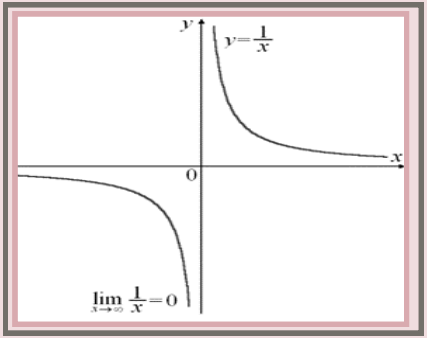
Е. А. Подолько

Теория пределов



МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Дальневосточный государственный аграрный университет
Технологический факультет

Евгения Александровна Подолько

Теория пределов

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2021

УДК 517.1
ББК 22.161
П 44
Рецензент – Кривуца З. Ф., докт. техн. наук, зав. кафедрой физики и информатики Дальневосточного ГАУ

Рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета
(Протокол № 3 от 24 ноября 2020 года)

Подолько, Евгения Александровна.
П 44 Теория пределов : учебно-методическое пособие / Е. А. Подолько ; Дальневосточный государственный аграрный университет, технологический факультет. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2021. – 72 с.

Учебно-методическое пособие посвящено основным методам вычисления пределов различных функций в точке. В начале каждого параграфа приводится теоретический материал, затем подробно разбираются примеры, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Пособие может быть полезно не только обучающимся, начинающим знакомство с вычислением пределов, но также магистрантам, аспирантам, желающим восстановить свои знания в этой области, а также преподавателям, ведущим занятия по данному разделу курса высшей математики.

УДК 517.1
ББК 22.161

Оглавление

Введение

Математический анализ является одним из базовых разделов для специалистов в области технических и естественных наук. В настоящее время обучающимся всё большую долю работы по освоению учебного материала приходится выполнять самостоятельно. В помощь этому процессу и создано данное учебно-методическое пособие.

Учебно-методическое пособие посвящено основным методам вычисления пределов различных функций в точке. В начале каждого параграфа приводится теоретический материал, затем подробно разбираются примеры, после которых предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Предлагаемое пособие может быть полезно не только обучающимся, начинающим знакомство с вычислением пределов, но также и магистрантам, аспирантам, желающим восстановить свои знания в этой области.

Преподаватели, ведущие занятия по данному разделу курса высшей математики, также могут найти здесь примеры для решения на практических занятиях. Пособие может быть использовано преподавателями математики при подготовке к лекционным и практическим занятиям.

Теория пределов – это один из разделов математического анализа.

Интуитивно понятие о предельном переходе при вычислении площадей и объемов различных геометрических тел использовалось еще учёными Древней Греции, особенно в работах древнегреческого математика, физика и инженера Архимеда (287 до н.э. – 212 до н.э.).

Дальнейшее своё применение теория пределов получила при создании дифференциального и интегрального исчислений в 17 веке, прежде всего в работах английского физика, математика, механика и астронома Исаака Ньютона (1642-1727). Впервые определение понятия предела было введено в работе английского математика Джона Валлиса (1616-1703) «Арифметика бесконечных величин».

Исторически понятие предела не лежало в основе дифференциального и интегрального исчислений. Только лишь в 19 веке в работах великого французского математика и механика Огюстена Луи Коши (1789-1857) теория пределов была использована для строгого обоснования математического анализа. Дальнейшим развитием этой теории занимались немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) и чешский математик, философ и теолог Бернард Больцано (1781-1848).

В курсе математического анализа понятие предела является одним из основных. С помощью предела вводятся производная и определенный интеграл.

§ 1 Числовые множества. Числовые промежутки. Окрестность точки

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под *множеством* понимают совокупность (собрание, семейство …) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов университета, о множестве рыб в Черном море, о множестве всех натуральных чисел и т.д.

Объекты, из которых состоит множество, называют его *элементами.* Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \dots, X, Y, \dots$, а их элементы – малыми буквами $a, b, \dots, x, y, \dots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$, запись $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом Ø.

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества. Например, запись $A = \{1, 4, 23\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 4 и 23; запись $A = \{x : 0 \le x \le 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \le x \le 2$.

Определение 1.1. Множество A называется *подмножеством множества B*, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B *равны* или *совпадают*, и пишут $A=B$, если $A \subset B$ и $B \supset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

Определение 1.2. Объединением (или суммой) множества A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A+B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$.

Определение 1.3. Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) - $A \cap B$ ($A \cdot B$). Кратко: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Определение 1.4. Множества, элементами которых являются числа называются *числовыми*. Множества бывают конечными и бесконечными.

Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3;\ldots; n;\ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2;\ldots; n;\ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2;\ldots; \pm n;\ldots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \{\frac{m}{n} : m \in Z, n \in N\}$ – множество рациональных чисел;

R – множество действительных чисел.

Между этими множествами существует соотношение $N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R$.

Множество *R* содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью, или бесконечной периодической дробью.

Так, $\frac{1}{2} = 0{,}5$ (=0,500…), $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ - рациональные числа. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью.

Так, $\sqrt{2} = 1{,}4142356...,\ \pi = 3{,}1415926...$ - иррациональные числа. Множество действительных чисел есть множество всех бесконечных десятичных дробей.

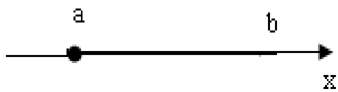
Пусть a и b – действительные числа, причем a<b.

Определение 1.5. *Числовыми промежутками* (интервалами) называют подмножества всех действительных чисел, имеющих следующий вид:

[*a*; *b*] = $\{x: a \le x \le b\}$ – отрезок (сегмент, замкнутый промежуток – множество чисел *x*, удовлетворяющих неравенству $a \le x \le b$):

(*a*; *b*) = $\{x: a < x < b\}$ – интервал (открытый промежуток):

[*a*; *b*) = $\{x: a \le x < b\}$; (*a*; *b*]= $\{x: a < x \le b\}$ – полуоткрытые интервалы (или полуоткрытые отрезки):



$(-\infty;\ b]=\{x:\ x\le b\}$; $[a;+\infty)=\{x:\ x\ge a\}$;

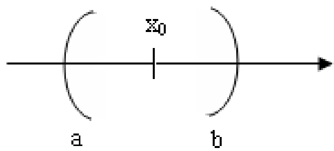
$(-\infty;\ b)=\{x:\ x<b\}$; $(a;+\infty)=\{x:\ x>a\}$;

$\left(-\infty;+\infty\right)=\left\{x:-\infty<x<+\infty\right\}=R$ – бесконечные интервалы (промежутки).

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой).

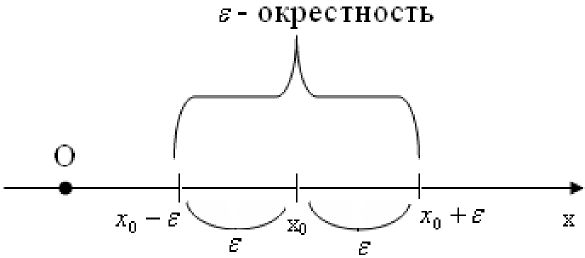
Определение 1.6. *Окрестностью* точки x_0 называется произвольный достаточно малый интервал $(a;\ b)$, содержащий внутри себя точку x_0.

$$a<x_0<b$$



Часто рассматривается в математике случай, когда x_0 является серединой интервала от a до b. В этом случае x_0 называется *центром интервала* (окрестности) от a до b, а величина $\dfrac{b-a}{2}$ - *радиус окрестности.* $\dfrac{b-a}{2}=R$.

Если радиус окрестности точки x_0 равен эпсилон ε, то окрестность называют ε - окрестностью.



§ 2 Абсолютная величина действительного числа и ее свойства

Определение 2.1. Абсолютной величиной (модулем) действительного числа *a* называется выражение:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geq 0, \\ -a, \text{если } a \prec 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &|5| = 5, \\ &|0| = 0, \\ &|-5| = -(-5) = 5 \end{aligned}$$

Модуль числа *a* есть само число *a*, если *a* больше или равно нулю и число, взятое с противоположным знаком, если *a* меньше нуля. Модуль числа всегда положительное число.

Свойства абсолютных величин

1. Модуль суммы $|a+b| \leq |a|+|b|$, то есть абсолютная величина суммы двух чисел не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых.

