

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. Г. КРЮЧКОВА

***РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ
ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ПО
МАТЕМАТИКЕ***

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2022

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

К85

Рецензент

*Светлана Юрьевна Ланина, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры экономики, управления и технологии
Благовещенского государственного педагогического университета*

*Рекомендовано к использованию в учебном процессе
методическим советом электроэнергетического факультета
Дальневосточного государственного аграрного университета*

К85 Крючкова, Л. Г. Руководство к решению тестовых задач по математике : учебное пособие / Л. Г. Крючкова ; Дальневост. гос. аграр. ун-т. Изд. 2-е. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2022. – 171 [1] с.

В учебном пособии представлено краткое содержание основного теоретического материала, подробное решение тестовых заданий и тесты для самостоятельного решения. В соответствии с изменениями в рабочей программе по математике, по сравнению с первой редакцией учебного пособия, изменены разделы учебного пособия, а также дополнены тестовые задания.

Предлагаемое пособие разработано для обучающихся инженерно-технических и экономических направлений бакалавриата очной и заочной форм обучения.

УДК 51(075.8)

ББК 22.1

© Крючкова Л. Г., 2022

© ФГБОУ ВО Дальневосточный

государственный аграрный университет, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	5
1 Линейная алгебра	6
1.1 Определители второго, третьего порядка.....	6
1.2 Системы линейных уравнений. Формулы Крамера	8
1.3 Матрицы.....	10
1.4 Теорема Кронекера-Капелли	17
1.5 Метод Гаусса	19
Примеры тестовых заданий	20
2 Введение в математический анализ	28
2.1 Понятие множества и операции над множествами	28
2.2 Понятие и область определения функций.....	29
2.3 Предел числовой последовательности и предел функции. Основные теоремы о пределах	30
2.4 Основные приемы раскрытия неопределенностей. Первый и второй замечательный предел.....	32
2.5 Непрерывность функции в точке и точки разрыва Примеры тестовых заданий	37
3 Дифференциальное исчисление функции одной переменной	44
3.1 Производная и дифференциал	44
3.1.1 Дифференцирование явных функций	44
3.1.2 Дифференцирование показательно-степенной функции.....	46
3.1.3 Дифференцирование неявных функций	47
3.1.4 Дифференцирование функций, заданных параметрически.....	47
3.1.5 Приложения производной к задачам геометрии	48
3.1.6 Механический смысл производной	50
3.1.7 Экономический смысл производной	50
3.1.8 Производные высших порядков.....	53
3.1.9 Дифференциалы первого и высших порядков.....	54
3.2 Исследование функции.....	55
3.2.1 Правило Лопиталя.....	55
3.2.2 Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум.....	57

Примеры тестовых заданий.....	64
4 Комплексные числа.....	72
Примеры тестовых заданий.....	76
5 Интегральное исчисление функции одной переменной	81
5.1 Неопределенный интеграл	81
5.2 Определенный интеграл	84
5.2.1 Несобственные интегралы	85
5.2.2 Приложения определенного интеграла	86
Примеры тестовых заданий.....	91
6 Функции нескольких переменных.....	99
6.1 Экстремум функции двух переменных.....	101
6.2 Производная в данном направлении, градиент функции	101
6.3 Приложение функции нескольких переменных к решению экономических задач.....	103
Примеры тестовых заданий.....	106
7 Дифференциальные уравнения.....	112
7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка	112
7.2 Дифференциальные уравнения второго порядка.....	116
Примеры тестовых заданий.....	120
8 Ряды	128
8.1 Числовые ряды	128
8.2 Функциональные ряды	133
Примеры тестовых заданий.....	138
9 Теория вероятностей	145
9.1 Случайные события	145
9.2 Случайные величины	149
Примеры тестовых заданий.....	155
10 Элементы математической статистики	161
Примеры тестовых заданий.....	165
Список рекомендуемой литературы.....	170

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие может использоваться как на практических занятиях, так и для самостоятельного овладения навыками и умениями решения тестовых задач. Пособие содержит следующие разделы: линейная алгебра, введение в математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и элементы математической статистики.

Каждый раздел имеет следующую структуру:

- 1) теоретическая часть: основные определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения по теории, а также методические рекомендации по решению последующих задач;
- 2) подробные решения демонстрационных вариантов тестовых заданий;
- 3) примеры тестовых заданий, которые предлагались или могут быть предложены в будущем при тестировании студентов.

Настоящее пособие предназначено для того, чтобы помочь студентам инженерно-технических и экономических направлений бакалавриата очной и заочной форм обучения подготовиться к тестированию.

1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1 Определители второго, третьего порядка

Определителем второго порядка (детерминантом) называется число, обозначаемое символом $\Delta(\det)$ и получаемое следующим образом:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, где числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – элементы определителя; $a_{11} \cdot a_{22}$ – произведение элементов главной диагонали; $a_{12} \cdot a_{21}$ – произведение элементов побочной диагонали.

В общем случае, число a_{ij} означает элемент определителя, находящийся на пересечении i -ой строки и j -го столбца. Строки и столбцы определителя называются рядами.

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом Δ и получаемое следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} \dots (*)$$

Правило треугольника легко позволяет воспроизвести выражение (*) по схемам 1 и 2.

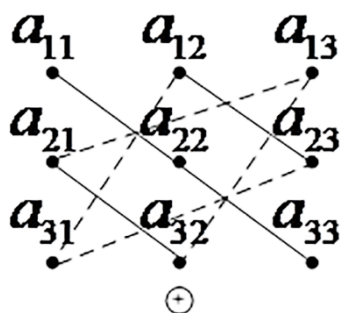


Схема 1

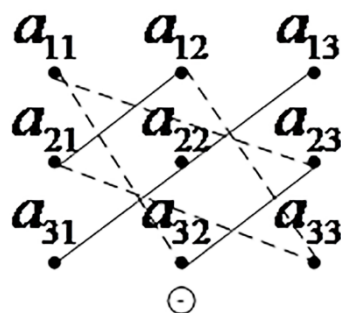


Схема 2

Рисунок 1.1 – Схемы 1 и 2 правила прямоугольника

По схеме 1, произведения соединенных элементов берутся со своим знаком, а по схеме 2 – с обратным.

Пример 1.1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 - 48 + 18 + 8 + 20 = -25$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получаемый из исходного вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка, называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, то есть $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

Свойства определителей:

1. Если в определителе заменить строки столбцами, то определитель не изменится.
2. Если в определителе поменять местами какие-нибудь два ряда, то определитель поменяет знак.
3. Если элементы какого-либо ряда равны нулю, то определитель равен нулю.
4. Если все элементы какого-либо ряда, равны или пропорциональны соответственно элементам другого ряда, то определитель равен нулю.
5. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно выносить за символ определителя.
6. Если элементы какого-либо ряда есть сумма двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \overline{a_{11}} & a_{12} + \overline{a_{12}} & a_{13} + \overline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Если к элементам какого-либо ряда прибавить умноженные на одно и то же число k соответствующие элементы другого ряда, то определитель не изменится:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + k \cdot a_{21} & a_{12} + k \cdot a_{22} & a_{13} + k \cdot a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

8. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их соответствующие алгебраические дополнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

9. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения другого ряда равна нулю:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = 0$$

Указанные свойства справедливы для определителей n -го порядка.

1.2 Системы линейных уравнений. Формулы Крамера

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет вид (1.1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n} \cdot x_n = b_3, \\ \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn} \cdot x_n = b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x_k (k = \overline{1, n})$ – неизвестные величины;

$a_{ij} (i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n})$ – коэффициенты при неизвестных;

$b_n (n = \overline{1, n})$ – свободные члены.

Если все свободные члены $b_n (n = \overline{1, n})$ системы уравнений (1) равны нулю, то система называется **однородной**, в противном случае она называется **неоднородной**. Совокупность чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что каждое уравнение

системы (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_k соответствующими числами α_k : $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ называется **решением системы**.

Система уравнений (1) для которой существует хотя бы одно решение, называется **совместной**, причём если система (1) имеет одно решение, то она называется **определенной**, если же имеет множество решений, то называется **неопределенной**. Система уравнений (1), не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Решение системы (1) может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}; x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$$

где Δ – определитель системы уравнений (1), состоящий из коэффициентов при неизвестных; $\Delta x_k (k = \overline{1, n})$ – определители, получаемые из определителя системы, заменой k -го столбца столбцом из свободных членов.

Исследование системы:

1. Если в формулах Крамера определитель системы $\Delta \neq 0$, то система уравнений (1) имеет одно решение (определена).

2. Если в формулах Крамера определитель системы $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta x_k (k = \overline{1, n})$ не равен нулю, то система не имеет решений (несовместна).

3. Если в формулах Крамера определитель системы $\Delta = 0$ и все определители $\Delta x_k (k = \overline{1, n})$ равны нулю, то система имеет множество решений (неопределенна).

Пример 1.2. Решить систему с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + 3y + 2z = 2, \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

Решение: Вычислим определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Система имеет одно решение. Вычислим $\Delta x, \Delta y, \Delta z$:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0; \Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{2}; y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0; z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{1}{2}$$

1.3 Матрицы

Матрицей называется таблица чисел, состоящая из n строк и m столбцов и обозначаемая:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \right\|,$$

$$A = \|a_{ij}\|, i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$$

где a_{ij} – элемент матрицы, находящийся на пересечении i -ой строки и j -го столбца. Если $n \neq m$, матрица называется **прямоугольной**. Если $n = m$, матрица называется **квадратной** и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Порядок квадратной матрицы определяется числом строк (столбцов).

Определитель, порождаемый квадратной матрицей, обозначается символом:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Две матрицы называются **равными**, если равны соответствующие элементы этих матриц ($a_{ij} = b_{ij}, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$). Если в матрице A заменить строки столбцами, то матрица называется **транспонированной** и обозначается A^T .

Матрицей-строкой называется матрица, состоящая из одной строки:

$$Y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$$

Матрицей -столбцом называется матрица, состоящая из одного столбца:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется **невырожденной** (не особой), если определитель $\Delta(A) \neq 0$; если $\Delta(A) = 0$, то матрица A – **вырожденная** (особая). Если элементы квадратной матрицы A удовлетворяют условию $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**.

Если в квадратной матрице все элементы равны нулю, кроме элементов главной диагонали, то матрица называется **диагональной** и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если в диагональной матрице все элементы главной диагонали равны между собой ($a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = a$), матрица называется **скалярной** и

обозначается $a = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$. Если в скалярной матрице $a=1$, то

матрица называется **единичной** и обозначается $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Рангом матрицы A называется число k , равное наибольшему порядку определителя $\neq 0$, порождаемого матрицей A (обозначается $r(A)$ или $\text{rang} A$).

Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований:

- 1) замена строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками;
- 2) перестановка строк (столбцов) матрицы;
- 3) вычеркивание строки (столбца), все элементы которой (которого) равны нулю;
- 4) умножение какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля;
- 5) прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на произвольное число.

Матрицы A и B называются **эквивалентными** если равны их ранги, то есть $r(A) = r(B)$ (обозначается $A \sim B$).

Пример 1.3. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

Понятие ранга матрицы связано с понятием линейной зависимости (независимости) её строк или столбцов. Пусть дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Обозначим строки $e_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}), e_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}), \dots, e_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm})$. Строка e называется линейной комбинацией строк $e_1, e_2, \dots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа: $e = \lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_s \cdot e_s$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке: $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0$, где $0 = (0, 0, \dots, 0)$. Линейная зависимость строк означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Строки матрицы $e_1, e_2, \dots, e_n$ называются линейно независимыми, если линейная комбинация строк равна нулю, тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю ($\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$).

Действия над матрицами

1. Алгебраической суммой матриц $A = \|a_{ij}\|$ и $B = \|b_{ij}\|$, имеющих одинаковое число строк и столбцов, называется матрица $C = \|c_{ij}\|$, элементами которой являются алгебраические суммы соответствующих элементов матриц A и B , то есть $\|c_{ij}\| = \|a_{ij}\| \pm \|b_{ij}\|$, если $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$

Пример 1.4. Найти сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Произведением матрицы $A = \|a_{ij}\|$ на произвольное число k называется матрица $B = \|b_{ij}\|$, элементами которой являются произведения элементов матрицы A на число k , то есть $b_{ij} = k \cdot a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$.

Пример 1.5. Найти матрицу $-3A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$-3A = \begin{pmatrix} -3 \cdot 1 & -3 \cdot 2 & -3 \cdot 3 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 4 & -3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на матрицу. Пусть матрица C есть произведение матриц A и B . Чтобы получить элемент матрицы C , стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца, нужно каждый элемент i -ой строки матрицы A умножить на соответствующий элемент j -го столбца матрицы B и полученные произведения сложить.

Произведение матриц имеет смысл в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, но не наоборот.

Пример 1.6. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 4 + 7 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 5 \cdot 2 + 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 \\ 4 \cdot 4 + (-3) \cdot 0 + 6 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 53 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Обратной матрицей по отношению к матрице A называется матрица, обозначаемая A^{-1} , для которой справедливы равенства: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$. Необходимым и достаточным условием существования матрицы A^{-1} , обратной A , является невырожденность матрицы A , то есть $\Delta(A) \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta(A)} & \frac{A_{21}}{\Delta(A)} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta(A)} \\ \frac{A_{12}}{\Delta(A)} & \frac{A_{22}}{\Delta(A)} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta(A)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta(A)} & \frac{A_{2n}}{\Delta(A)} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta(A)} \end{pmatrix} =$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} определителя $\Delta(A)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, A_{ij} – транспонированы.

Пример 1.7. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ составить обратную.

