407	1,8	4,01
			8	16	256	83	46,8	0,406	1,84	4,05
			10	19,7	312	100	59,3	0,404	1,92	4,14
			12	23,4	365	117	69,5	0,4	2	4,22
14/9	140	90	8	18	364	120	70,3	0,407	2,03	4,49
			10	22,2	444	146	85,5	0,409	2,12	4,58
16/10	160	100	9	22,9	606	186	110	0,391	2,23	5,19
			10	26,3	667	204	121	0,39	2,28	5,23
			12	30	784	239	142	0,388	2,36	6,32
			14	34,7	897	272	162	0,385	2,43	5,4
18/11	180	110	10	28,3	952	276	165	0,375	2,44	5,88
			12	33,7	1123	324	194	0,374	2,52	5,97
			14	34,9	1449	446	264	0,392	2,79	6,5
20/12,5	200	125	12	37,9	1568	482	285	0,392	2,83	6,54
			14	43,9	1801	851	327	0,39	2,91	6,62
			16	48,8	2026	617	367	0,388	2,99	6,71
25/16	250	160	12	48,3	3147	1032	604	0,41	3,53	7,97
			16	62,6	4091	1333	781	0,408	3,69	8,14
			18	71,7	4845	1475	866	0,407	3,77	8,23
			20	78,5	4987	1613	949	0,405	3,85	8,31

Таблица 3
Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (ГОСТ 8239 - 89)

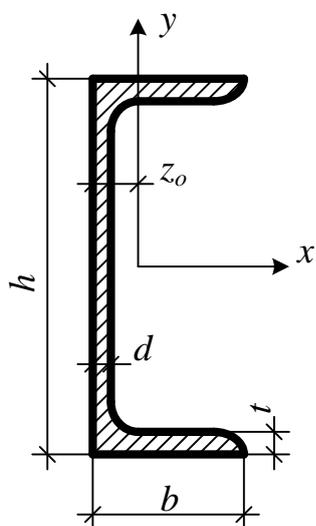


Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 I – момент инерции.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A см ²	I_x см ⁴	I_y см ⁴	W_x см ³
	h	b	d	t				
10	100	55	4,5	7,2	12	198	17,9	39,7
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	27,9	58,4
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	41,9	81,7
16	160	81	5	7,8	20,2	873	58,6	109
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	82,6	143
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	114	159
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	115	184
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	155	203
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	157	232
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	206	254
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	198	289
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	260	317
27	270	125	6	9,8	40,2	5010	260	371
27a	270	135	6	10,2	43,2	5500	337	407
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	337	472
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	436	518
33	330	140	7	11,2	53,8	9840	419	597
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	516	743
40	400	155	8,3	13	71,6	19062	667	953
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	808	1231
50	500	170	10	15,2	100	39727	1043	1589
55	550	180	11	16,5	118	55962	1356	2035
60	600	190	12	17,8	138	76806	1725	2560

Таблица 4
Сталь горячекатаная. Швеллеры (ГОСТ 8240 - 89)



Обозначения:

h – высота балки;
 b – ширина полки;
 d – толщина стенки;
 t – средняя толщина полки;
 I – момент инерции;
 z_0 – расстояние от центра тяжести до наружной стороны стенки.

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения A см ²	I_x см ⁴	I_y см ⁴	z_0 см	W_x см ³
	h	b	d	t					
6	60	32	4,4	7	6,16	22,8	5,61	1,16	9,1
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	8,7	1,24	15
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	12,8	1,31	22,4
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	20,4	1,44	34,8
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	31,2	1,54	50,6
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	45,4	1,67	70,2
14a	140	62	4,9	8,7	17	545	57,5	1,87	77,8
16	160	64	5	8,4	18,1	747	63,6	1,8	93,4
16a	160	68	5	9	19,5	823	78,8	2	103
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	86	1,94	121
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	105	2,13	132
20	200	76	5,2	9	23,4	1520	113	2,07	152
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	139	2,28	167
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	151	2,21	192
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	187	2,46	212
24	240	90	5,6	10	30,6	2900	208	2,42	242
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	254	2,67	265
27	270	95	6	10,5	35,2	4160	262	2,47	308
30	300	100	6,5	11	40,5	5810	327	2,52	387
33	330	105	7	11,7	46,5	7980	410	2,59	484
36	360	110	7,6	12,6	53,4	10820	513	2,68	601
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	642	2,75	761

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1976. – 608 с.
2. Винокуров, Е.Ф. Сопротивление материалов. Расчётно-проектировочные работы / Е.Ф. Винокуров, А.Г. Петрович, Л.И. Шевчук. – Минск: Выш. шк., 1987. – 227 с.
3. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1975. – 742 с.
4. Сигаев, Е.А. Сопротивление материалов – Кемерово, 2002. – ч. 1 – 228 с.
5. Сидоров, В.Н. Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. – М.: Высш. шк., 2002. – 352с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Глава 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	
СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ.....	6
1.1 Задачи и содержание дисциплины.....	6
1.2 Физические свойства материала и основные допущения, упрощающие расчеты.....	8
1.3 Формы и закрепления элементов конструкций и их представление в расчетной схеме.....	10
1.4 Типы балок. Порядок определения реакций опор для различных балок.....	15
1.5 Внешние нагрузки, действующие на конструкцию, и их приближенное представление в расчетной схеме.....	17
1.6 Внутренние усилия, возникающие в деформируемой конструкции. Метод их определения.....	20
1.7 Напряжение.....	23
 Глава 2 ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.	
ОСНОВЫ РАСЧЕТА СЖАТО-РАСТЯНУТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	27
2.1 Общие понятия.....	27
2.2 Продольная сила.....	28
2.3 Нормальное напряжение.....	29
2.4 Продольные и поперечные деформации.....	31
2.5 Расчетно-графическое задание № 1.....	41
2.6 Расчет статически-неопределимых стержней.....	46
2.7 Расчетно-графическое задание № 2.....	53

Глава 3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	57
3.1 Общие понятия.....	57
3.2 Статический момент сечения.....	57
3.3 Моменты инерции сечения.....	62
3.4 Изменение осевых и центробежного моментов инерции при параллельном переносе осей координат.....	64
3.5 Изменение осевых моментов инерции при повороте осей координат.....	66
3.6 Главные оси инерции и главные моменты инерции.....	68
3.7 Расчетно-графическое задание № 3.....	77
Глава 4 ПРЯМОЙ ИЗГИБ.....	85
4.1 Общие понятия.....	85
4.2 Внутренние усилия, возникающие при изгибе.....	86
4.3 Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки....	88
4.4 Контроль правильности построения эпюр.....	91
4.5 Условие прочности при изгибе.....	92
4.6 Многопролетные статически определимые шарнирно-консольные балки.....	97
4.7 Расчет статически-определимых плоских рам.....	102
4.8 Расчетно-графическое задание № 4.....	106
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	119
1. Основные характеристики материалов.....	119
2. Международная система единиц СИ.....	119
3. Сортамент стали прокатной.....	120
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	126

Окладникова Елена Викторовна

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Основы теории, примеры расчета
и варианты заданий

Учебное пособие

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.

Подписано к печати 16.06.2014 г. Формат 60×90/16.

Уч.-изд.л. – 5,9. Усл.-п.л. – 8,3.

Тираж 100 экз. Заказ 190.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86