Например, $|-2+3| < |-2|+|3| = 2+3 = 5$ или 1<5

$$|-2-3|=|-2|+|-3|=2+3=5 \text{ или } 5=5.$$

2. Абсолютная величина разности двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел $|a-b|\geq|a|-|b|$.

Например, $|4-2|=|4|-|2|=4-2=2$ или 2=2

$$|-4-2|>|-4|-|2|=4-2=2 \text{ или } 6>2.$$

3. Абсолютная величина произведения действительных чисел равна произведению абсолютных величин $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$.

4. Абсолютная величина частного двух действительных чисел равна частному абсолютных величин делимого и делителя $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, $b\neq 0$.

5. Неравенство $|a|<\varepsilon$ равносильно двум неравенствам $-\varepsilon<a<\varepsilon$.

Отсюда неравенство $|a-b|<\varepsilon$ равносильно неравенствам $b-\varepsilon<a<b+\varepsilon$.

Аналогично $|a|\leq\varepsilon\Rightarrow-\varepsilon\leq a\leq\varepsilon$ и

$|a-b|\leq\varepsilon\Rightarrow b-\varepsilon\leq a\leq b+\varepsilon$.

Замечание. Свойства 5 справедливы и для знака $\geq$.

§ 3 Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

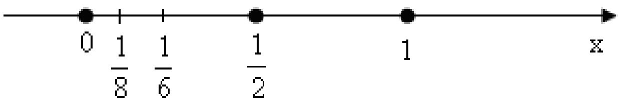
Определение 3.1. Бесконечное множество чисел, каждое из которых зависит одинаковым образом от своего порядкового номера, называется бесконечной числовой последовательностью.

$\{x_n\} = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, где x_1, x_2 – члены последовательности, x_n–n-й член последовательности.

Числовая последовательность задана, если известен закон, по которому каждому натуральному n ставится в соответствие определенное число x_n.

Пример:

$N = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\} = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{8}, \dots, \dfrac{1}{2n}, \dots\right\}$ номер числовой последовательности совпадает с его значением. Изобразим на координатной прямой члены числовой последовательности:



По мере возрастания порядкового номера члены числовой последовательности $\left\{\dfrac{1}{2n}\right\} \to 0$ неограниченно приближаются к нулю, но никогда равными нулю не будут.

Ноль – предел этой числовой последовательности.

Определение 3.2. Число a называется пределом числовой последовательности, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое положительное число N, что как только номер члена числовой последовательности станет больше N, так сразу же выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon \tag{3.1}$$

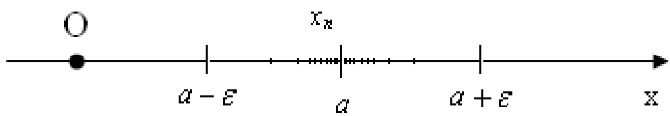
В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (или переменная x_n, пробегающая последовательность x_1, x_2,…) имеет предел равный числу a (или x_n стремится к a). Говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к a*.

Выясним *геометрический смысл* определения предела последовательности.

Неравенство (3.1) равносильно неравенствам:

$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$,

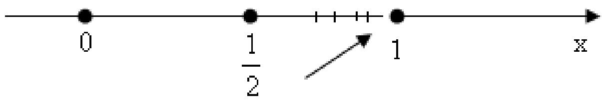
которые показывают, что элемент x_n находится в ε - окрестности точки a.



Геометрически определение предела числовой последовательности обозначает, что если число a является пределом числовой последовательности общим членом x_n, то в ε - окрестности точки a содержится бесчисленное множество членов числовой последовательности, а за ее пределами лишь конечное число членов.

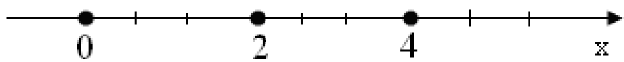
Рассмотрим ряд примеров:

1. Пусть переменная величина $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ (n=1, 2, 3, ….). Тогда X={x_n} = { $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \ldots$}, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.



2. Пусть $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ (n=1, 2, 3, ….). Тогда X={x_n}={ $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots$}, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Пусть x_n=2^n (n=1, 2, 3, ….). Тогда X={x_n}={2, 4, 8…}, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.



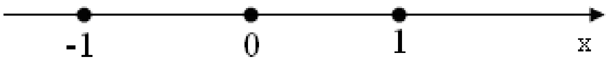
4. Пусть x_n=-(2^n) (n=1, 2, 3, ….). Тогда X={x_n}={-2, -4, -8,…}, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

5. Пусть $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, при $n \to \infty$

а) $x_n = \dfrac{1}{n}, \quad y_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n} \div \dfrac{1}{n^2} = n \to \infty$

б) $x_n = \dfrac{1}{n^2}, \quad y_n = \dfrac{1}{n}, \quad \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{1}{n^2} \div \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} = 0$

в) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \dfrac{1}{n}, \quad \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{(-1)^n}{n} \div \dfrac{1}{n} = (-1)^n$ - $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует, т.к. при нечетном n он равен -1, а при четном равен 1. Нет определенного числа, к которому стремилось бы данное переменное.



Определение 3.3. Последовательность называется ограниченной, если существуют два числа *a* и *b*, такие что при всех *n* выполняется неравенство $a < x_n < b$, при этом говорят, что последовательность ограничена снизу числом *a*, а сверху числом *b*.

Определение 3.4. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а последовательность, не имеющая предела, называется расходящейся.

§ 4 Постоянные и переменные величины

Величиной называется все то, что можно измерить и выразить числом (вес тела, объем, длина и др.). В некоторых случаях величины изменяются, а в некоторых не изменяются. В своей деятельности человек сталкивается с двумя величинами (постоянными и переменными).

Определение 4.1. *Постоянной величиной* называется величина, которая в процессе изучения некоторого явления не меняет своего численного значения.

Определение 4.2. *Переменной величиной* называется величина, которая в процессе какого-либо явления принимает хотя бы два числовых значения.

Пример 1. При равномерном движении скорость постоянная величина, а время и расстояние величины переменные.

Пример 2. Абсолютно постоянной величиной в геометрии является отношение длины окружности к длине своего диаметра, равное числу π (пи). Итак, в любом явлении π (пи) постоянная абсолютная величина π =3,1415926…..

Любую постоянную величину в математике часто рассматривают как частный случай переменной величины, у которой все численные значения одинаковы.

Определение 4.3. Числовые значения, принимаемые переменной величиной, образуют множество ее значений, которые называются ее *областью изменения.*

Определение 4.4. Переменная величина называется *возрастающей*, если каждое последующее ее значение больше предыдущего. Переменная величина называется *убывающей,* если каждое последующее ее значение меньше предыдущего.

Определение 4.5. Возрастающая постоянная величина называется *монотонно возрастающая,* а убывающая *монотонно убывающая.*

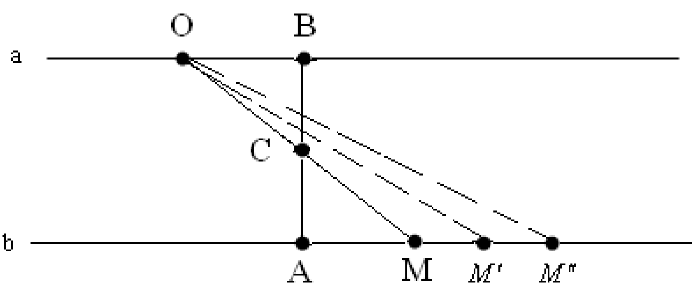
Определение 4.6. Переменная величина x называется *ограниченной,* если найдется такое постоянное положительное число $M \geq 0$, что все последующие значения переменной, начиная с некоторого момента, удовлетворяют условию:

$$|x| \leq M \Rightarrow -M \leq x \leq M$$

§ 5 Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Иногда математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисления) называют анализом бесконечно малых величин. Рассмотрим два вида переменных величин: бесконечно малые и бесконечно большие.