Решение:

Составим и вычислим определитель матрицы A :

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 = 22 \neq 0.$$

Для матрицы A существует обратная A^{-1} . Найдём алгебраические дополнения: $A_{11} = 5$; $A_{21} = -(-3) = 3$; $A_{12} = -4$; $A_{22} = 2$, тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{4}{22} & \frac{2}{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = E \quad \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 10+12 & -15+15 \\ -8+8 & 12+10 \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 0 \\ 0 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Ответ: $\begin{pmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -2 & 1 \\ \frac{11}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Введём обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ где } A - \text{ матрица ко-}$$

эффициентов при неизвестных; X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов. Тогда система уравнений записывается в

матричной форме следующим образом: $A \cdot X = B$ – **матричное уравнение**;

$X = A^{-1} \cdot B$ – **решение матричного уравнения**.

Пример 1.8. Записать систему уравнений в матричной форме и решить ее:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 1, \\ x - 2y + 4z = 3, \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

Решение:

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу A^{-1} , обратную матрице A :

$$\Delta(A) = \Delta x = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -25 \neq 0$$

Тогда для матрицы A существует A^{-1} . Найдём алгебраические дополнения матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6; A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-20 + 3) = 17;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5 - 12) = 7; A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 6 = 5; A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 12) = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 6 = -10; A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(8 - 3) = -5;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 17 & -10 \\ 7 & 1 & -5 \\ 5 & -10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -6 + 51 - 20 \\ 7 + 3 - 10 \\ 5 - 30 + 0 \end{pmatrix} =$$

$= -\frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 0 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, $x = -1, y = 0, z = 1$ – решение системы.

1.4 Теорема Кронекера-Капелли

Для того, чтобы система линейных уравнений (1.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ был равен рангу расширенной матрицы}$$
$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n}b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n}b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}b_n \end{pmatrix}, \text{ то есть } r(A) = r(B). \text{ Отсюда следуют}$$

правила:

1. Если ранг матрицы B больше ранга матрицы A , то есть $r(B) > r(A)$, то система (1.1) не имеет решений (система несовместна).
2. Если ранг матрицы B равен рангу матрицы A , и он равен числу неизвестных уравнений в системе (1.1), то есть $r(B) = r(A) = n$, то система имеет единственное решение (система определена).
3. Если ранг матрицы B равен рангу матрицы A , и он меньше числа неизвестных в системе, то есть $r(B) = r(A) = l < n$, то из системы (1.1) выделяем систему независимых уравнений и решаем ее. В этом случае система (1.1) имеет множество решений (система не определена).

Пример 1.9. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Решение:

Составим матрицу системы и найдем ее ранг $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\Delta(A) = 0$, но минор третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, следовательно

$r(A) = 3$. Составим расширенную матрицу B системы и найдем ее ранг:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Все миноры четвертого порядка равны нулю. Известно, что минор треть-

его порядка $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, следовательно $r(B) = 3$. Таким образом,

$r(B) = r(A) = 3$, следовательно, система совместна.

Ранг матриц равен трем, он меньше числа неизвестных в системе, и система имеет множество решений, которые получим, придавая неизвестному x_4 произвольные числовые значения и находя x_1, x_2, x_3 по формулам:

$x_1 = -8; x_2 = 3 + x_4; x_3 = 6 + 2x_4$. Чтобы отыскать формулы решения, выберем из данной системы независимые уравнения, то есть те уравнения, в которых коэффициенты при неизвестных x_1, x_2, x_3 составляют минор $M_3 \neq 0$.

В нашем примере это первые три уравнения:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \end{cases}.$$

Перенесем в правую часть уравнений члены с неизвестным x_4 :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 + 4x_4, \\ x_2 - x_3 = -3 - x_4, \\ x_1 + 3x_2 = 1 + 3x_4 \end{cases}$$

Решим эту систему, используя формулы Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2; \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 4 + 4x_4 & -2 & 3 \\ -3 - x_4 & 1 & -1 \\ 1 + 3x_4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 + 4x_4 & 3 \\ 0 & -3 - x_4 & -1 \\ 1 & 1 + 3x_4 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 2x_4; \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 + 4x_4 \\ 0 & 1 & -3 - x_4 \\ 1 & 3 & 1 + 3x_4 \end{vmatrix}$$

Тогда:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-16}{2} = -8; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{6 + 2x_4}{2} = 3 + x_4;$$

$$x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{12 + 4x_4}{2} = 6 + 2x_4$$

1.5 Метод Гаусса

Метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных. Рассмотрим систему линейных

$$\text{уравнений} \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \hdashline a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right.$$

Разделим обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения; умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравне-

[illegible]

где $d_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 2, 3, \dots, n+1, d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j}, i = 2, 3, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n+1$.

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом для третьего и т. д.

Пример 1.10. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Решение:

Составим расширенную матрицу системы:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 5x_2 - 7x_3 = 11, \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

Отсюда получаем, что $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 2$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ равен...

Варианты ответов:

1) -11; 2) -1; 3) 11; 4) 1.

Задание 2. Наибольший корень уравнения $\begin{vmatrix} 5 & x \\ x & 2 \end{vmatrix} = 3x$ равен...

Варианты ответов:

1) -5; 2) 2; 3) 5; 4) -2.

Задание 3. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} x^2 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $A - 3E = 2B$

при x равном...

В ответ запишите наименьший корень.

Варианты ответов:

1) -1 ; 2) 3 ; 3) 1 ; 4) -3 .

Задание 4. Обратной для матрицы $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ является матрица...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 5. Что означает запись размер матрицы (2×4) ?

Варианты ответов:

1. Матрица нулевая.
2. Матрица прямоугольная.
3. Матрица имеет две строки и четыре столбца.
4. Определитель матрицы равен.
5. Нет правильного ответа.

Задание 6. Что такое минор M_{11} для матрицы (3×3) ?

Варианты ответов:

1. Определитель, получающийся, если вычислить определитель данной матрицы, вычеркнув первую строку и первый столбец.
2. Определитель, равный нулю.
3. Определитель, получающийся, если вычислить определитель данной матрицы, вычеркнув первую строку и третий столбец.
4. Определитель, получающийся, если вычислить определитель данной матрицы, вычеркнув первую строку и первый столбец, взятый со знаком минус.
5. Нет правильного ответа.

Задание 7. Как получить M_{23} ?

Варианты ответов:

1. Умножить матрицу на 2.

2. Вычислить определитель матрицы, вычеркнув первую строку и первый столбец.

3. Вычислить определитель матрицы, вычеркнув вторую строку и третий столбец.

4. Нет правильного ответа.

Задание 8. Что такое алгебраическое дополнение?

Варианты ответов:

1. M_{ij} .

2. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. Определитель матрицы.

4. Порядок матрицы.

Задание 9. Отметьте формулу разложения определителя третьего порядка по второй строке?

Варианты ответов:

1. $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$.

2. $\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23}$.

3. $\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32}$.

4. $\Delta = a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23}$.

Задание 10. Можно ли сложить матрицы $A(2 \times 3)$ и $C(2 \times 3)$?

Варианты ответов:

1. Нет.

2. Да.

3. Только, если все элементы матрицы B равны 2.

Задание 11. Можно ли умножить матрицу $A(2 \times 2)$ на число C ?

Варианты ответов:

1. Нет.

2. Да, но только если $C = 0$.

3. Да, при этом определитель увеличится в C раз.

4. Да.

Задание 12. Можно ли вычесть матрицу $A(2 \times 3)$ из матрицы $B(2 \times 3)$?

Варианты ответов:

1. Нет ответа.

2. Нет.

3. Всегда.

4. Иногда.

Задание 13. Можно ли перемножить матрицы $A(2 \times 2)$ и $B(2 \times 2)$?

Варианты ответов:

1. Нет.

2. Да.

3. Только, если все элементы матрицы A равны 2.

4. Иногда.

Задание 14. Приведите пример единичной матрицы. Укажите ее поряд-
док.

Варианты ответов:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задание 15. Изменится ли квадратная матрица $A(3 \times 3)$, если ее умно-
жить на единичную матрицу?

Варианты ответов:

1. Да.

2. Она станет единичной.

3. Она станет нулевой.

4. Нет.

Задание 16. Чему равен определитель единичной матрицы?

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 18.

Задание 17. Что значит транспонировать матрицу?

Варианты ответов:

1. Обнулить.
2. Элемент с номером ij поместить на место ji и наоборот.
3. Умножить на матрицу E .
4. Элементы с номером ii положить равными нулю.
5. Элементы с номером jj положить равными 1.

Задание 18. Чему равно произведение $A \cdot A^{-1}$?

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) E ; 3) $A+A$; 4) A .

Задание 19. Можно ли найти обратную матрицу, для матрицы, имеющей $\Delta = 0$?

Варианты ответов:

1. Можно.
2. Нет.
3. Всегда
4. Иногда.

Задание 20. Что такое матрица системы?

Варианты ответов:

1. Нулевая матрица.
2. Матрица E .
3. Матрица, состоящая из коэффициентов свободных членов.
4. Матрица, состоящая из коэффициентов левой части.

Задание 21. Что такое матричное уравнение?

Варианты ответов:

1. Равенство вида $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Равенство вида $A \cdot X = C$.
3. Равенство вида $y = kx + b$.

4. Равенство вида $2+10=2$.

Задание 22. Можно ли решить систему уравнений матричным способом, если определитель матрицы системы равен нулю?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Нет.
3. Всегда.
4. Иногда.

Задание 23. Что такое определитель системы второго порядка?

Варианты ответов:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
2. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
3. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
4. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

Задание 24. Определитель Δ равен...

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Варианты ответов:

- 1) -1 ; 2) 5 ; 3) 1 ; 4) -5 .

Задание 25. Определитель Δ равен...

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & b_2 & 1 \\ c_1 & 1 & c_3 \end{vmatrix}$$

Варианты ответов:

1. $3b_2c_3 - b_2c_1$.

2. $3b_2c_3 + b_2c_1$.

3. $-3b_2c_3 - b_2c_1$.

4. $-3b_2c_3 + b_2c_1$.

Задание 26. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Варианты ответов:

1) -40 ; 2) 24 ; 3) -5 ; 4) 5 ; 5) 40 .

Задание 27. Выполнить действия над матрицами $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $2A - B = \dots$

Варианты ответов:

1. $\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 14 & 6 \end{pmatrix}$.

3. 26

4. $\begin{pmatrix} 21 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 28. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Установите соответствие между двумя тождествами

1. $A \cdot B$.

2. $A \cdot C$.

3. $B \cdot C$.

Варианты ответов:

1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 36 & 12 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 12 & 36 \\ -1 & 12 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Задание 29. Алгебраическое дополнение элемента a_{32} матрицы A имеет вид...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Варианты ответов:

1. $A_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. $A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. $A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $A_{32} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -9 & 0 \end{vmatrix}$.

Задание 30. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ ax + 5y = -2 \end{cases}$$

Система не имеет решений при a равно...

Варианты ответов:

1) $-0,5$; 2) 0 ; 3) 2 ; 4) -2 .

2 ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1 Понятие множества и операции над множествами

Множество – это совокупность некоторых (произвольных) объектов, объединённых по какому-либо признаку.

Объекты, которые образуют множество, называются **элементами**, или **точками**, этого множества. Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы – строчными. Если a есть элемент множества A , то используется запись $a \in A$. Если c не является элементом множества A , то пишут $c \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** и обозначается символом $\emptyset$. Если каждый элемент множества A есть элемент множества B , то пишут $A \subset B$ и говорят, что A является **подмножеством** множества B .

Два множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением (или суммой) двух множеств A и B называется множество C , состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств A или B , (или обоим одновременно).

$$C = A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B, \text{ или } x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Пересечением (или произведением) двух множеств A и B называется множество D , состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B .

$$D = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

Разностью множеств A и B называется множество E , состоящее из всех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B :

$$E = A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$

Множества, элементами которых являются действительные числа, называются **числовыми**.

Из школьного курса алгебры известны множества: R – действительных чисел, Q – рациональных, I – иррациональных, Z – целых, N – натуральных чисел. Очевидно, что $N \subset Z \subset Q \subset R, I \subset R$ и $R = Q \cup I$.

2.2 Понятие и область определения функций

Если каждому элементу x множества X ($x \in X$) ставится в соответствие определённый элемент y множества Y ($y \in Y$), то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$. Переменная x называется **независимой переменной (или аргументом)**, а y – **зависимой переменной (или функцией)**.

Совокупность всех значений аргумента x , для которых функция $y = f(x)$ определена, называется **областью определения этой функции** (обозначается $D(f)$ или $D(y)$). Совокупность всех значений, принимаемых переменной y , называется **областью значений функции** $y = f(x)$ (обозначается $E(f)$ или $E(y)$).

Область определения функций:

1. $y = \sqrt{f(x)}, f(x) \geq 0$.
2. $y = \frac{1}{f(x)}, f(x) \neq 0$.
3. $y = \log_a f(x), f(x) > 0$.
4. $y = \arcsin f(x), -1 \leq f(x) \leq 1$.

Функция $y = f(x)$ называется **чётной**, если для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси ординат. Функция $y = f(x)$ называется **нечётной**, если для любого x из области определения функции выполняется

равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** в некотором промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, то есть при выполнении неравенства $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** в некотором промежутке X , если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, то есть при выполнении неравенства $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$. Возрастающие и убывающие функции называются **монотонными**.

Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** в своей области определения X , если существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Функция $y = f(x)$ называется **периодической** с периодом T , если выполняется равенство $f(x + T) = f(x)$ для любого $x \in X$. Наименьшее число T , обладающее указанным свойством, называется **основным периодом функции**.

2.3 Предел числовой последовательности и предел функции. Основные теоремы о пределах

Последовательностью называется функция, заданная на множестве N **натуральных чисел**. Последовательность обозначают следующим образом: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ или $\{x_n\}$. Числа $x_1, x_2, \dots$ называются **членами последовательности**, а x_n — **общим членом**.