Построим две параллельные прямые a и b. Найдем кратчайшее расстояние от прямой a до b. Получим отрезок AB (перпендикуляр от a к b). На прямой a отметим произвольно точку O, на прямой b справа от точки A – точку M. Соединим точки O и M. Точкой пересечения отрезков AB и OM является точка C. Выполним движение точки M по нижней прямой неограниченно вправо от точки A. Получим точку M'. При каждом движении точки M мы все время будем соединять ее с точкой O на верхней прямой. Таким образом, длина отрезка AB – постоянная величина, длины отрезков AC, CB, AM – переменные при движении точки M.



Где $a||b$, $AB=a$– постоянная величина, $AC=x$ – переменная величина, $BC=\alpha$ – бесконечно малая величина, $AM=z$ – бесконечно большая величина.

Определение 5.1. Переменная величина α называется *бесконечно малой* величиной (б.м.в.), если в процессе изменения она, начиная с некоторого момента, становится и впредь остается меньше по абсолютной величине наперед заданного как угодно малого положительного числа э́псилон ε, т.е. $|\alpha| < \varepsilon$.

Определение 5.2. *Бесконечно большой* величиной (б.б.в.) называется переменная Z, которая в процессе своего изменения, начиная с некоторого момента, становится и впредь остается по абсолютной величине больше как угодно большого наперед заданного положительного числа M, $M > 0$, т.е. $|Z| > M$.

Замечание 1. Нельзя смешивать понятия бесконечно малая и ничтожно малая величины, так как постоянная величина – ничтожно малая величина, а бесконечно малая величина – переменная величина.

Замечание 2. Из всех постоянных величин число 0 (ноль) можно считать б.м.в., так как $\forall \varepsilon > 0 : 0 < \varepsilon$.

Справедливы утверждения:

1) сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая;
2) произведение бесконечно малой величины на ограниченную величину есть величина бесконечно малая;
3) произведение бесконечно малой величины на постоянную величину есть величина бесконечно малая;
4) величина обратная бесконечно малой, есть величина бесконечно большая;
5) величина обратная бесконечно большой величине, есть величина бесконечно малая.

§ 6 Предел переменной величины. Основные теоремы о пределах

В данном параграфе будем рассматривать совокупность функций, которые зависят от одного и того же аргумента x, при этом $x \to a$ или $x \to \infty$. Иногда не будем писать ни $x \to a$, ни $x \to \infty$, подразумевая то или другое.

Определение 6.1. Постоянная величина a называется пределом переменной величины x, если при изменении переменной их абсолютная величина разности, начиная с некоторого момента, становится и впредь остается меньше наперед заданного, сколь угодно малого положительного числа ε, т.е. $|x-a|<\varepsilon$.

Обозначается символически: $\lim x = a$.

На основании этого определения заключаем, что их разность есть величина бесконечно малая. Поэтому можем записать основную формулу теории пределов:

$$\begin{gathered} \lim x = a \\ x = a + \alpha \end{gathered} \qquad (6.1)$$

Это означает, что если известен предел переменной величины, то эту переменную можно представить в виде алгебраической суммы этого предела и бесконечно малой величины. И, наоборот, если переменную можно представить в виде суммы постоянной и бесконечно малой величины, то эта постоянная является пределом переменной.

На основании этого определения и определения бесконечно малой величины заключают:

1. Переменная отличается от своего предела на величину бесконечно малую.

2. Предел бесконечно малой величины равен нулю, то есть $lim\alpha=0$.
3. Предел бесконечно большой величины есть неопределенность, $limz=\pm\infty$.

Основные теоремы о пределах

Теорема 6.1. Если пределы конечного числа переменных существуют, то существует предел их суммы (разности), равный сумме (разности) этих пределов:

$$\lim(y_1 \pm y_2) = \lim y_1 \pm \lim y_2.$$

Теорема 6.2. Если существуют пределы переменных величин y_1 и y_2, то существует и предел их произведения, равный произведению этих пределов:

$$\lim(y_1 \cdot y_2) = \lim y_1 \cdot \lim y_2.$$

Теорема 6.3. Если существуют пределы переменных величин y_1 и y_2, то существует предел их частного, равный частному пределов этих переменных:

$$\lim \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lim y_1}{\lim y_2} \quad (\lim y_2 \neq 0).$$

Следствия*:*

1. Предел постоянной величины равен самой постоянной:

$\lim C = C$, *(C-const)*

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть:

$\lim C \cdot x = C \cdot \lim x.$

3. Если существует предел переменной величины x, то существует предел степени этой величины, равный степени ее предела, то есть:

$$\lim x^n = \left(\lim x\right)^n.$$

4. Если существует предел переменной величины y, то существует предел корня из этой переменной, равный корню предела величины, то есть:

$$\lim \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{\lim y}.$$

5. Если существует предел переменной величины z, то существует предел логарифма этой переменной, равный логарифму предела величины, то есть:

$$\lim \log_a z = \log_a \lim z.$$

Правило: для того, чтобы вычислить предел выражения, необходимо подставить в выражение вместо переменной ее предельное значение.

Примеры: Вычислить пределы:

$$\lim_{x\to 3}\left(x^2 - 5x + 4\right) = \lim_{x\to 3} x^2 - \lim_{x\to 3} 5x + \lim_{x\to 3} 4 = \left(\lim_{x\to 3} x\right)^2 - 5\lim_{x\to 3} x + 4 = 3^2 - 5\cdot 3 + 4 = -2$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 4x - 2} = \frac{2\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1}{3\cdot 1^2 + 4\cdot 1 - 2} = \frac{0}{5} = 0$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + x - 2} = \frac{(-2)^2 + 3\cdot(-2) + 7}{(-2)^2 + (-2) - 2} = \frac{5}{0} = 5\cdot\frac{1}{0} = 5\cdot\infty = \infty$$

Примеры:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2+x-6}=\dfrac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2+2-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни трёхчлена, либо по теореме Виета:

$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Либо используя формулу нахождения дискриминанта: $D=b^2-4ac$,

1) $D>0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

2) $D=0$, $x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$;

3) $D<0$, корней не имеет.

$2x^2+x-10=0$, $x_1=2$, $x_2=-\dfrac{5}{2}$

$x^2+x-6=0$, $x_1=2$, $x_2=-3$, тогда

Правило раскрытия неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Чтобы раскрыть неопределённость данного вида необходимо разложить числитель и знаменатель на множители, и сократить под знаком предела.

$$\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{2\cdot 2+5}{2+3}=\frac{9}{5}=1{,}8.$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2-5x+6\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\frac{2}{-1}=-2.$$

При разложении числителя на множители воспользовались правилом деления многочлена на многочлен «углом». Так как число x=1 является корнем многочлена x^3–6x^2+11x–6 (то есть надо числитель и знаменатель дроби разделить на (x-a), то при делении получим:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3-x^2\qquad\qquad\;\;} & x^2-5x+6 \\
-5x^2+11x-6 & \\
-\underline{-5x^2+5x\qquad} & \\
6x-6 & \\
-\underline{6x-6} & \\
0 &
\end{array}$$

При разложении знаменателя на множители воспользовались формулой $D=b^2-4ac$, $D>0$,

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

$$x^2-3x+2=0,\ a=1, b=-3, c=2$$

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1,$$

$$x_1=\frac{3+1}{2}=2,\ x_2=\frac{3-1}{2}=1.$$

Тогда, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x+1-1}=\lim\limits_{x\to0}\left(\sqrt{x+1}+1\right)=2.$

Правило раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Чтобы раскрыть неопределённость данного вида необходимо умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю и (или) знаменателю.

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x+1}{4+x^2-7x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}-\frac{5x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}-\frac{7x^3}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}-7}=\frac{2-0+0}{0+0-7}=-\frac{2}{7}.$$

Правило раскрытия неопределённости вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Чтобы раскрыть неопределённость данного вида необходимо разделить выражение почленно на самую высокую степень x, встречающуюся в членах дроби,
или
если предел двух многочленов

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+k_1x+l_1}{a_2x^m+b_2x^{m-1}+\ldots+k_2x+l_2},$$

тогда $\begin{cases} 0, \textit{ если } n \prec m, \\ \frac{a_1}{a_2}, \textit{ если } n = m, \\ \infty, \textit{ если } n \succ m. \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{2}{\infty}=0.$$

Правило раскрытия неопределённости вида $(\infty-\infty)$

Чтобы раскрыть неопределённость данного вида необходимо умножить и разделить на выражение сопряженное данному

Определение 6.2. Выражения вида:

1) бесконечно малая деленная на бесконечно малую $\left(\frac{0}{0}\right)$

2) бесконечно большая деленная на бесконечно большую $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$;

3) бесконечно большая минус бесконечно большая (∞-∞);

4) бесконечно малая умноженная на бесконечно большую ($0\cdot\infty$);

5) бесконечно малая в степени бесконечно большой (0^{∞});

6) бесконечно большая в степени бесконечно малой (∞^{0});

7) бесконечно малая в степени бесконечно малой (0^{0});

8) переменная, стремящаяся к единице в степени бесконечно большой (1^{∞}).

называются *неопределённостями*, которые раскрываются с помощью теории пределов.

Задания для практических занятий

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 4}(\frac{1}{2}x^3 - x + 2)$;

2. $\lim\limits_{x\to 2.5}\sqrt{4x-1}$;

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$;

13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

3. $\lim\limits_{x\to 6}[x\sqrt{x^2-20}-\lg(x+\sqrt{x^2-20})]$;

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-5}{x^2-7x+12}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

8. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{(3x+1)(x-1)^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$;

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$;

14. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x+2}{x^2-x+1}$;

16. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

17. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{x^3-8}\right)$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2-3x+6}-\sqrt{5x-9}}$;

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)$;

22. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+3}-x\right)$.

Задания для самостоятельной работы

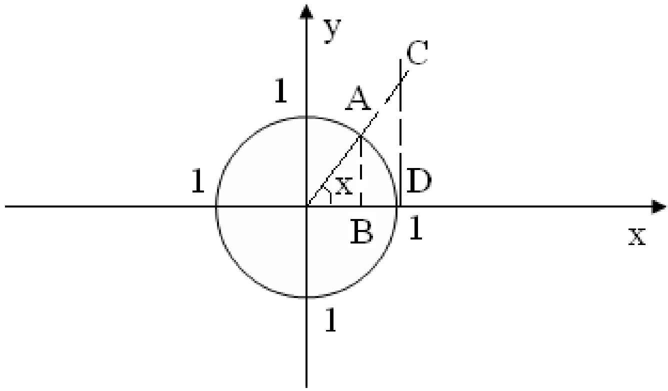
Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{4x^2+x-5}$;
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$;
3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$;
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x-12}{-6x^2+x-5}$;
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^4+5x^2-3}$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$;
7. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2}$;
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$;
9. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$;
10. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

§ 7 Первый замечательный предел

Выражение $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$ является неопределенностью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Для раскрытия этой неопределенности воспользуемся единичной окружностью (R=1). Построим центральный угол x (x - радианная мера угла; $0<x<\pi/2$) $\angle x = AOД$ и пусть AB – длина перпендикуляра, опущенного из точки A на радиус $OД$, и $CД$ – отрезок касательной к окружности, проведенной в точке $Д$ до точки пересечения ее с продолженным радиусом OA.



Тогда AB – линия синуса ($AB=sin\ x$); дуга AD ($\cup$ AD) соответствует углу x; CD – линия тангенса ($CD=tg\ x$). Из определения и геометрических соображений получаем неравенства:

$$AB<\cup AD<CD, \text{ то есть}$$
$$sin\ x<x<tg\ x,$$

Разделим эти неравенства на sinx: $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$

и запишем величины обратные этим неравенствам:

$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$.

Переходим к пределу в этом неравенстве при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0} 1>\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}>\lim_{x\to 0}\cos x$$

На основании теорем:

1. Неравенства в пределе сохраняются или переходят в равенства, то есть если $x<y$, то $lim\ x\leq lim\ y$.

2. Если выполняются неравенства $x<y<z$ и $lim\ x=lim\ z=a$, то $lim\ y=a$, (a-$const$).
Получаем следующую формулу:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{7.1}$$

Первый замечательный предел – предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице; или предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю.

Используя полученный предел, можно записать следующие формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1 \tag{7.2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1 \tag{7.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1 \tag{7.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1 \tag{7.5}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k \tag{7.6}$$

Примеры:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5,$$

сначала получили значение переменной в знаменателе такое же, что и под знаком синуса, а затем применили первый замечательный предел.

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{x}}{\frac{\sin 4x}{x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0,5.$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=6\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=6\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 3x}{x}}=6\cdot\frac{1}{3}=2.$$

$$4.\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\sin\frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{x}{2}=0.$$

$$5.\ \lim_{x\to 0}\frac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2\cos^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}=0,25.$$

$$6.\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sin(x-2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{\sin(x-2)}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

$$7.\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-x}\right)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)\sin 4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)\sin 4x}=$$

$$=\frac{1}{4(1+1)}=\frac{1}{8}=0{,}125.$$

§ 8. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, где $n\in$ 1,2,…. При неограниченном возрастании n получим неопределённость вида $\left[1^\infty\right]$.

Составим таблицу нескольких значений для n.

Таблица 8.1 – Значения n для последовательности $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

n	1	2	10	100	1000	10000
$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,594	2,704	2,717	2,718

Члены последовательности при неограниченном возрастании n постоянно возрастают, оставаясь больше 2, но меньше 3. Таким образом, последовательность есть ограниченная монотонная переменная, которая имеет предел меньше 3. Этот предел обозначается буквой e. Тогда получаем формулу:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[1^\infty\right]=e \qquad (8.1)$$

e = 2,7182818… - есть число иррациональное.

Если $n=\dfrac{1}{\alpha}$, $n\to\infty$, $\alpha\to 0$, тогда второй замечательный предел запишется:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[1^\infty\right]=e. \qquad (8.2)$$

Примеры*:*

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}=e\cdot1=e.$$

2. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{2}=e^{2}.$$

3. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}=e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^{4}}.$$

4. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n-2}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}=e^{5}\cdot1=e^{5}.$$

5. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+2}{n-2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n}=\left[1^{\infty}\right]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n-2+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{n-2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-2}\right)^{2}=e^{2}\cdot 1=e^{2}.$$

6. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-1}\right)^{n+3}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+4}{n-1}\right)^{n+3}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{4}\cdot\frac{4\cdot(n+3)}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{4n+12}{n-1}}=e^{4}.$$

7. $$\lim_{n\to 0}(1+n)^{\frac{3}{n}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to 0}\left((1+n)^{\frac{1}{n}}\right)^{3}=e^{3}.$$

8. $$\lim_{n\to 2}(2n-3)^{\frac{1}{n-2}}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{n\to 2}(1+2n-4)^{\frac{1}{2n-4}\cdot\frac{2n-4}{n-2}}=\lim_{n\to 2}e^{\frac{2(n-2)}{n-2}}=e^{2}.$$

Запишем формулы, вытекающие из второго замечательного предела:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^{mn}=e^{km} \tag{8.3}$$

$$\lim_{n\to 0}(1+kn)^{\frac{1}{n}}=e^{k} \tag{8.4}$$

Задания для практических занятий

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 10x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{3n+5}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2}$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n}$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{n-1}$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+3}\right)^{4-n}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x-2)}{x-1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{\sin 3x}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{2x^2}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2\cos x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} sin3x\cdot ctg5x$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$;

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-3}{5n+4}\right)^{3n-1}$;

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$;

19. $\lim\limits_{n\to 0}(1-n)^{\frac{2}{n}}$;

20. $\lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{4-n}{n}}$.

Задания для самостоятельной работы

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{3}}{x^2}$;

2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin(1-2x)}{1-4x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} tg2x\cdot ctg4x$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{4n-1}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-2}{3n+4}\right)^{5n+1}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2+2}\right)^{n^2-3}$.

§ 9 Сравнение бесконечно малых функций

Пусть при $x\to a$ $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$ - бесконечно малые функции.

1. Если выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=0,$ то говорят, что α - есть *бесконечно малая высшего порядка* по отношению к бесконечно малой β. *Замечание:* в приближенных вычислениях бесконечно малыми высших порядков можно пренебречь.

2. Если выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0, (A\in R),$ то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*

3. Если выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta^k}=A\neq 0,$ то α называется бесконечно малой *к-го порядка* относительно бесконечно малой величины β.

4. Если выполняется равенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=1,$ то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными* бесконечно малыми. В этом случае обе функции стремятся к нулю примерно с одинаковой скоростью. Эквивалентные бесконечно малые будем обозначать $\alpha\sim\beta$.