Число A называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер N , начиная с которого (при $n > N$), будет выполняться неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Это записывается следующим образом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ при x , стремящимся к a , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это записывают следующим образом $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Если число A_1 есть предел функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к a так, что x принимает только значения, меньшие a , то число A_1 называется **пределом функции в точке a слева**. Указанное записывают следующим образом: $A_1 = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ или $A_1 = f(a - 0)$. Аналогично определяется предел функции $y = f(x)$ в точке a справа: $A_2 = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ или $A_2 = f(a + 0)$.

Пределы функции слева и справа называются **односторонними пределами**. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a - 0) = f(a + 0)$.

Основные теоремы о пределах:

Если существуют $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$, то:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} q(x)$.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot q(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} q(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)}$, при $\lim_{x \rightarrow a} q(x) \neq 0$.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Между бесконечно малой и бесконечно большой функциями существует тесная связь, которая выражается следующими теоремами:

1. Функция, обратная по величине бесконечно большой, является бесконечно малой.

2. Функция, обратная по величине бесконечно малой, есть бесконечно большая.

Две бесконечно малые функции $f(x)$ и $q(x)$ называются **бесконечно малыми функциями одного порядка**, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{q(x)} = \text{const} \neq 0$. Две бесконечно малые функции $f(x)$ и $q(x)$ называются **эквивалентными бесконечно малыми функциями**, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{q(x)} = 1$. Обозначается: $f(x) \sim q(x)$.

2.4 Основные приемы раскрытия неопределенностей.

Первый и второй замечательный предел

Основные приёмы раскрытия неопределённостей:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \begin{cases} 0, & \text{при } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{при } n = m \\ \infty, & \text{при } n > m \end{cases}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \text{ с неопределённостью вида } \left[\frac{0}{0} \right]. \text{ Неопределённость устраняется}$$

после сокращения дроби на множитель $(x - a)$.

3. Неопределённости вида $[\infty; -\infty]$, $[0; \infty]$ при помощи алгебраических преобразований сводятся к виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

4. Если в выражении функции содержатся тригонометрические функции, то для раскрытия неопределённостей применяется первый замечательный предел.

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Следствия из первого замечательного предела:}$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{kx} = 1.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{kx} = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} kx}{kx} = 1.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций при $x \rightarrow 0$:

1. $\sin kx \sim kx$.

2. $\operatorname{tg} kx \sim kx$.

3. $\arcsin kx \sim kx$

4. $\operatorname{arctg} kx \sim kx$.

5. $e^{kx} - 1 \sim kx$.

6. $\ln(1 + kx) \sim kx$.

Вычисление некоторых пределов заметно упрощается, если воспользоваться **принципом замены эквивалентными**:

если $f_1(x) \sim f_2(x)$, $\varphi_1(x) \sim \varphi_2(x)$ при $x \rightarrow a$, то: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$.

Второй замечательный предел:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, где $e \approx 2,72$. С помощью второго замечательного предела раскрывается неопределённость вида $[1^\infty]$.

2.5 Непрерывность функции в точке и точки разрыва

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) определена в точке a и в её окрестности;
- 2) имеет конечный предел при $x \rightarrow a$;
- 3) предел функции в точке a равен значению функции в этой точке, то есть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a , если:

1) определена в точке a и в её окрестности;

2) бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Точка $x = a$ называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции. Точка $x = a$ называется **точкой устранимого разрыва**, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы функции и они равны между собой, но не равны значению функции в этой точке, то есть $f(a - 0) = f(a + 0) \neq f(a)$. Точка $x = a$ называется **точкой разрыва первого рода**, если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой, то есть $f(a - 0) \neq f(a + 0)$. Разность $f(a + 0) - f(a - 0)$ называется **скачком функции в точке a** .

Точка $x = a$ называется **точкой разрыва второго рода**, если в этой точке хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Пример 2.1. Даны два множества $A = \{5; 11; 17; 23\}$ и $B = \{2; 5; 8; 1\}$. Тогда $B \setminus A$ есть множество...

Варианты ответов:

1) $\{2, 5, 8, 11, 17, 23\}$; 2) $\{17; 23\}$ 3) $\{2, 8\}$; 4) $\emptyset$

Решение:

Чтобы получить разность $B \setminus A$ достаточно удалить из множества B общие элементы множеств A и B , то есть все элементы множества $A \cap B$.

Ответ: $B \setminus A = \{2, 8\}$.

Пример 2.2. Область определения функции $y = \lg(8x - x^2)$ равна...

Варианты ответов:

1) $(0; 8)$; 2) $[0; 8]$; 3) $(-\infty; 0) \cup (8; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0] \cup [8; +\infty)$.

Решение:

Выражение, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным. Решая неравенство $8x - x^2 > 0$, получим $0 < x < 8$.

Ответ: $(0; 8)$.

Пример 2.3. Дана функция $y = x^2 - 6x + 5$. Тогда ее областью значений является множество...

Варианты ответов:

1) $y \in R$; 2) $y \geq -4$; 3) $y \geq 5$; 4) $y \leq -4$.

Решение:

Выделяя из квадратного трёхчлена полный квадрат, получим $y = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x - 3)^2 - 4$. Первое слагаемое при всех x является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, не меньше -4 . Следовательно, областью значений данной функции выступает бесконечный промежуток $[-4; +\infty)$, то есть $y \geq -4$.

Ответ: $y \geq -4$.

Пример 2.4. Функция $f(x) = x^3 \cdot \cos 5x$ является...

Варианты ответов:

- 1) чётной;
- 2) нечётной;
- 3) общего вида.

Решение:

Заменяя x на $-x$, получим $f(-x) = (-x)^3 \cdot \cos 5 \cdot (-x) = -x^3 \cdot \cos 5x = -f(x)$.

Следовательно, данная функция нечётная.

Ответ: нечётная.

Пример 2.5. Установите соответствие между периодической функцией и значением её периода:

- 1) $y = \sin \frac{\pi x}{2}$.
- 2) $y = \operatorname{tg} 2\pi x$.
- 3) $y = \cos \frac{2\pi x}{5}$.

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 4; 3) $\frac{2}{5}$; 4) 5.

Решение:

Основной период функции $y = \sin x$ равен 2π , тогда основной период функции $y = \sin \frac{\pi x}{2}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$, **то есть 4**. Основной период функции $y = \operatorname{tg} x$ равен π , тогда основной период функции $y = \operatorname{tg} 2\pi x$ равен $\frac{\pi}{2\pi}$, **то есть $\frac{1}{2}$** . Основной период функции $y = \cos x$ равен 2π , тогда основной период функции $y = \cos \frac{2\pi x}{5}$ равен $\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{5}}$, **то есть 5**.

Пример 2.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} = 1$ равен...

Варианты ответов:

1) 0; 2) ∞ ; 3) -2 ; 4) 2.

Решение. Имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Числитель и знаменатель

данной дроби разложим на линейные множители:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 3)(x - 1)}{-(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{-(1 + x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

Ответ: -2 .

Пример 2.7. В точке $x = 3$ функция $y = \frac{1}{x-3}$ имеет разрыв.

Варианты ответов:

- 1) первого рода;
- 2) второго рода;
- 3) устранимый;
- 4) функция непрерывна.

Решение: В точке $x = 3$ функция не определена, следовательно это точка разрыва, определим ее вид. Найдем в точке $x = 3$ односторонние пределы функции:

$$f(3 - 0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{3 - 0 - 3} = -\infty$$

$$f(3 + 0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{3 + 0 - 3} = +\infty$$

Ответ: $x = 3$ – точка разрыва второго рода.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Что называется функцией?

Варианты ответов:

1. Число.
2. Правило, по которому каждому значению аргумента x соответствует одно и только одно значение функции y .
3. Вектор.
4. Матрица.

Задание 2. В каком случае можно определить обратную функцию?

Варианты ответов:

1. Когда каждый элемент имеет единственный прообраз.
2. Когда функция постоянна.
3. Когда функция не определена.
4. Когда функция многозначна.

Задание 3. Область определения функции равна:

$$y = \ln(4 - x) + \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$$

Варианты ответов:

1. $(-\infty; 4)$.

2. $(-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

3. $(-\infty; 1) \cup (1; 4)$.

4. $(4; 5) \cup (5; +\infty)$.

Задание 4. Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ равна...

Варианты ответов:

1) $x \neq 3$; 2) $x < 3$; 3) $x \leq 3$; 4) $x \in R$.

Задание 5. Дана функция $y = \sqrt{x^2 + x - 6} + 5$. Тогда ее областью значений является множество...

Варианты ответов:

1) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$; 2) $(\sqrt{6} + 5; +\infty)$; 3) $[-5; +\infty)$; 4) $[5; +\infty)$.

Задание 6. Дана функция $y = x^3 + 3$. Тогда ее областью значений является множество...

Варианты ответов:

1) $y \in R$; 2) $y \neq \pm\sqrt{3}$; 3) $y \geq 3$; 4) $-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3}$.

Задание 7. Функция $f(x) = x^4 - x^2 - 7$ является...

Варианты ответов:

1. Чётной.

2. Нечётной.

3. Общего вида.

Задание 8. Функция $f(x) = x^3 + \sin x$ является...

Варианты ответов:

1. Чётной.

2. Нечётной.

3. Общего вида.

Задание 9. Функция $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$ является...

Варианты ответов:

1. Чётной.

2. Нечётной.

3. Общего вида.

Задание 10. Функция $f(x) = e^{x^2+1}$ является...

Варианты ответов:

1. Чётной.

2. Нечётной.

3. Общего вида.

Задание 11. Функция $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ является...

Варианты ответов:

1. Чётной.

2. Нечётной.

3. Общего вида.

Задание 12. Какая функция называется ограниченной?

Варианты ответов:

1. Обратная.

2. Функция $f(x)$ называется ограниченной, если $m \leq f(x) \leq M$.

3. Функция $f(x)$ называется ограниченной, если $f(x) > 0$.

4. Функция $f(x)$ называется ограниченной, если $f(x) \leq 0$.

Задание 13. Какая точка называется предельной точкой множества A ?

Варианты ответов:

1. Нулевая.

2. Точка x_0 называется предельной точкой множества A , если в любой окрестности точки x_0 содержатся точки множества A , отличающиеся от x_0 .

3. Не принадлежащая множеству A .

4. Лежащая на границе множества.

Задание 14. Может ли существовать предел функции в точке в том случае, если односторонние пределы не равны между собой?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Иногда.
3. Нет.
4. Всегда.

Задание 15. Является ли функция $y = 5 + \frac{1}{x^2}$ бесконечно малой при $x \rightarrow \infty$?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Нет.
3. Иногда.
4. Всегда.

Задание 16. Является ли функция $y = \frac{2x+3}{5}$ бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Нет.
3. Иногда.
4. Если $x = 0$.
5. Нет ответа.

Задание 17. Является ли функция $y = \sin x$ бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Нет.
3. Иногда.
4. Всегда.
5. Нет ответа.

Задание 18. Является ли функция $y = \cos x$ бесконечно большой при $x \rightarrow \infty$?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Нет.
3. Иногда.
4. Всегда.
5. Нет ответа.

Задание 19. Является ли функция $y = \operatorname{tg} x$ бесконечно большой в точке $x_0 = 0$?

Варианты ответов:

1. Да.
2. Иногда.
3. Всегда.
4. Нет.
5. Нет ответа.

Задание 20. Является ли произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную, бесконечно малой функцией?

Варианты ответов:

1. Нет.
2. Да.
3. Иногда.
4. Не всегда.
5. Нет ответа.

Задание 21. В каком случае бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка в точке x_0 ?

Варианты ответов:

1. Если они равны.

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$.

3. Если $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \beta(x)$.

4. Если их пределы равны нулю.

5. Нет ответа.

Задание 22. Чему равен предел константы C ?

Варианты ответов:

1) 0; 2) e ; 3) 1; 4) ∞ ; 5) C .

Задание 23. Является ли степенная функция непрерывной?

Варианты ответов:

1. Нет.

2. Да.

3. Иногда.

4. При $x > 1$.

5. Нет ответа.

Задание 24. Приведите формулу второго замечательного предела?

Варианты ответов:

1. $\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

5. Нет ответа.

Задание 25. Какие функции называются непрерывными?

Варианты ответов:

1. Бесконечно малые.

2. Удовлетворяющие условиям: а) f определена в точке x_0 ; б) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и он равен $f(x_0)$.

3. Бесконечно большие.

4. Степенные.

Задание 26. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = L$, но $f(x_0) \neq L$, какой разрыв имеет функция?

Варианты ответов:

1. Нет ответа.

2. Второго рода.

3. Устранимый.

4. Неустранимый.

5. Функция непрерывна.

Задание 27. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} = \dots$

Варианты ответов:

1) -4 ; 2) 1 ; 3) 4 ; 4) -2 ; 5) 0 .

Задание 28. Предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 - 5x + 3}$ равен...

Варианты ответов: 1) 0 ; 2) ∞ ; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 1 .

Задание 29. Для дробно-рациональной функции $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 2x}$ точками разрыва являются...

Варианты ответов: 1) $x = -2$; 2) $x = 0$; 3) $x = 1$; 4) $x = -1$.

Задание 30. Установите соответствие между пределами и их значениями

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 2}{4x + 2x^2 - 5}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x}{2x}$.

Варианты ответов: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3 ; 3) 1 ; 4) ∞ .

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1 Производная и дифференциал

3.1.1 Дифференцирование явных функций

Пусть x_1 и x_2 – значения аргумента; $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ – соответствующие значения функции $y = f(x)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется **приращением аргумента**, а разность $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$ – **приращением функции** на отрезке $[x_1, x_2]$.

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, или $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (производная обозначается также $\frac{dy}{dx}$).

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x , то есть $y' = \operatorname{tg} \alpha$. **Физически** производная есть скорость изменения функции в точке x . Отыскание производной называется **дифференцированием функции**.