Примеры:

1. Пусть $\alpha=x^2$, $\beta=5x$. Функции являются бесконечно малыми при $x\to 0$. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5}=0.$ Следовательно, α – бесконечно малая высшего порядка относительно β.

2. Пусть $\alpha=x^2-4$, $\beta=x^2-5x+6$ – бесконечно малые при $x\to 2$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-3}=-4$. Поэтому α и β одного порядка.

3. $\alpha=tg2x$, $\beta=2x$ – бесконечно малые при $x\to 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x\cdot\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=1.$ Следовательно, $\alpha\sim\beta$.

4. $\alpha=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $\beta=\dfrac{1}{n}$ – бесконечно малые при $n\to\infty$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ – этот предел не существует. Поэтому говорят, что функции α и β не сравнимы.

При вычислении пределов полезно помнить о следующем свойстве эквивалентных бесконечно малых функций.

Теорема 9.1. Пусть α и β – бесконечно малые функции при $x\to a$. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha}{\beta}=A\neq 0$, и $\alpha\sim\alpha_1$, $\beta\sim\beta_1$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}=A$, то есть, если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится, если каждую из бесконечно малых заменить эквивалентной бесконечно малой.

$\sin x\sim x$	$\arcsin x\sim x$
$tgx\sim x$	$arctgx\sim x$
$1-\cos x\sim x^2/2$	$\log_a(1+x)\sim x/\ln a$

$ln(1+x) \sim x$ $\quad\quad$ $(1+x)^m - 1 \sim mx$, $m>0$, в частности,

$$\sqrt{1+x} - 1 \approx \frac{x}{2}$$

$a^x - 1 \sim x\ln a$ $\quad\quad$ $e^x - 1 \sim x$

Примеры*:*

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 3x}{1-\cos x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot 9x^2}{x^4/2}=18.$$

$$2.\ \lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(x^2-7x+11\right)}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left(1+x^2-7x+10\right)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x-2\right)\left(x-5\right)}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(x-5\right)=-3.$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{\sin 3x+tgx}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\left(e^x-1\right)}{3x+x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-x}{4x}=\frac{1}{4}=0,25.$$

Задания для практического занятия

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x^2}{16x^4}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+7x^2}{\sin 2x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\arcsin 3x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1-6x)}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-1}{3^x-1}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{x}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\sin 3x\sin 5x}{\sin x^3}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(x-2)}{x^2-2x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\cdot\left(e^x-1\right)}{\cos x-\cos 3x}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x+8\sqrt{x}\right)\ln\left(1+\arcsin\sqrt{x}\right)}{tg2x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin5x}{tg10x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x^2}{\arcsin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-2}-1}{\ln(3-x)}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{2x}}{\sin 7x-\sin 3x}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\ln^2(1+2x)}{(1-\cos x)tg4x}$.

§ 10 Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

При изучении различных явлений природы и решении технических задач, а, следовательно, и в математике приходится рассматривать изменение одной величины в зависимости от изменения другой. Например, при рассмотрении движения пройденный путь рассматривается как величина, зависящая от времени.

Определение 10.1. *Функцией* называется закон, по которому элементом одного множества ставятся в соответствие элементы другого множества (A, B – множества, f – закон, тогда функция $A \xrightarrow{f} B$).

Определение 10.2. *Числовой функцией* называется закон, по которому каждому значению элемента $x \in X$ ставится в соответствие $y \in Y$ и обозначается $y=f(x)$, где x – независимая переменная, аргумент; y – зависимая переменная, функция; f – закон соответствия.

Множество X – это множество задания или существования (определения) функции и называется *основным*, так как, зная его, можно найти область изменения функции Y.

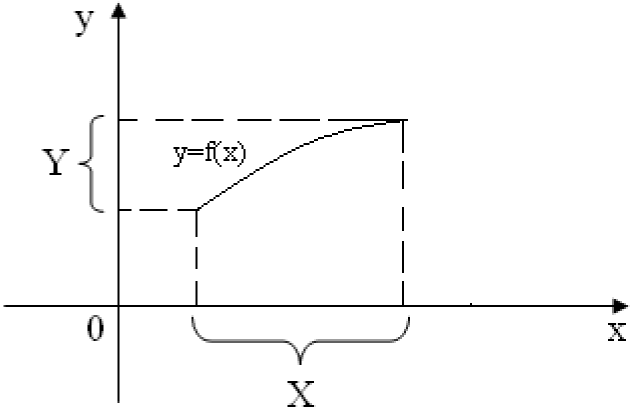
При нахождении области определения нужно помнить, что если:

1) $y=\sqrt{U}$, то $U \geq 0$;

2) $y=\dfrac{a}{U}$, то $U \neq 0$;

3) $y=\log_a x$, то $x>0$.

Определение 10.3. *Графиком функции $y=f(x)$* называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости.



где $x \in X$ – область определения (абсцисса), $y \in Y$ – область изменения (ордината); *x, y* – координаты точек кривой.

Таким образом, аналитическая геометрия служит геометрической интерпретацией математического анализа.

Функции бывают: *однозначные; обратные; сложные.*

Определение 10.4. Функция называется однозначной, если каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции.

Определение 10.5. Если за аргумент принять переменную *y*, а за функцию *x*, то функция $x=\varphi(y)$ называется обратной.

Так, если $y=x^n$, то $x = \sqrt[n]{y}$ - обратная функция.

Определение 10.6. Если $y=f(x)$, а $x=\varphi(U)$, то $y=f(\varphi(U))$ – сложная функция.

Функции могут быть заданы различными способами: аналитическим, графическим, табличным, словесным.

1. *Аналитический способ*. Функция задается в виде одной или нескольких формул, или уравнений.

2. *Графический способ.* Функция задается с помощью графика

3. *Табличный способ.* Функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции

4. *Словесный способ.* Функция задается с помощью определенного алгоритма.

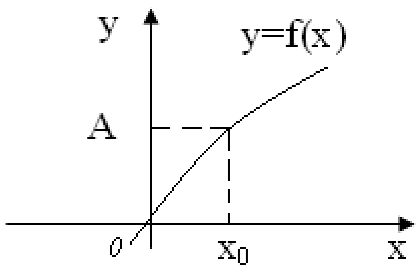
Определение 10.7. Число A называется *пределом* функции $y=f(x)$ в точке x_0, если найдется такая дельта δ - окрестность этой точки, что для любого $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$ будет выполняться неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

где ε- наперед заданное, сколь угодно малое положительное число.

Этот факт записывается:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$



Замечание 1. В общем случае число A не совпадает со значением функции в предельной точке x_0.

Замечание 2. Выражение «предел функции в точке x_0» часто заменяют выражением «предел функции при x стремящемся к x_0».

Определение 10.8. Если аргумент x стремится к x_0 ($x \to x_0$) слева, то предел функции $y=f(x)$ называется *левым* или *левосторонним* и обозначается $f(x_0-0)$

Таким образом, по определению:

$$f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\prec x_0}} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

Аналогично понятие правого или правостороннего предела функции $y=f(x)$ в точке x_0:

$$f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ x\succ x_0}} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

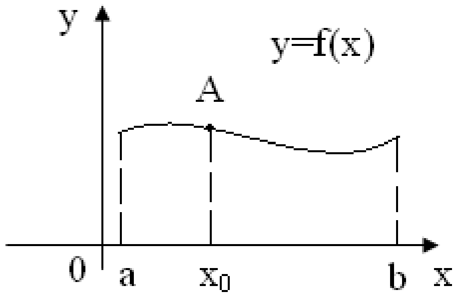
Замечание 3. Левый и правый пределы функции в точке объединяются под одним названием *односторонние* пределы.

Пример. Найти односторонние пределы функции $y=\dfrac{x}{x-4}$ при $x\to 4$

Находим левосторонний предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} y=\lim\limits_{x\to 4-0} y=\lim\limits_{x\to 4-0}\dfrac{x}{x-4}=-\infty,$ так как при $x\to 4$ знаменатель стремится к 0, оставаясь отрицательным.

Находим правосторонний предел $\lim\limits_{x\to 4+0} y=\lim\limits_{x\to 4+0}\dfrac{x}{x-4}=+\infty,$ так как знаменатель стремится к 0, оставаясь положительным.

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что её графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y=f(x)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции: если независимая переменная x приближается к точке x_0, то значение функции $y=f(x)$ неограниченно приближается к значению функции в точке x_0, т.е. к $f(x_0)$.



Как видно предел функции *f(x)* в точке x_0 равен отрезку от точки *A* до x_0, то есть значению функции в точке x_0.

Дадим строгое определение непрерывности функции. Итак, пусть имеем функцию $y=f(x)$.

Определение 10.9. *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и в некоторой окрестности, содержащей x_0 и*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{10.1}$$

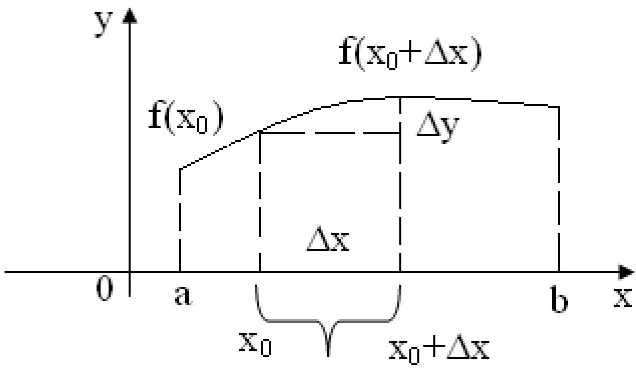
Таким образом, можно сказать, что функция непрерывна в точке x_0, если выполнены три условия:

1) она определена в точке x_0 и в некоторой её окрестности;
2) имеет предел при $x \to x_0$;
3) этот предел равен значению функции в точке x_0.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции, опираясь на понятия приращения аргумента и функции.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале $(a;\ b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a;\ b)$. Для любого $x \in (a;\ b)$ разность x-x_0 называется *приращением аргумента x в точке x_0* и обозначается Δx («дельта x»): $\Delta x = x - x_0$. Отсюда $x = x_0 + \Delta x$.

Разность соответствующих значений функций $f(x)$-$f(x_0)$ называется *приращением функции $f(x)$ в точке x_0* и обозначается Δy (или Δf или $\Delta f(x_0)$): $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ или $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Очевидно, приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Запишем равенство (10.1) в новых обозначениях. Так как условия $x \to x_0$ и x-$x_0 \to 0$ одинаковы, то равенство (1) принимает вид $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке. Сформулируем определение.

Определение 10.10. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняется равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, то есть достаточно малому приращению аргумента соответствует достаточно малое приращение функции.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию $y=2^x$. $x\in(-\infty;\ \infty)$. Дадим аргументу x приращение Δx, получим значение аргумента $x+\Delta x$. Наращенное значение функции: $2^{x+\Delta x}$.

Вычислим приращение функции $\Delta y=2^{x+\Delta x}-2^x=2^x(2^{\Delta x}-1)$.

Вычислим предел приращения функции при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2^x(2^{\Delta x}-1)=2^x(2^0-1)=2^x(1-1)=0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

то есть показательная функция $y=2^x$ непрерывна в любой точке $x\in(-\infty;\ \infty)$.

Определение 10.11 (на языке односторонних пределов). Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняется равенство:

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \text{ или}$$

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x) \qquad (10.2)$$

Теорема. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $\varphi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ тоже непрерывна в точке x_0.

Следствия:

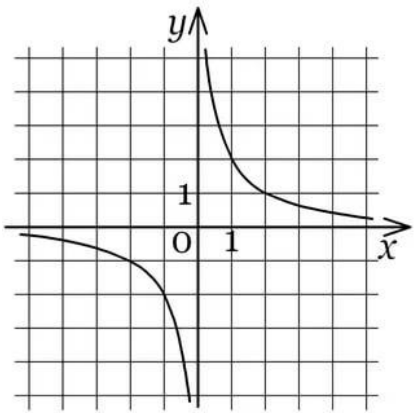
1) произведение двух непрерывных функций в точке x_0 есть функция непрерывная;

2) частное двух непрерывных функций в точке x_0 есть функция непрерывная;

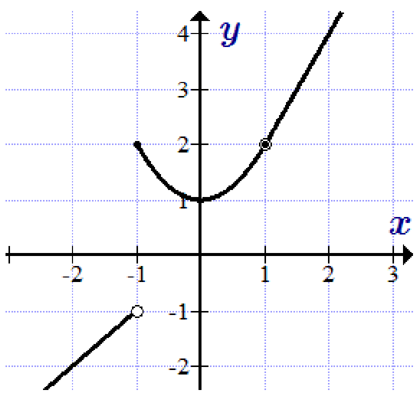
3) если функция $U=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(U)$ непрерывна в точке $U_0=f(x_0)$, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ тоже непрерывна в точке x_0.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

Если рассмотреть изображенный график, в окрестности точки x= 0, то ясно видно, что он как бы «разрывается» на отдельные кривые.



Аналогично можно видеть на следующем изображении, что график «разрывается» в окрестности точки x=-1.



Говорят, что во всех указанных точках соответствующие функции становятся разрывными.

Точка x_0 называется *точкой разрыва функции $y=f(x)$*, если она принадлежит области определения функции или её границе и не является точкой непрерывности. В этом случае говорят, что при $x=x_0$ функция разрывна.

Определение 10.12. Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y=f(x)$, если в ней не выполняется хотя бы одно из равенств (*).

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода.

Определение 10.13. Точка разрыва функции $y=f(x)$ называется точкой разрыва первого рода, если левый и правый пределы функции в точке x_0 существуют, конечны, но равенство (*) не выполняется.

При этом если односторонние пределы равны между собой, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*; если не равны, то точка x_0 – *точка конечного разрыва*.

Определение10.14. *Скачком* функции $y=f(x)$ в точке разрыва x_0 называется разность между правым и левым пределами функции в точке x_0, то есть $f(x_0+0)-f(x_0-0)=h$.

Если это число положительное, то скачок вверх; если отрицательное, то скачок вниз.

Пример. Исследовать на непрерывность функцию

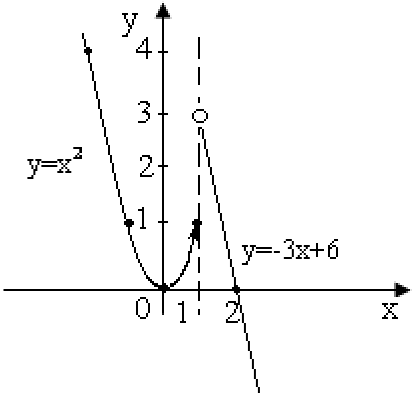
$$y=\begin{cases} x^2, \textit{ если } x\le 1, \\ -3x+6, \textit{ если } x\succ 1 \end{cases}$$

Функции $y=x^2$ и $y=-3x+6$ непрерывны в области определения, но точка $x=1$ – точка изменения аналитического выражения функции, то есть является «подозрительной».

Вычислим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 1-0} x^2=1,\ \ \lim\limits_{x\to 1+0}(-3x+6)=3,\ \ f(1)=1.$

Равенство (10.2) не выполняется, так как левый и правый пределы конечны, но не равны между собой, то есть

$\lim\limits_{x\to 1-0} y \neq \lim\limits_{x\to 1+0} y$, то точка x=1 – точка разрыва первого рода. Скачок функции $h = \lim\limits_{x\to 1+0} y - \lim\limits_{x\to 1-0} y = 3-1=2$.



Определение10.15. Точка разрыва x_0 функции $y=f(x)$ называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из ее односторонних пределов $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$ не существует или равен бесконечности, и тогда скачок бесконечен.

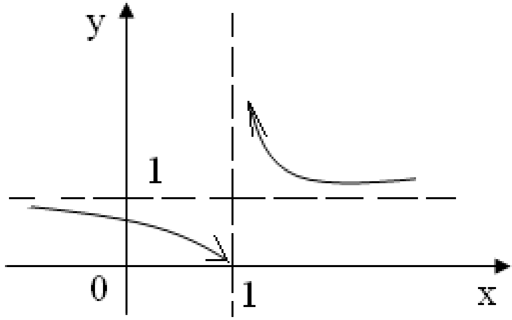
Пример. Исследовать на непрерывность функцию $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$.