Таблица 3.1 – Таблица производных элементарных функций

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Продолжение таблицы 3.1

$(e^x)' = e^x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)' = \cos x$	—

Основные правила дифференцирования:

Пусть c – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции имеющие производные, тогда:

1. $c' = 0$.
2. $x' = 1$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(cu)' = c \cdot u'$.
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

7. Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, то есть $y = f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Пример 3.1. Найдите производные функций:

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4$

Решение:

$$y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2(x^3)' - 5(x^2)' + 7x' + 4' =$$

$$= 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$$

б) $y = x^3 \cdot \operatorname{arctg} x$

Решение:

$$y' = (x^3)' \cdot \operatorname{arctg} x + x^3 \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x + x^3 \cdot \frac{1}{1+x^2} =$$

$$3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2}$$

в) $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Решение:

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin 2 \cdot \frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

3.1.2 Дифференцирование показательно-степенной функции

Функция y которой и основание, и показатель степени являются функциями от x , то есть функция вида $y = [u(x)]^{v(x)} = u^v$ называется показательно-степенной или сложной показательной функцией, например, $(\sin x)^x$, $x^{\operatorname{tg} x}$, $(\ln x)^x$, x^x . Производная такой функции находится по формуле: $y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \cdot \ln u$.

Пример 3.2. Найдите производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

Решение:

$$y' = x^2 \cdot (\sin x)^{x^2-1} \cdot (\sin x)' + (\sin x)^{x^2} \cdot \ln \sin x \cdot (x^2)',$$

$$y' = x^2 \cdot (\sin x)^{x^2} \cdot (\sin x)^{-1} \cdot \cos x + (\sin x)^{x^2} \cdot \ln \sin x \cdot 2x,$$

$$y' = (\sin x)^{x^2} \cdot \left[\frac{x^2 \cdot \cos x}{\sin x} + 2x \cdot \ln \sin x \right],$$

$$y' = (\sin x)^{x^2} \cdot [x^2 \cdot \operatorname{ctg} x + 2x \cdot \ln \sin x]$$

3.1.3 Дифференцирование неявных функций

Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x . Будем считать эту функцию дифференцируемой. Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x, y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y' . Из этого уравнения легко находится y' , то есть производная неявной функции.

Пример 3.3. Найдите производную y'_x от неявной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 3y - 3x \cdot y' = 0$$

$$3y^2 \cdot y' - 3x \cdot y' = 3y - 3x^2$$

$$y'(y^2 - x) = y - x^2$$

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

3.1.4 Дифференцирование функций, заданных параметрически

Если функция y аргумента x задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ или } y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

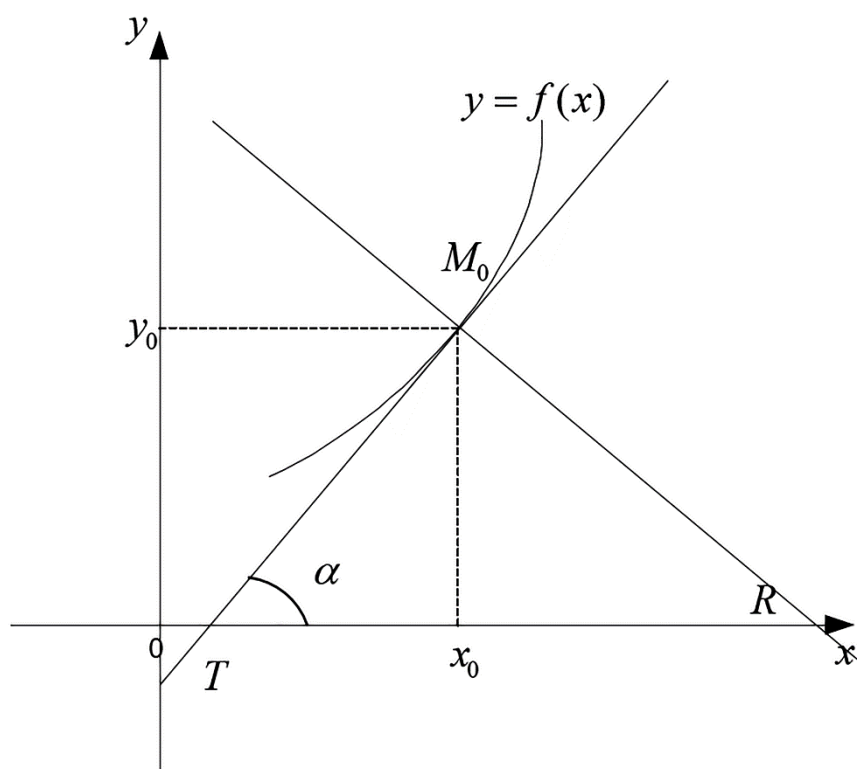
Пример 3.4. Найдите производную, если $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$.

Решение:

$$y' = \frac{(3t^5 + 5t^3 + 1)'}{(t^3 + 3t + 1)'} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = \frac{15t^2(t^2 + 1)}{3(t^2 + 1)} = 5t^2$$

3.1.5 Приложения производной к задачам геометрии

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0 . **Уравнение касательной** к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$, где y'_0 – есть значение производной y' в точке $M_0(x_0; y_0)$. **Нормалью** к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания (рис. 3.1).



M_0T – касательная, M_0R – нормаль

Рисунок 3.1 – Касательная и нормаль

Уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$. Углом между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0; y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0 . Этот угол находится по формуле $\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_1(x_0) \cdot f'_2(x_0)}$.

Пример 3.5. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведённая в точке с абсциссой $x = 1$.

Решение:

$$y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2, \text{ при } x = 1, y' = 3$$

то есть $\operatorname{tg} \alpha = 3$, следовательно $\alpha = \operatorname{arctg} 3 \approx 71^\circ 34'$

Пример 3.6. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1; -1)$.

Решение:

Из уравнения кривой находим производную $2x + 2y^2 + 4x \cdot y \cdot y' + 12y^3 \cdot y' = 0$, то есть $y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

$$\text{Следовательно, } y'_0 = -\frac{1+(-1)^2}{2 \cdot 1(-1)+6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Уравнение касательной $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$ или $x - 4y - 5 = 0$.

Уравнение нормали $y + 1 = -4(x - 1)$ или $4x + y - 3 = 0$.

Пример 3.7. Найти угол между параболом $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

Решение:

Решив совместно уравнения парабол, находим точки их пересечения $A(2; 4)$ и $B(-2; 4)$.

Продифференцируем уравнения парабол: $y' = -2x, y' = 2x$. Найдём угловые коэффициенты касательных к параболам в точке A (то есть значения производных при $x = 2$): $k_1 = -4, k_2 = 4$.

Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4+4}{1-16} = -\frac{8}{15}, \varphi_1 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{8}{15}\right)$. Также определяется угол между кривыми в точке B : $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$.

3.1.6 Механический смысл производной

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения, описываемый $S = S(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v = S'(t_0)$.

Пример 3.8. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $S = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi t}{8}$ (t – в секундах, S – в метрах). Определите скорость движения в конце второй секунды.

Решение:

Находим производную пути по времени: $\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi t}{8}$. При $t = 2$ имеем $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8} \sqrt{2} \approx 16,18$. Следовательно, скорость движения в конце второй секунды приблизительно равна 16,18 м/с.

3.1.7 Экономический смысл производной

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x . Δx – прирост продукции, Δy – приращение издержек производства, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции.

Производная $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенные дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции. **Относительная скорость** изменения (темпы) функции $y = f(x)$ определяется её логарифмической производной $T_y = (\ln y)' = \frac{y'_x}{y}$.

Эластичность функции $y = f(x)$ – предел отношения относительного

приращения функции к относительному приращению независимой переменной x при $\Delta x \rightarrow 0$.

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \cdot y'_x \quad (3.1)$$

Эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп функции: $E_x(y) = x \cdot T_y$. Эластичность функции показывает приближенно, насколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на один процент. Коэффициенты эластичности применяются при анализе спроса и потребления и определяются по формуле (3.1). Если $E_x(y) > 1$, то спрос эластичен, если $E_x(y) = 1$, то спрос нейтрален, если $E_x(y) < 1$, то спрос неэластичен относительно цены.

Производственная функция – экономико-математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности от обусловивших эти результаты показателей – факторов. Производственные функции, в которых устанавливается зависимость объема производства продукции от наличия или потребления ресурсов, называют также функцией выпуска, а функции, в которых рассматривается зависимость затрат на производство от выпуска продукции – функцией производственных затрат.

Производственная функция имеет вид: $y = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$, где y – величина общественного продукта; a – коэффициент, зависящий от размерности единиц измерения затрат и выпуска; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – параметры, численно равные коэффициентам эластичности выпуска относительно затрат соответствующего ресурса, так как $E_{xi}(y) = \frac{x_i}{y} \cdot y'_{xi} = \alpha_i, (i = \overline{1, n})$. Коэффициенты α_i показывают на сколько процентов изменится общественный продукт y при изменении затрат i -го ресурса x_i на один процент.

Пример 3.9. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (тыс. руб.) выражается функцией:

$y = -0,5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 60 млн. руб.

Решение:

По формуле (3.1) эластичность себестоимости $E_x(y) = \frac{-0,5x}{-0,5x+80} = \frac{x}{x-160}$.

При $x = 60$, $E_{x=60}(y) = -0,6$, то есть при выпуске продукции 60 млн. руб., увеличение выпуска на 1 % приведет к снижению себестоимости на 0,6 %.

Пример 3.10. Опытным путём установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $S = p + 0,5$, где q и S – количество товара, соответственно покупаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара.

Найти: а) равновесную цену, то есть цену, при которой спрос и предложение уравниваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5 % от равновесной.

Решение:

а) равновесная цена определяется из условия $q = S \frac{p+8}{p+2} = p + 0,5$, откуда $p = 2$, то есть равновесная цена равна 2 денежных единицы.

б) найдем эластичность по спросу и предложению по формуле (3.1): $E_p(q) = -\frac{6}{(p+2)(p+8)}$; $E_p(S) = \frac{2p}{2p+1}$.

Для равновесной цены $p = 2$ имеем $E_{p=2}(q) = -0,3$; $E_{p=2}(S) = 0,8$. Так как полученные значения эластичности по абсолютной величине меньше единицы, то и спрос, и предложение данного товара при равновесной (рыночной) цене неэластичны относительно цены. Это означает, что изменение цены не приведет к резкому изменению спроса и предложения. При увеличении цены на 1 % спрос уменьшится на 0,3 %, а предложение увеличится на 0,8 %.

в) при увеличении цены p на 5 % от равновесной, спрос уменьшается на $5 \cdot 0,3 = 1,5$, следовательно, доход возрастает на 3,5 %.

3.1.8 Производные высших порядков

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от производной первого порядка. Вторая производная обозначается: y'' или $\frac{d^2y}{dx^2}$, или $f''(x)$. Если $S = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки, то вторая производная пути по времени $\frac{d^2S}{dt^2} = a(t)$ – ускорение этого движения.

Аналогично **производная третьего порядка** функции $y = f(x)$ есть производная от производной второго порядка $y''' = (y'')'$.

Производная n -го порядка функции $y = f(x)$ есть производная от производной $(n - 1)$ -го порядка $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$. Обозначается n -ая производная следующим образом: $y^{(n)}$, или $\frac{d^n(y)}{dx^n}$, или $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков (вторая, третья и т. д.) вычисляются последовательным дифференцированием данной функции. Если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то производную второго порядка можно вычислить по формуле: $y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$.

Пример 3.11. $y = \ln x$. Найти производные второго и третьего порядка.

Решение:

$$y' = \frac{1}{x}; y'' = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}; y''' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

Пример 3.12. $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$. Найти производную второго порядка.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(a \cdot \sin^3 t)'}{(a \cdot \cos^3 t)'} = \frac{3a \sin^2 t \cdot \cos t}{-3a \cos^2 t \cdot \sin t} = -tg t; \\ y'' &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-tg t)'_t}{(a \cdot \cos^3 t)'_t} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{-3a \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3a \sin t \cdot \cos^4 t} \end{aligned}$$

Пример 3.13. При прямолинейном движении точки зависимость пути от времени задана уравнением $S = \sqrt{t}$. Найти ускорение точки в конце четвертой секунды.

Решение:

$$S' = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad S'' = (S')' = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)' = \left(\frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{t^3}};$$

$$S''(4) = -\frac{1}{4\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{4 \cdot 8} = -\frac{1}{32} \text{ м/с}^2$$

3.1.9 Дифференциалы первого и высших порядков

Дифференциалом (первого порядка) функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента.

Дифференциалом аргумента называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $dy = y' \cdot dx$. Если приращение Δx аргумента мало по абсолютной величине, то $\Delta y \approx dy$; $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$.

Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$. Аналогично определяется дифференциал третьего порядка: $d^3y = d(d^2y)$. Таким образом, $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Если $y = f(x)$ и x – независимая переменная, то дифференциалы высших порядков вычисляются по формулам:

$$d^2y = y'' \cdot (dx)^2; \quad d^3y = y''' \cdot (dx)^3; \quad \dots; \quad d^n y = y^{(n)} \cdot (dx)^n$$

Пример 3.14. Найти дифференциал функции $y = \arctg x$.

Решение:

$$\text{Так как } dy = y' \cdot dx, \text{ то } dy = (\arctg x)' \cdot dx = \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \frac{dx}{1+x^2}$$

Пример 3.15. Найти дифференциалы первого, второго, третьего порядков

функции $y = (2x - 3)^3$.