Из школьного курса известно, что показательная функция непрерывна на всей числовой прямой. Но точка x=1 является «подозрительной», так как знаменатель показательной функции обращается в ноль. Вычислим односторонние пределы при $x \to 1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} 3^{\frac{1}{x-1}} = 0$, так как при x <1 знаменатель стремится к нулю оставаясь отрицательным; $3^{\frac{1}{-0}} = \dfrac{1}{3^{\frac{1}{0}}} = \dfrac{1}{3^{\infty}} = 0$.

$\lim\limits_{x\to 1+0} 3^{\frac{1}{x-1}} = \infty$, т.к. при x>1 знаменатель дроби стремится к нулю, оставаясь положительным; $3^{\frac{1}{0}} = 3^{\infty} = \infty$.

Таким образом, x=1 – точка разрыва второго рода. y=1 - асимптота функции.



Задания для практического занятия

Исследовать на непрерывность и построить схематический график функций. Определить вид точек разрыва:

1) $y = \begin{cases} 1 + x, x\, J\, 0 \\ 1 - x^2, x > 0 \end{cases}$

4) $y = \begin{cases} x^2, xJ - 1 \\ x - 3, -1 < x\, J\, 4 \\ \frac{4}{x}, x > 4 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} x^2, x\, J\, 0 \\ \frac{1}{x-1}, x > 0 \end{cases}$

5) $y = \begin{cases} 7x + 5, x\, J - 1 \\ 3 - x^2, -1 < xJ\, 3 \\ 1 - x, x > 3 \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x - 1, xJ - 1 \\ 4x, -1 < x\,J\,3 \\ \frac{1}{x}, x > 3 \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x < 1 \\ x, 1J\,x < 2 \\ 3, 2J\,x < 3 \end{cases}$

Задания для самостоятельной работы

Исследовать на непрерывность и построить схематический график функций. Определить вид точек разрыва:

1) $y = \begin{cases} 2x - 2, x\,J\,1 \\ 2x + 2, x > 1 \end{cases}$ 4) $y = \begin{cases} -x, x < 0 \\ x^3, 0\,J\,x < 2 \\ 3, x > 2 \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, x\,J\,1 \\ 2x, x > 1 \end{cases}$ 5) $y = \begin{cases} x + 1, x < -1 \\ 2, -1J\,xJ\,1 \\ 2\sqrt{x}, x > 1 \end{cases}$

3) $y = \begin{cases} x + 1, x < 0 \\ (x + 1)^2, 0 < xJ\,2 \\ -x + 4, x > 2 \end{cases}$ 6) $y = \begin{cases} -2x, x < -1 \\ x^2 + 1, -1J\,xJ\,2 \\ x - 1, x > 2 \end{cases}$

Ответы на задания для практических занятий

§ 6 Предел переменной величины. Основные теоремы о пределах

1) 30;
2) 3;
3) 23;
4) ∞;
5) -6;
6) 3;
7) 12;
8) $-\frac{9}{4}$;
9) ∞;
10) $-\frac{1}{3}$;
11) -9;
12) $\frac{9}{16}$;
13) -0,5;
14) $\frac{2}{3}$;
15) ∞;
16) 0;
17) ∞;
18) 0,5;
19) 4,5;
20) -6;
21) 0;
22) -2.

§ 8 Второй замечательный предел

1) 7;
2) 4;
3) 0,5;
4) 0,5;
5) 4;
6) 2;
11) $\frac{1}{e^3}$;
12) $\frac{1}{e^2}$;
13) $\frac{1}{e}$;
14) e^2;
15) e^5;
16) e;

7) $\frac{1}{3}$;

8) 4,5;

9) 1;

10) 0,6;

17) $\frac{1}{\sqrt[5]{e^{21}}}$;

18) $\sqrt{e}$;

19) $\frac{1}{e^2}$;

20) e^4.

§ 9 Сравнение бесконечно малых функций

1) 2,5;

2) $\frac{2}{3}$;

3) 0,5;

4) 1,5;

5) $\frac{2}{3}$;

6) $-\frac{1}{3}$;

7) $\log_3 7$;

8) 3,5;

9) 15;

10) 0,5;

11) 0,25;

12) 4.

Ответы на задания для самостоятельной работы

§ 6 Предел переменной величины. Основные теоремы о пределах

1) 0;
2) 2;
3) $\frac{13}{8}$;
4) $-\frac{1}{6}$;
5) 0;
6) -0,5;
7) 8;
8) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$;
9) 0;
10) 1,5.

§ 8 Второй замечательный предел

1) $\frac{1}{9}$;
2) 0,5;
3) 0,5;
4) 0,5;
5) e^8;
6) $\frac{1}{e^4}$;
7) $\frac{1}{e^{10}}$;
8) $\frac{1}{e}$.

§ 9 Сравнение бесконечно малых функций

1) 0,5;
2) 4;
3) 0;
4) -1;
5) $\frac{3}{4}$;
6) 10.

Справочный материал

Формулы сокращенного умножения

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$

2) $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$

4) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot\left(a^2 \mp ab + b^2\right).$

Формулы тригонометрии

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если пределы конечного числа переменных существуют, то существует предел их суммы (разности), равный сумме (разности) этих пределов:

$$\lim(y_1 \pm y_2) = \lim y_1 \pm \lim y_2.$$

Теорема 2. Если существуют пределы переменных величин y_1 и y_2, то существует и предел их произведения, равный произведению этих пределов:

$$\lim(y_1 \cdot y_2) = \lim y_1 \cdot \lim y_2.$$

Теорема 3. Если существуют пределы переменных величин y_1 и y_2, то существует предел их частного, равный частному пределов этих переменных:

$$\lim \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lim y_1}{\lim y_2} \ (\lim y_2 \neq 0).$$

Следствия:

1. Предел постоянной величины равен самой постоянной:

$$\lim C = C, \ (C\text{-}const)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, то есть:

$$\lim C \cdot x = C \cdot \lim x.$$

3. Если существует предел переменной величины x, то существует предел степени этой величины, равный степени ее предела, то есть:

$$\lim x^n = \left(\lim x\right)^n.$$

4. Если существует предел переменной величины y, то существует предел корня из этой переменной, равный корню предела величины, то есть:

$$\lim \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{\lim y}.$$

5. Если существует предел переменной величины z, то существует предел логарифма этой переменной, равный логарифму предела величины, то есть:

$$\lim \log_a z = \log_a \lim z.$$

Правила раскрытия неопределённостей

1. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ нужно разложить числитель и знаменатель на множители, и сократить под знаком предела.

2. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ нужно разделить выражение почленно на самую высокую степень x, встречающуюся в членах дроби.

Если предел двух многочленов

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_1 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + k_1 x + l_1}{a_2 x^m + b_2 x^{m-1} + \ldots + k_2 x + l_2},$$

тогда $\begin{cases} 0, \textit{ если } n \prec m, \\ \dfrac{a_1}{a_2}, \textit{ если } n = m, \\ \infty, \textit{ если } n \succ m. \end{cases}$

3. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю и (или) знаменателю.

4. Чтобы раскрыть неопределённость вида $\left[\infty-\infty\right]$ нужно умножить и разделить на выражение, сопряженное данному.