Решение:

$$\begin{aligned} dy &= 3(2x - 3)^2 \cdot 2dx = 6(2x - 3)^2 \cdot dx, \\ d^2y &= 12(2x - 3) \cdot 2 \cdot dx^2 = 24(2x - 3) \cdot dx^2, \\ d^3y &= 24 \cdot 2 \cdot dx^3 = 48dx^3 \end{aligned}$$

Пример 3.16. Вычислить приближённое значение $\arcsin 0,51$.

Решение:

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Полагая $x = 0,5$; $\Delta x = 0,01$, и применяя формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \cdot \Delta x$, получаем:

$$\arcsin 0,51 \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \frac{\pi}{6} + 0,011 = 0,513$$

3.2 Исследование функции

3.2.1 Правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в ε -окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то есть предел частного в точке $x = x_0$ представляет собой неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, при условии, что существует предел отношения производных.

Если предел частного $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ также есть неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют тем же условиям что и соответствующие функции, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.

В случае неопределённости вида $(0 \cdot \infty)$ или $(\infty - \infty)$ следует алгебраически преобразовать данную функцию так, чтобы привести её к неопределённости вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределённости вида (0^0) ; (∞^0) или (1^∞) следует прологарифмировать данную функцию и найти предел её логарифма.

Пример 3.17. Вычислить пределы функции:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{3}{e}$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x \cdot e^{\frac{x}{2}})'}{(x + e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} + x \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{x}{2})}{1 + e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}(1 + \frac{x}{2}) + e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}}{e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{x}{2} + 1)}{e^x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{x}{2})'}{(e^{\frac{x}{2}})'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x(e^x - 1))'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x \cdot e^x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(e^x - 1 + x \cdot e^x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + x \cdot e^x} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2}$$

д) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

Решение: $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = (0^0)$.

Пусть $y = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$. Логарифмируя, получим:

$$\ln y = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\sin x)^x = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln (\sin x) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln \sin x)'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot x^2}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) =$$
$$= - \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 0 \cdot 1 = 0,$$

Следовательно, $\ln y = 0$; $y = e^0 = 1$. Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x = 1$.

3.2.2 Возрастание и убывание функции. Максимум и минимум

1. Функция $f(x)$ называется возрастающей на отрезке $[a; b]$, если для любых x_1 и x_2 на этом отрезке $f(x_1) < f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$.

Аналогично определяется **убывание функции** на отрезке.

Функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0 , если в некоторой ε -окрестности этой точки $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ при любом положительном $h < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется имеющей экстремум (максимум или мини-

мум) в точке x_0 , если $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двусторонней окрестности этой точки.

2. Достаточные признаки возрастания и убывания функции $y = f(x)$ (в точке и на отрезке):

если $y' > 0$, для $\forall x \in [a; b]$ то функция возрастает на $[a; b]$;

если $y' < 0$, для $\forall x \in [a; b]$ то функция убывает на $[a; b]$.

3. Необходимое условие экстремума. Если x_0 – точка экстремума, то $f'(x_0) = 0$ или не существует. Такие точки называются критическими. В них касательная или горизонтальна ($y' = 0$), или вертикальна (в точках возврата), или нет определенной касательной (например, в угловой точке). В двух последних случаях y' не существует.

4. Достаточные условия экстремума. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет в некоторой окрестности x_0 , кроме быть может, точки x_0 , конечную производную, и если при переходе x через x_0 слева направо:

y' меняет знак с «+» на «–», то $f(x_0) = y_{max}$;

y' меняет знак с «–» на «+», то $f(x_0) = y_{min}$;

y' не меняет знака – экстремума нет.

5. Достаточные условия экстремума (второй способ исследования).

Если в некоторой точке $x = x_0$:

1) $y' = 0$, а $y'' < 0$, то $f(x_0) = y_{max}$;

2) $y' = 0$, а $y'' > 0$, то $f(x_0) = y_{min}$;

3) $y' = 0$ и $y'' = 0$, то вопрос остается нерешенным и нужно обратиться к первому способу исследования.

6. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на $[a; b]$ необходимо:

1) найти критические точки функции на интервале $(a; b)$;

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, то есть в точках $x = a$ и $x = b$;

4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

7. Направление выпуклости и точки перегиба кривой.

Точкой перегиба функции $y = f(x)$ называется точка x_0 , в которой выпуклость переходит в вогнутость, или наоборот. Точка x_0 является критической точкой относительно перегиба, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Из предыдущей теоремы следует: $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) < 0$ при $x > x_0$; $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f''(x) > 0$ при $x > x_0 + \rightarrow -$, $- \rightarrow +$. Следовательно, x_0 – точка перегиба.

Вывод: Если при переходе через критическую точку вторая производная меняет знак, то эта точка – точка перегиба.

Асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 3.2).

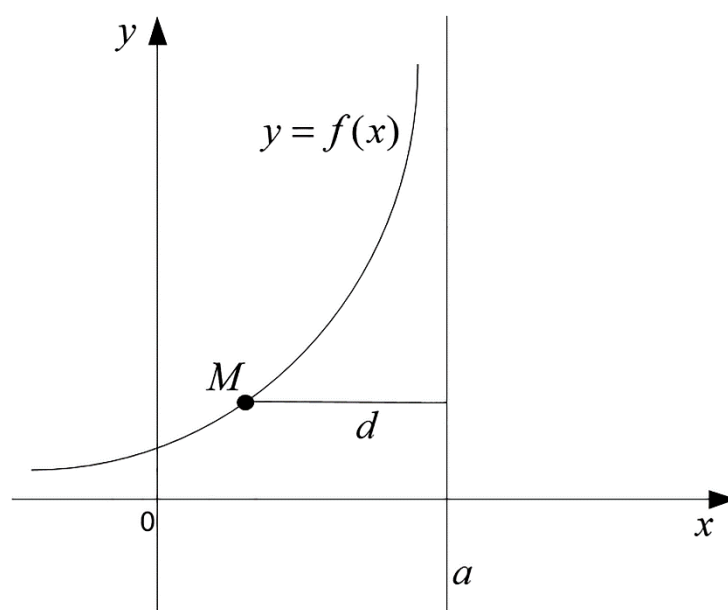


Рисунок 3.2 – Асимптота кривой

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными. Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Уравнение **наклонной асимптоты** имеет вид: $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$. Если хотя бы один из пределов не существует или равен бесконечности, то кривая $y = f(x)$ наклонной асимптоты не имеет. В частности, если $k = 0$, то $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, поэтому $y = b$ – уравнение горизонтальной асимптоты.

Пример 3.18.

1. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - 3x - 4$ на возрастание и убывание.

Решение:

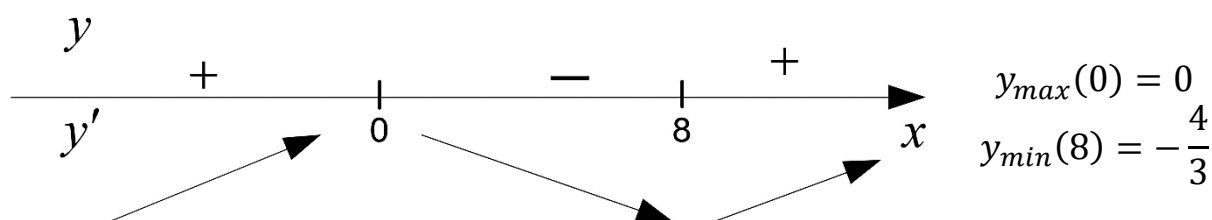
Функция определена на $R = (-\infty; +\infty)$. Тогда $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) > 0$. При $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$; $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$. Следовательно, функция возрастает на интервале $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на интервале $(-1; 1)$.

2. Найти экстремум функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$.

Решение: $D(y) = R$; $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$, то есть

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}; y' = 0, \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 2, x_1 = 8$$

$$y' \text{ не существует } \sqrt[3]{x} = 0, x_2 = 0.$$



3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$.

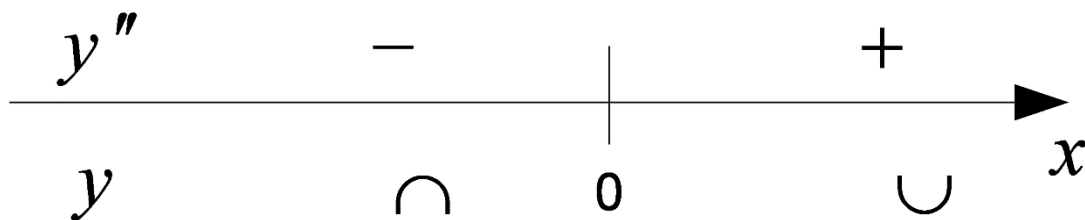
Решение:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1); f'(x) = 0, \\ 12x^2(x+1) &= 0, \quad x_1 = 0, x_2 = -1, \quad x_1 = 0 \in [-2; 1], x_2 = -1 \in [-2; 1] \\ f(0) &= 1; f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 + 4(-1)^3 + 1 = 3 - 4 + 1 = 0, \\ f(-2) &= 3 \cdot (-2)^4 + 4(-2)^3 + 1 = 48 - 32 + 1 = 17, \\ f(1) &= 3 + 4 + 1 = 8 \end{aligned}$$

Следовательно, $f_{\text{наибольшее}} = 17$ в точке $x = -2$; $f_{\text{наименьшее}} = 0$ в точке $x = -1$.

4. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = x^5 - x + 5$.

Решение:



$$y' = 5x^4 - 1; y'' = 20x^3; y''' = 0$$

$$20x^3 = 0; x = 0$$

Следовательно, график функции $y = x^5 - x + 5$ в интервале $(-\infty; 0)$ – выпуклый вверх, в интервале $(0; \infty)$ – выпуклый вниз, $y(0) = 5$, точка $(0; 5)$ является точкой перегиба.

5. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Решение:

Найдем вертикальные асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = \frac{(-2)^2 - 2(-2) + 3}{-2 + 2} = \frac{4 + 4 + 3}{0} = \infty$$

Следовательно, $x = -2$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x(x + 2)}{x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x}{x + 2} = -4$$

Следовательно, $y = x + 4$ – уравнение наклонной асимптоты.

Построение графиков функций по характерным точкам.

При построении графика функции $y = f(x)$ придерживаются схемы:

- 1) находят область определения функции;
- 2) исследуют функцию на чётность, нечётность;
- 3) находят точки пересечения графика функции с осями координат;
- 4) исследуют функцию на непрерывность, находят асимптоты графика функции;
- 5) находят интервалы возрастания и убывания функции и экстремумы функции;
- 6) находят интервалы выпуклости и вогнутости кривой и точки её перегиба.

Пример 3.19. Построить график функции $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

Решение:

1) $x \neq 0$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3 + 4}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2} = -\frac{x^3 - 4}{x^2} \neq f(x) \neq -f(x)$ не является ни чётной, ни нечётной;

3) точки пересечения с осями координат: с осью Ox , $y = 0$, $\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$,

$x = -\sqrt[3]{4}$; с осью Oy точек пересечения нет, так как $x = 0 \notin D(y)$;

4) точка разрыва $x = 0$, причём $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$; следовательно, $x = 0$ – вертикальная асимптота; найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0;$$

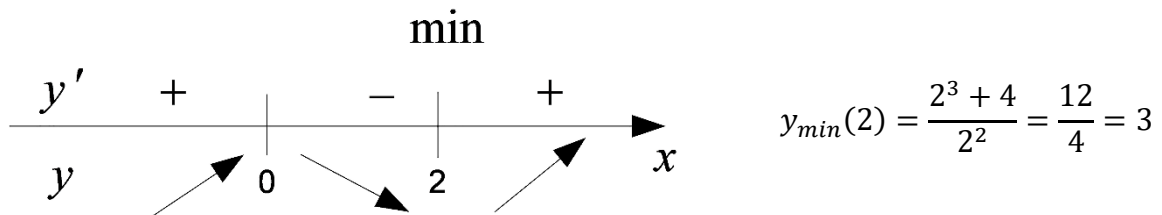
$y = x$ – уравнение наклонной асимптоты;

5) найдём экстремум функции и интервалы возрастания и убывания:

$$y' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(x^3 - 8)}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}; y' = 0; \frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$$

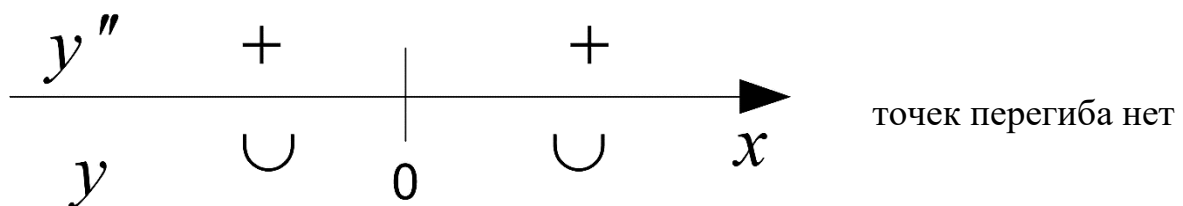
Следовательно, $x^3 - 8 = 0; x = 2; x^3 \neq 0; x \neq 0$



6) найдем интервалы выпуклости и вогнутости кривой, а также точки перегиба:

$$y'' = \left(\frac{x^3 - 8}{x^3} \right)' = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3x^5 - 3x^5 + 24x^2}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

$$y'' = 0, \frac{24}{x^4} = 0, \text{ следовательно } x \neq 0$$



7) по данным исследования построим график функции (рис. 3.3).

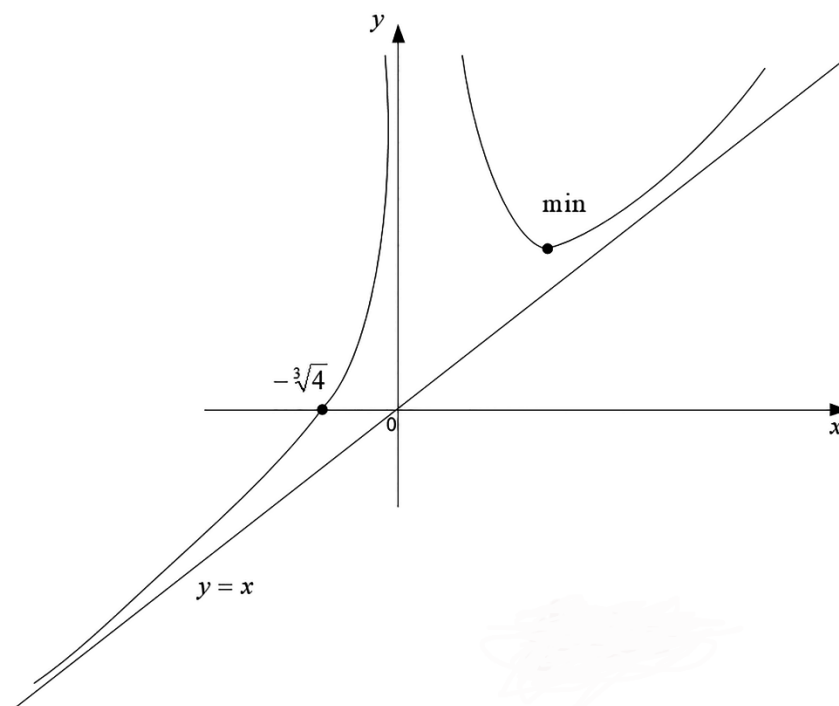


Рисунок 3.3 – График функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Что такое производная функции?

Варианты ответов:

1. Предел значения этой функции.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. 0.

4. 1.

5. e .

Задание 2. Какая функция является дифференцируемой в точке $x = 4$?

Варианты ответов:

1. $y = \frac{1}{x-4}$.

2. $\ln(x - 4)$.
3. Имеющая производную в точке $x = 4$.
4. Непрерывная в точке $x = 4$.

Задание 3. Какая функция называется дифференцируемой на интервале (a, b) ?

Варианты ответов:

1. Разрывная в каждой точке интервала.
2. Дифференцируемая в каждой точке этого интервала.
3. Постоянная.
4. Возрастающая.
5. Убывающая.

Задание 4. Чему равна производная функции $y = C$?

Варианты ответов:

- 1) 1; 2) 0; 3) e ; 4) ∞ ; 5) нет ответа.

Задание 5. Чему равна производная функции $y = x^5$?

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) 1; 3) e ; 4) $5x^4$; 5) нет ответа.

Задание 6. Чему равна производная функции $y = e^x$?

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) e^x ; 3) e ; 4) 1; 5) нет ответа.

Задание 7. Чему равна производная функции $y = \ln x$?

Варианты ответов:

- 1) $\frac{1}{x}$; 2) 0; 3) e ; 4) 1; 5) нет ответа.

Задание 8. Чему равна производная функции $y = \sin x$?

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) $\cos x$; 3) e ; 4) 1.

Задание 9. Может ли непрерывная функция быть дифференцируемой?

Варианты ответов:

1. Нет.
2. Да.
3. Иногда.
4. Только в точке $x = 0$.

Задание 10. Всегда ли непрерывная функция является дифференцируемой?

Варианты ответов:

1. Всегда.
2. Иногда.
3. Не всегда.
4. В точке $x = 0$.
5. В точке $x = \infty$.

Задание 11. Может ли дифференцируемая функция быть непрерывной?

Варианты ответов:

1. Нет.
2. Да.
3. Никогда.
4. В точке $x = 0$.
5. В точке $x = \infty$.

Задание 12. Всегда ли дифференцируемая функция является непрерывной?

Варианты ответов:

1. Не всегда.
2. Никогда.
3. Нет ответа.
4. В точке $x = 0$.

5. Всегда.

Задание 13. Найдите вторую производную от функции $y = \sin x$.

Варианты ответов:

1) $\cos x$; 2) $-\sin x$; 3) 0; 4) 1; 5) $\operatorname{tg} x$.

Задание 14. Как называется главная, линейная часть приращения функции?

Варианты ответов:

1. Производная.

2. Дифференциал (dy).

3. Функция.

4. Бесконечно малая.

5. Бесконечно большая.

Задание 15. Сформулируйте правило Лопиталя.

Варианты ответов:

1. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{y(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{y'(x)}$, если предел правой части существует.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3. $\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$.

4. Нет правильного ответа.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Задание 16. Какие виды неопределённостей можно раскрыть с помощью правила Лопиталя?

Варианты ответов:

1. $\{0\}$.

2. $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

3. $c \cdot 0$.

4. $c \cdot \infty$.

5. $\infty \cdot \infty$.

Задание 17. Является ли условие $y' = 0$ в точке, не являющейся граничной точкой области определения дифференцируемой функции y , необходимым условием существования экстремума в этой точке?

Варианты ответов:

1. Нет.

2. Да.

3. Не всегда.

4. Иногда.

5. Нет ответа.

Задание 18. Является ли условие $y' = 0$ в точке $x = a$ достаточным условием существования экстремума?

Варианты ответов:

1. Да.

2. Нет.

3. Не всегда.

4. Иногда.

5. Нет ответа.

Задание 19. Производная частного $\frac{x}{2x-1}$ равна...

Варианты ответов:

1. $\frac{4x-1}{(2x-1)^2}$.

2. $\frac{1}{(2x-1)^2}$.

3. $-\frac{1}{2x-1}$.

4. $-\frac{1}{(2x-1)^2}$.

Задание 20. Производная функции $y = \sin^2 x$ равна...

Варианты ответов:

1) $\cos^2 x$; 2) $2\cos x$; 3) $\sin 2x$; 4) $2 \sin x$.

Задание 21. Значение производной второго порядка функции $y = \sin 2x + 4x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$ равно...

Варианты ответов:

1) 4; 2) 1; 3) -4; 4) -1.

Задание 22. Наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{2x^2 + x + 4}{x - 1}$ является прямая...

Варианты ответов:

1. $y = -2x + 3$.

2. $y = 2x + 3$.

3. $y = -x + 2$.

4. График не имеет наклонных асимптот.

Задание 23. Закон движения материальной точки имеет вид $x(t) = 4 + 10t^2$, где $x(t)$ – координата точки в момент времени t . Тогда скорость точки при $t = 1$ равна...

Варианты ответов:

1) 10; 2) 20; 3) 24; 4) 14.

Задание 24. Производная функции $y = 2x^4 + \sqrt{x} + 3$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$.

2. $x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. $8x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4. $4x^3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Задание 25. Функция задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t - \ln t \\ y = 3t^2 - 2t^3, \text{ её производная равна...} \end{cases}$$

Варианты ответов:

1) $-6t^2$; 2) $3t$; 3) $\frac{1}{t}$; 4) $6t^2$.

Задание 26. Уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 3$ в точке $A(5; 8)$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $6x - y - 22 = 0$.

2. $x - 6y = 0$.

3. $-6x + y - 22 = 0$

4. $2x - 4y + 5 = 0$.

Задание 27. Уравнение нормали к кривой $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x = 4$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $4x - y - 18 = 0$.

2. $2x + y - 1 = 0$.

3. $4x + y - 18 = 0$.

4. $-2x + 4y = 0$.

Задание 28. Функция задана неявно $x^2 + xy + y^2 = 6$, её производная равна...

Варианты ответов:

1. $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$.

2. $y' = -\frac{2x-y}{x+2y}$.

3. $y' = \frac{x+2y}{y-2x}$.

4. $y' = 2x + y$.

Задание 29. Найдите $\frac{d}{dx} \left(\operatorname{ctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) \dots$

Варианты ответов:

1. $\frac{1}{\sin^2 \frac{x+1}{\sqrt{2}}}$

2. $-\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin^2 \frac{x+1}{\sqrt{2}}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \cos^2 \frac{x+1}{\sqrt{2}}}$

4. $-\frac{1}{\sin^2 \frac{x+1}{\sqrt{2}}}$

Задание 30. Наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{2}{3}$ на отрезке $[-1; 1]$ равно...

Варианты ответов:

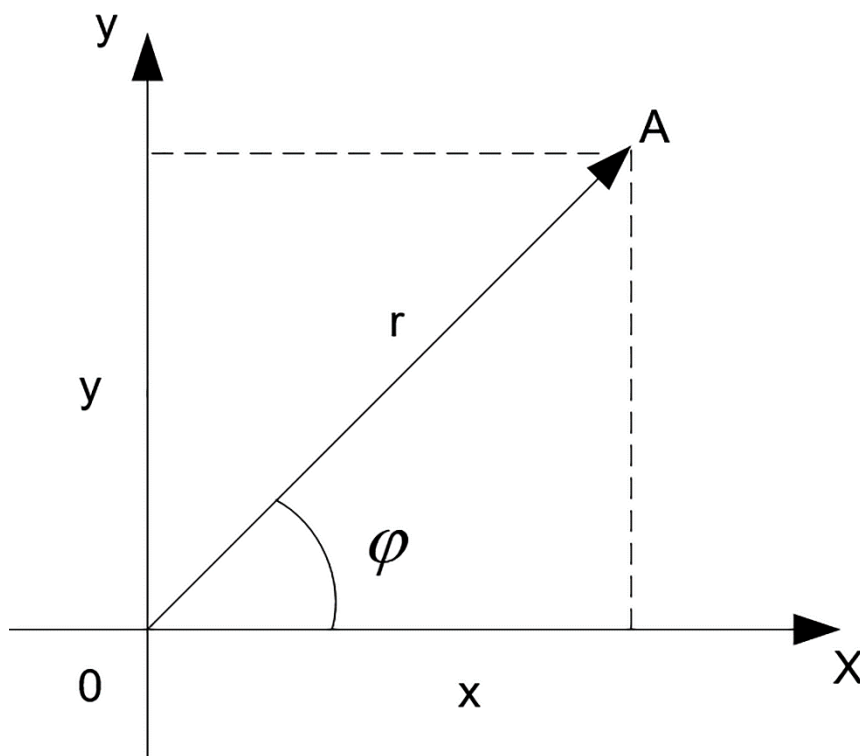
1) -2 ; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) 0 ; 4) $-\frac{2}{3}$.

4 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Число $z = x + iy$, где x и y – любые действительные числа, i – мнимая единица ($i^2 = -1$), называется комплексным числом, x называется действительной частью и обозначается $Re(z)$, а y – мнимой частью комплексного числа z и обозначается $Im(z)$, то есть $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, называются **равными** если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Если $z = x + iy$, то комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется **сопряжённым** с z .

Комплексное число $z = x + iy$ можно изображать точкой $A(x, y)$ плоскости O^{xy} или вектором $\overrightarrow{OA}$, идущим из начала координат в указанную точку (рис. 4.1).



r – модуль комплексного числа; φ – аргумент комплексного числа
 $r = |z|$; $\varphi = \arg z$

Рисунок 4.1 – Отображение комплексного числа

Если угол φ выбран в пределах от $-\pi$ до π , то его называют **главным**

значением аргумента и обозначают через $\arg z$. Модуль $r = |z|$ определяется

по формуле: $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Аргумент φ определяется из формул:

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \sin \varphi = \frac{y}{r}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как $-\pi < \arg z < \pi$, то из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & \text{для внутренних точек } I, IV \text{ четвертей} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек } II \text{ четверти} \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек } III \text{ четверти} \end{cases}$$

Формы записи комплексных чисел:

1. $z = x + iy$ – алгебраическая форма комплексного числа.
2. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ – тригонометрическая форма комплексного числа.

3. $z = r \cdot e^{i\varphi}$ – показательная форма комплексного числа

Действия над комплексными числами:

1. Сложение $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
2. Вычитание $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
3. Умножение:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$$

$$(x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$

$$r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

4. Деление:

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

5. Возведение в целую степень (формула Муавра):

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

6. Извлечение корней:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

Пример 4.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 3 + 4i$ и $z_2 = 1 - i$. Тогда $|z_1 + z_2|$ равен...

Варианты ответов:

1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) -5.

Решение:

$$z_1 + z_2 = 3 + 4i + 1 - i = 4 + 3i$$

$$z_1 + z_2 = 4 + 3i; x = 4; y = 3$$

Воспользуемся формулой: $|z_1 + z_2| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: 5.

Пример 4.2. Аргумент комплексного числа $z = 2 - 2i$ равен...

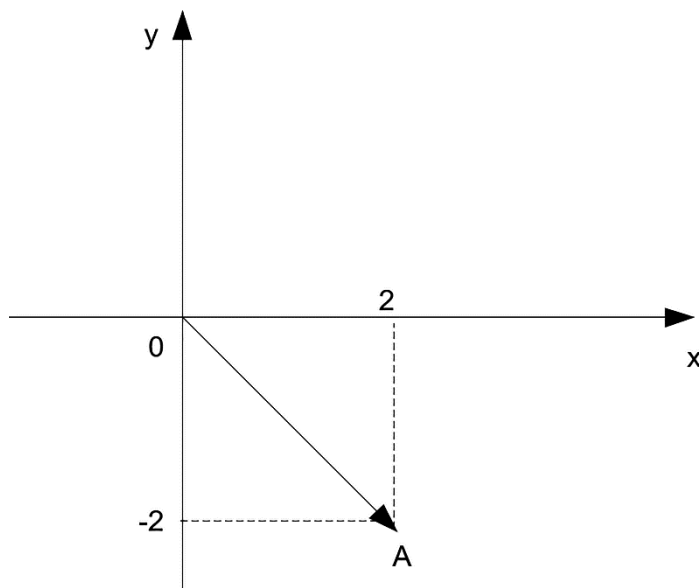
Варианты ответов:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 1.

Решение:

Изобразим комплексное число $z = 2 - 2i$ на плоскости.

По условию $x = 2; y = -2$.



Точка $A(2; -2)$ принадлежит IV четверти:

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} (-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4}$.