Первый замечательный предел

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1,$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\left[1^{\infty}\right]=e\ ,$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left[1^{\infty}\right]=e,$$

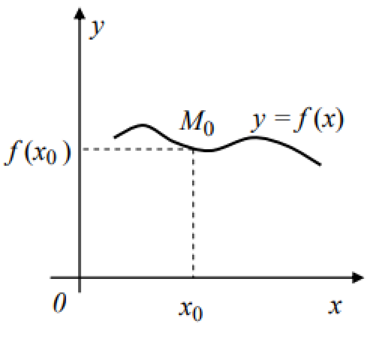
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}=e^{km},$$

$$\lim_{n\to 0}\left(1+kn\right)^{\frac{1}{n}}=e^{k}.$$

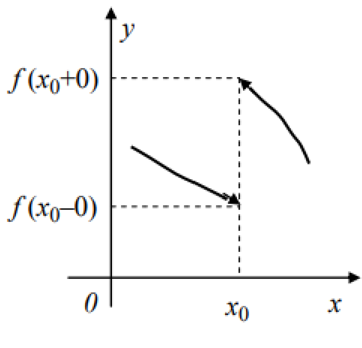
Таблица эквивалентностей

$\sin x \sim x$	$\arcsin x \sim x$
$tgx \sim x$	$arctgx \sim x$
$1-\cos x \sim x^2/2$	$\log_a(1+x) \sim x/\ln a$
$\ln(1+x) \sim x$	$(1+x)^m-1 \sim mx$, $m>0$, в частности, $\sqrt{1+x}-1 \approx \dfrac{x}{2}$
$a^x-1 \sim x\ln a$	$e^x-1 \sim x$

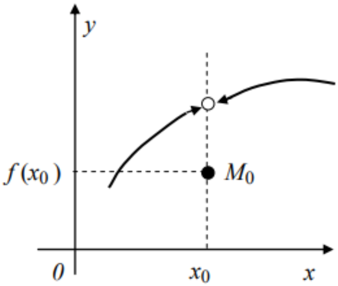
Непрерывность функции в точке. Точки разрыва и их классификация



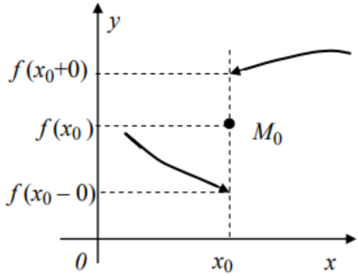
(Функция непрерывна)



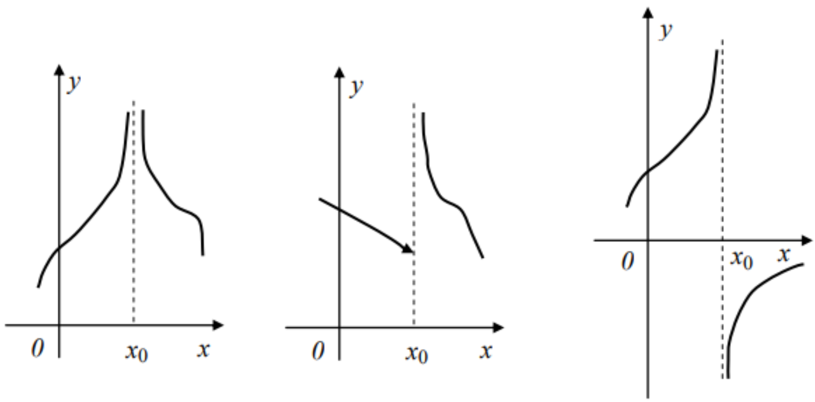
(Функция имеет разрыв)



Устранимый разрыв ***первого*** рода



Неустранимый разрыв ***первого*** рода

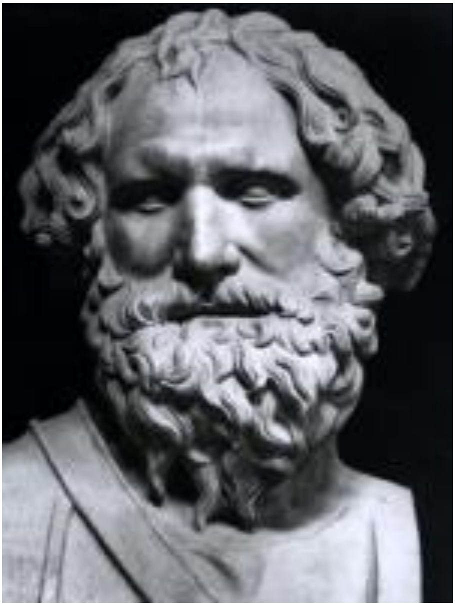


Разрыв ***второго*** рода

Вопросы для самопроверки

1. Что такое числовая последовательность?
2. Дайте определение предела функции. Может ли функция в точке иметь два предела?
3. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
4. Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой функций. Какая между ними существует связь?
5. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы.
6. Дайте определение функции, области определения функции.
7. Укажите способы задания функции, особенности каждого из этих способов.
8. Дайте определение левостороннего и правостороннего пределов функции.
9. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке.
10. Что называется точкой разрыва функции? Приведите примеры.
11. Дайте определение точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода.

Историческая справка



Архимéд (Ἀρχιμήδης)
около 287–212 г. до н. э.

Древнегреческий ученый, математик и механик. Архимед – пионер математической физики. Один из создателей механики как науки. Ему принадлежат различные технические изобретения. Основной темой математических работ Архимеда являются задачи на нахождение площадей поверхностей и объемов различных фигур и тел. Архимед построил небесную сферу – механический прибор, на котором можно было наблюдать движения планет, фазы Луны, солнечные и лунные затмения.

Коши Огюстен Луи
(21.08.1789 г. –23.05.1857 г.)

Французский математик, иностранный почётный член Петербургской академии наук (с 14.12.1831 г.), член Парижской академии наук (1816 г.). Окончил Политехническую школу (1807 г.) и Школу мостов и дорог (1810 г.) в Париже. В 1810—1813 гг. работал инженером в Шербуре. В 1816-1830 гг. преподавал в Политехнической школе и в Коллеж де Франс, с 1848 г. — в Парижском университете и в Коллеж де Франс. Труды Коши относятся к различным областям математики (главным образом к математическому анализу) и математической физики.

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм
(31.10.1815 г.–19.02.1897 г.)

Немецкий математик, иностранный член-корреспондент (с 04.12.1864 г.) и иностранный почетный член (с 02.12.1895 г.) Петербургской академии наук - Физико-математическое отделение (по математическому разряду). С 1856 г. профессор Берлинского университета. Изучал юридические науки в Бонне и математику в Мюнстере. Исследования Вейерштрасса посвящены математическому анализу, теории функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии и линейной алгебре.

Ньютон Исаак
(04.01.1643 г.–31.03.1727 г.)

Английский физик и математик, создавший теоретические основы механики и астрономии, открывший закон всемирного тяготения, разработавший дифференциальное и интегральное исчисление, изобретатель зеркального телескопа и автор важнейших экспериментальных работ по оптике.

Джон Ва́ллис
(23.11.1616 г. – 28.10.1703 г.)

Валлис получил известность как английский математик, стоявший у истоков математического анализа. Среди научных достижений Валлиса следует выделить его работы, посвященные математическому анализу, геометрии, тригонометрии, теории чисел. В 1655 году выходит в свет его трактат «Арифметика бесконечного». В нём помимо всего прочего в научный обиход был введен символ бесконечности. Продолжением данного трактата явился труд под названием «Трактат о конических сечениях».

Больцано Бернард
(05.10.1781 г.—18.12.1848 г.)

Чешский математик, философ, теолог. Много работая над логическими основами математического анализа, Больцано первый (1817 г.) выдвинул идею арифметической теории действительного числа.

Список литературы

1. Богомолов, Н. В. Математика: учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Юрайт, 2020. — 401 с. — ISBN 978-5-534-07001-9 // ЭБС Юрайт: [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449938.

2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1: учебное пособие / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Юрайт, 2020. — 439 с. — ISBN 978-5-534-07535-9 // ЭБС Юрайт: [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/451746.

3. Высшая математика: учебник и практикум / М. Б. Хрипунова [и др.]; под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. — Москва : Юрайт, 2020. — 478 с. — ISBN 978-5-9916-9067-6 // ЭБС Юрайт: [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/450527.

4. Гисин, В. Б. Математика. Практикум: учебное пособие / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. — Москва Юрайт, 2020. — 204 с. — ISBN 978-5-9916-8785-0 // ЭБС Юрайт: [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/450819.

5. Унинский, А. П. Введение в математический анализ / А. П. Унинский. – Благовещенск : Изд-во ДальГАУ, 1998. – 45 с.

6. Фролова Г. Н., Штопка А. Д. Предел. Непрерывность функций: Учебное пособие / Г. Н. Фролова, А. Д. Штопка. – Благовещенск : Изд-во ДальГАУ, 2006. – 124 с.

Учебное издание

Подолько Евгения Александровна

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 12.03.2021. Формат 60х90/16.
Усл. печ. л. 4,14. Уч.-изд. л 1,18. Печать по требованию.
Заказ 11–21

Дальневосточный государственный аграрный университет
г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86.