Пример 4.3. Если z_1 и z_2 корни квадратного уравнения $2z^2 + iz + 1 = 0$, то $z_1 + 3z_2$ равно...

Варианты ответов:

1) $0,5i$; 2) $-i$; 3) $-0,5i$; 4) i .

Решение:

Решаем уравнение $2z^2 + iz + 1 = 0$.

$$D = i^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -1 - 8 = -9$$

$$z_{1,2} = \frac{-i \pm \sqrt{-9}}{4} = \frac{-i \pm 3i}{4}, z_1 = \frac{-i - 3i}{4} = -i, z_2 = \frac{-i + 3i}{4} = \frac{i}{2}$$

Тогда $z_1 + 3z_2 = -i + \frac{3i}{2} = \frac{i}{2} = 0,5i$.

Ответ: $0,5i$.

Пример 4.4. Дана функция $f(z) = (2z - i) \cdot \operatorname{Im}(z)$. Тогда $f(1 + i)$ равно...

Варианты ответов:

1) $4 - 2i$; 2) $2 + i$; 3) $2 - i$; 4) $4 + 2i$.

Решение:

По условию $z = 1 + i, \operatorname{Im}(z) = 1, f(1 + i) = (2(1 + i) - i) \cdot 1 = 2 + 2i - i = 2 + i$.

Ответ: $2 + i$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Модуль комплексного числа $6 + 8i$ равен...

Варианты ответов:

1) 8; 2) 10; 3) 14; 4) 6.

Задание 2. Даны два комплексных числа $z_1 = 4 - 6i$ и $z_2 = 5 - 2i$. Тогда действительная часть произведения $z_1 \cdot z_2$ равна...

Варианты ответов:

1) 32; 2) -12; 3) 8; 4) 20.

Задание 3. Значение функции $f(z) = z^2 + i$ в точке $z_0 = 1 + i$ равно...

Варианты ответов:

1) $2 + 3i$; 2) $3 + 2i$; 3) $2i$; 4) $3i$.

Задание 4. Установите соответствие между комплексным числом и его модулем: 1. $3 - 4i$; 2. $-\sqrt{3} + i$; 3. $-1 - \sqrt{8i}$; 4. $5 + 12i$.

Варианты ответов:

1) 5; 2) 13; 3) 3; 4) 1; 5) 2; 6) $\sqrt{2}$.

Задание 5. Комплексное число $z = \frac{2-5i}{3+i}$ равно...

Варианты ответов:

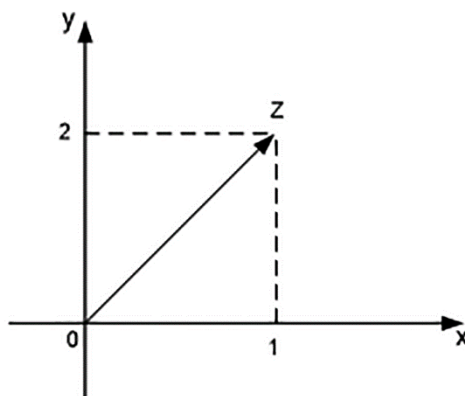
1) $0,1 - 1,7i$; 2) $\frac{11}{8} - \frac{13}{8}i$; 3) $0,5 - 1,25i$; 4) $0,1 - 1,3i$.

Задание 6. Сумма комплексных чисел $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ и $z_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$ равна...

Варианты ответов:

1) $1 - i$; 2) $2 + i$; 3) $2 - i$; 4) $1 + i$.

Задание 7. Алгебраическая форма комплексного числа, изображенного на рисунке, имеет вид...



Варианты ответов:

1) $z = \sqrt{3}$; 2) $z = 1 + 2i$; 3) $z = 1 - 2i$; 4) $z = 2 + i$.

Задание 8. Если $z = 2 + 3i$, то сопряжённое ему комплексное число $\bar{z}$ равно...

Варианты ответов:

1) $-2 + 3i$; 2) $3 - 2i$; 3) $2 - 3i$; 4) $3 + 2i$.

Задание 9. Действительная часть комплексного числа $(1 + i)^2$ равна...

Варианты ответов:

1) 1; 2) -1 ; 3) 2; 4) 0.

Задание 10. Если $f(z) = 2z^2 + 4$, тогда значение производной этой функции в точке $z_0 = 2 + i$ равно...

Варианты ответов:

1) $8 + 4i$; 2) $2 + i$; 3) $4 + 4i$; 4) $8 + i$.

Задание 11. Если z – комплексное число, $\operatorname{Re} z = 14$, $\arg z = \arccos \frac{7}{8}$, то модуль числа z равен...

Варианты ответов:

1) 16; 2) 8; 3) 10; 4) 15.

Задание 12. Установите соответствие между функцией комплексного переменного и ее значением в точке $z_0 = 1 + 3i$...

1. $f(z) = z - 1$; 2. $f(z) = 5 - 2z$; 3. $f(z) = 4z + 3$.

Варианты ответов:

1) 3; 2) $7 + 12i$; 3) $3i$; 4) $3 - 6i$; 5) $3 + 6i$.

Задание 13. Комплексное число $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ можно представить в виде...

Варианты ответов:

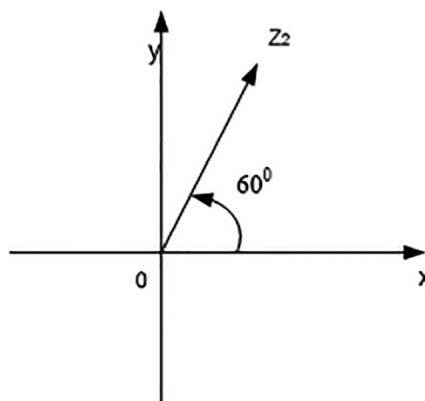
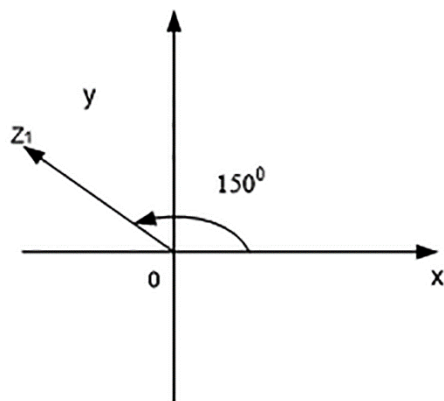
1. $-2e^{\frac{\pi}{4}i}$.

2. $2e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

3. $2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$.

4. $-2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

Задание 14. Даны два комплексных числа z_1, z_2 :



Тогда аргумент частного $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (в градусах) равен...

Варианты ответов:

1) 45° ; 2) 90° ; 3) 30° ; 4) 60° .

Задание 15. Комплексное число $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ в тригонометрической форме

имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

2. $\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

3. $2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

4. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right).$

Задание 16. Если $u_0; v_0$ являются решением системы линейных уравнений: $\begin{cases} iu + v = i \\ u - v = 2 \end{cases}$, то $u_0 + v_0$ равно...

Варианты ответов:

1) $-1 - i$; 2) 0; 3) $1 + i$; 4) $1 - i$.

Задание 17. Если $z = x + iy$ и $f(z) = 2z^3 + 3iz - 6$, то мнимая часть производной этой функции $Im(f'(x))$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $-12xy + 3$.

2. $12xy$.

3. $12xy + 3$.

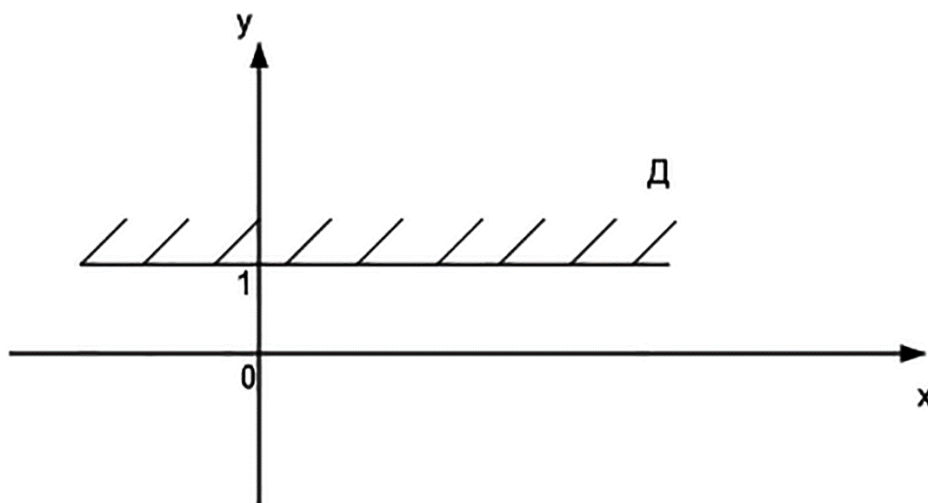
4. $6(x^2 - y^2)$.

Задание 18. Дана функция $f(z) = \frac{z}{|z|}$, тогда $f(3 - 4i)$ равно...

Варианты ответов:

1) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$; 2) $3 + 4i$; 3) $3 - 4i$; 4) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

Задание 19. Все точки $z = x + iy$ комплексной плоскости, принадлежащие множеству D , изображённому на рисунке:



удовлетворяют условию...

Варианты ответов:

1. $\operatorname{Re}(z) \geq 1$.

2. $\operatorname{Im}(z) \geq 1$.

3. $0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$.

4. $\operatorname{Im}(z) = 1$.

Задание 20. Аргумент комплексного числа $1 + i\sqrt{3}$ равен...

Варианты ответов:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{3}$.

5 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1 Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$. Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных $F(x) + C$.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ (или от выражения $f(x)dx$) называется совокупность всех её первообразных.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, где a постоянная.
5. $\int f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \dots \pm \int f_n(x)dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

Таблица 5.1 – Таблица интегралов

$\int dx = x + c$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, где $n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$	$\int \sin x dx = -\cos x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$

Продолжение таблицы 5.1

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + c$
$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + c$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + c$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right + c$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c; \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + c \end{cases}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c; \\ -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + c \end{cases}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + a} \right + c$
$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + c$	$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln f(x) + c$
$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + c$	$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1. $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t . Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

2. $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке: $\int f[\psi(x)] \cdot \psi'(x) dx = \int f(u) du$.

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по

формуле $\int u dv = u \cdot v - \int v du$, где u и v – непрерывно дифференцируемые функции от x .

Пример 5.1. Множество первообразных функций $f(x) = x \cdot \sin 3x$ описывается отношением...

Варианты ответов:

1. $-x \cdot \cos 3x + \sin 3x + C$.

2. $-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$.

3. $-\frac{x}{3} \cos 3x - \frac{1}{9} \sin 3x + C$.

4. $-\frac{x^2}{2} \cdot \cos 3x + C$.

Решение: Вычислим неопределенный интеграл $\int x \cdot \sin 3x dx$. Применим формулу интегрирования по частям. Положив $u = x$, $dv = \sin 3x dx$, найдем:

$$du = dx, v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\int x \sin 3x dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$$

Ответ: $-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$.

Пример 5.2. Неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\ln \left| \frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}+1} \right| + C$.

2. $2 \arctg t + C$.

3. $-2 \arctg \sqrt{x-1} + C$.

4. $2 \arctg \sqrt{x-1} + C$.

Решение: Сделаем замену переменной $t = \sqrt{x-1}$, подставляем в подынтегральное выражение, интегрируем и возвращаемся к переменной x :

$$\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x-1}} = \int \frac{2t dt}{(t^2 + 1) \cdot t} = \int \frac{2 dt}{t^2 + 1} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$$

Ответ: $2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C$.

5.2 Определенный интеграл

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b]$.

Сумма $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = f(c_1) \Delta x_1 + f(c_2) \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \Delta x_n$ называется **интегральной суммой** для функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Теорема существования определенного интеграла:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то предел интегральной суммы существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на части и от выбора точек c_i .

Если $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ геометрически представляет собой площадь **криволинейной трапеции** – фигуры, ограниченной линиями:

$$y = f(x), x = a, x = b, y = 0.$$

Свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.
2. $\int_a^a f(x) dx = 0$.
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, c \in [a; b]$.
4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx \pm \dots \pm \int_a^b f_n(x) dx$.
5. $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$, где C – постоянная.

6. Если $f(x)$ – нечётная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Если $f(x)$ – чётная функция ($f(-x) = f(x)$), то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$.

Правила вычисления определенного интеграла:

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

2. Интегрирование по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

где $u = u(x), v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на $[a; b]$.

3. Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

где $\varphi(t), f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ непрерывные функции на $[t_1, t_2]$; $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$

5.2.1 Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются: 1) *интегралы с бесконечными пределами*; 2) *интегралы от разрывных функций*.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, если же предел не существует или равен бесконечности – **расходящимся**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a; b]$ и непрерывна при $a \leq x < c$ и $c < x \leq b$, то полагают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx$$

Если оба предела в правой части равенства существуют, то несобственный интеграл называется **сходящимся**, в противном случае – **расходящимся**.

5.2.2 Приложения определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) > 0$), прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

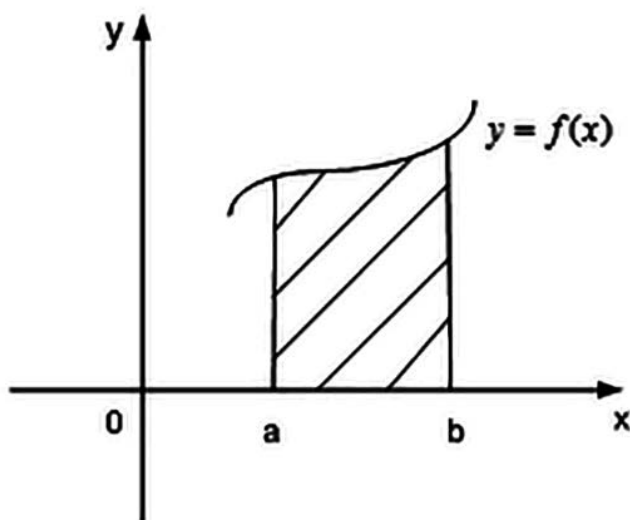


Рисунок 5.1 – Площадь криволинейной трапеции

2. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y =$

$= f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

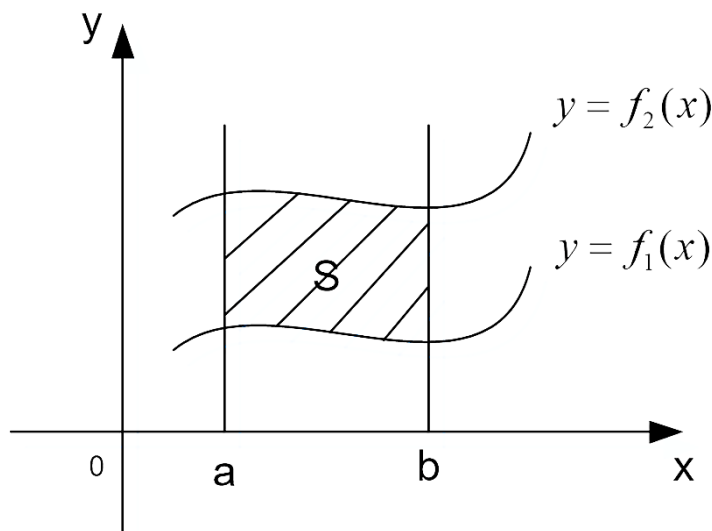


Рисунок 5.2 – Площадь ограниченной фигуры

3. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox , выражается формулой:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt, \text{ где } t_1 \text{ и } t_2 \text{ определяются из уравнений:}$$

$$a = x(t_1), b = x(t_2), y(t) \geq 0 \text{ при } t_1 \leq t \leq t_2.$$

4. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (где $\alpha < \beta$), вычисляется по формуле $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi)]^2 d\varphi$.

5. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ ($a < b$), находится по формуле $V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$.

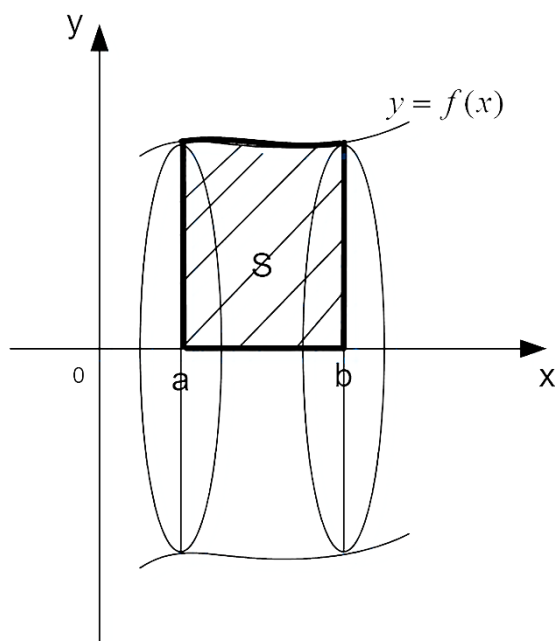


Рисунок 5.3 – Расчет объема тела, образованного вращением криволинейной трапеции

6. Объем тела вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y = c$ и $y = d$ ($c < d$), вычисляется по формуле $V_{Oy} = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$.

7. Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

8. Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то длина дуги кривой вычисляется по формуле $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$, где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

Пример 5.3. Определённый интеграл $\int_1^e \frac{(1+\sqrt{x})^2 - 1}{x \cdot \sqrt{x}} dx$ равен...

Варианты ответов:

1. $2\sqrt{e} - \frac{2}{e^2}$.

2. $2\sqrt{e}$.

3) $2(\sqrt{e} - 1)$.

4) $-2\sqrt{e}$.

Решение:

Возведем в квадрат и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(1 + \sqrt{x})^2 - 1}{x \cdot \sqrt{x}} dx &= \int_1^e \frac{(1 + 2\sqrt{x} + x - 1)}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^e \frac{2\sqrt{x} + x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \\ &= \int_1^e \left(\frac{2}{x} + x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int_1^e \frac{2dx}{x} + \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \ln e - 2 \ln 1 + 2\sqrt{e} - 2 = 2\sqrt{e} \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{e}$.

Пример 5.4. Несобственный интеграл $\int_3^{+\infty} (x - 2)^{-4} dx$ равен...

Варианты ответов:

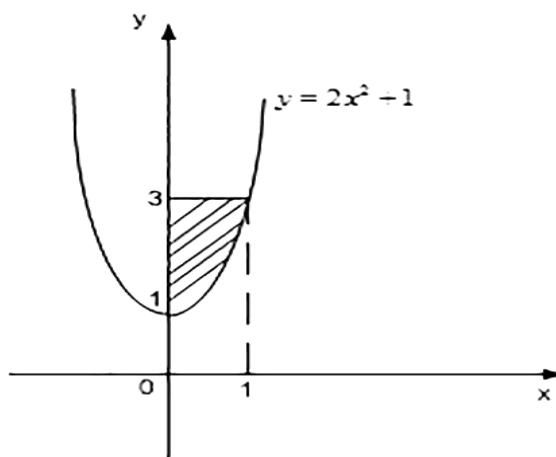
1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \int_3^{+\infty} (x - 2)^{-4} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_3^b (x - 2)^{-4} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{(x - 2)^{-3}}{-3} [3; b] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{3(x - 2)^3} \right] [3; b] = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3(b - 2)^3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Пример 5.5. Площадь изображенной фигуры определяется интегралом...



Варианты ответов:

1. $\int_0^1 (2 - 2x^2) dx$.

2. $\int_0^1 (2x^2 + 1) dx$.

3) $\int_0^3 (3 - 2x^2) dx$.

4) $\int_0^1 (2x^2 - 2) dx$.

Решение:

Площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 3$ и параболой $y = 2x^2 + 1$, находим по формуле $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dy$.

$$S = \int_0^1 (3 - (2x^2 + 1)) dx = \int_0^1 (3 - 2x^2 - 1) dx = \int_0^1 (2 - 2x^2) dx$$

Ответ: $\int_0^1 (2 - 2x^2) dx$.

Пример 5.6. Длина дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 3$ равна...

Варианты ответов:

1) 18; 2) 2; 3) $2\sqrt{3}$; 4) $\frac{14}{3}$.

Решение:

Дифференцируя, находим $y' = \sqrt{x}$, откуда $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + x}$. Следовательно, по формуле $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ имеем:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1 + x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + x)^3} [0; 3] = \frac{2}{3} \sqrt{64} - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

Ответ: $\frac{14}{3}$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Первообразными функции $y = \sin 10x$ являются...

Варианты ответов:

1) $-\cos 10x - 45$; 2) $-0,1 \cos 10x$; 3) $-0,1 \cos 10x + 31$; 4) $10 \cos 10x$.

Задание 2. Установите соответствие между интегралами и их значениями: 1. $\int \frac{dx}{(2x)^2+9}$ 2. $\int 3x^2 \cdot x dx$ 3. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

Варианты ответов:

1. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{2x}{3} + C$.

2. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2x + C$.

3. $\frac{3x^2}{2 \cdot \ln 3} + C$.

4. $\frac{1}{3} \operatorname{tg} (3x) + C$.

5. $\operatorname{tg} 3x + C$

Задание 3. Множество первообразных функции $f(x) = e^{2x}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $2e^{2x} + C$.

2. $-\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

3. $e^{2x} + C$.

4. $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

Задание 4. Укажите все верные утверждения (C – произвольная постоянная)...

Варианты ответов:

1. $\int (x^2 - 6) \cdot e^{-x} dx = \int (x^2 - 6) dx \cdot \int e^{-x} dx$.

2. $(\int (3 - 5x^2) dx)' = 3 - 5x^2$.

3. $\int 2 \ln x dx = 2 \int \ln x dx$.

4. $\int d(\sin 2x) = (\sin 2x)' + C.$

Задание 5. Множество первообразных функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C.$

2. $\frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}} + C.$

3. $\sqrt[3]{x^4} + C.$

4. $\frac{4}{3} \sqrt[3]{x^4} + C.$

Задание 6. В неопределенном интеграле $\int \frac{\sqrt{1+2 \ln x}}{x} dx$ введена новая переменная $t = 1 + 2 \ln x$. Тогда интеграл принимает вид...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt$; 2) $2 \int \sqrt{t} dt$; 3) $\int \sqrt{t} dt$; 4) $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}.$

Задание 7. Первообразными функции $y = 3x^2 - 2x + 1$ являются...

Варианты ответов:

1. $6x - 2.$

2. $3x^3 - 2x^2.$

3. $x^3 - x^2 + x - 5.$

4. $x^3 - x^2 + x + 1.$

5. $x^3 - x^2 + x$

Задание 8. Неопределённый интеграл $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$ равен...

Варианты ответов:

1. $-\frac{1}{(2x-1)^2} + C.$

2. $-\frac{1}{4(2x-1)^2} + C.$

3. $-\frac{1}{2(2x-1)^2} + C.$

4. $-\frac{1}{2(2x-1)^4} + C.$

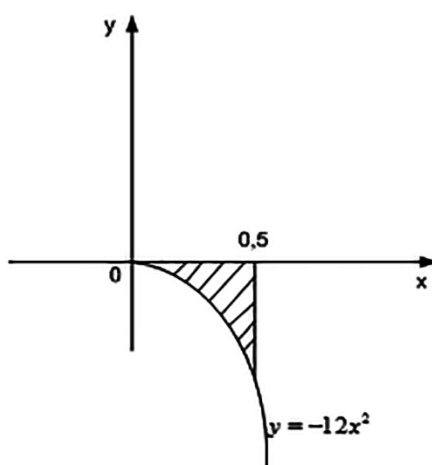
Задание 9. Ненулевая функция $y = f(x)$ является нечётной на $[-5; 5]$.

Тогда $\int_{-5}^5 f(x)dx$ равен...

Варианты ответов:

1) $10 \int_0^1 f(x)dx$; 2) $2 \int_0^5 f(x)dx$; 3) $\frac{1}{10} \int_0^1 f(x)dx$; 4) 0.

Задание 10. Мера изображенного плоского множества равна...



Варианты ответов:

1) $-0,5$; 2) 0; 3) $0,5$; 4) -6 .

Задание 11. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} (x+2)^{-4}dx$ равен...

Варианты ответов:

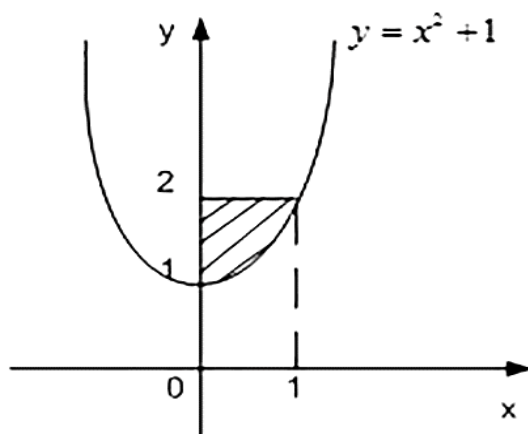
1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) -1 ; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание 12. Определенный интеграл $\int_0^3 (x+1)(x-3)dx$ равен...

Варианты ответов:

1) 9; 2) -9 ; 3) -3 ; 4) 6.

Задание 13. Площадь изображенной фигуры определяется интегралом...



Варианты ответов:

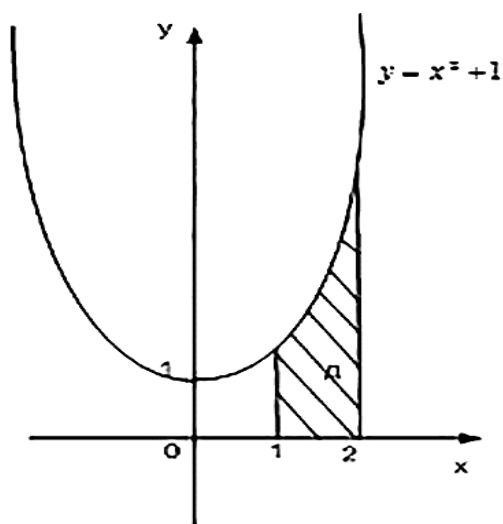
1. $\int_0^1 (1 - x^2) dx$.

2. $\int_0^1 (2 - x^2) dx$.

3. $\int_0^2 (1 - x^2) dx$.

4. $\int_0^1 (x^2 + 1) dx$.

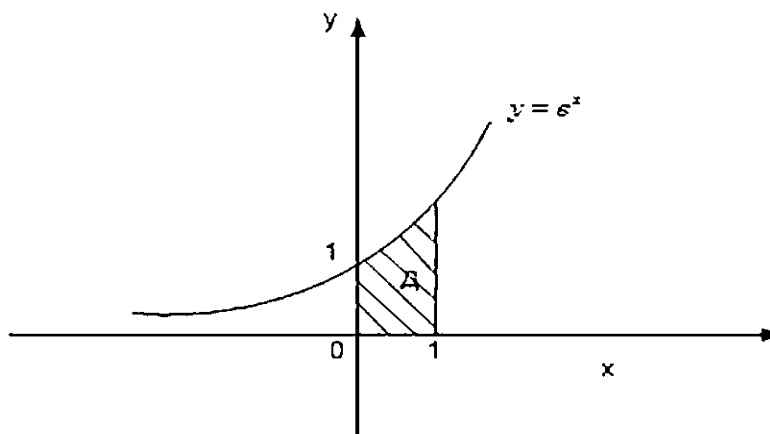
Задание 14. Площадь криволинейной трапеции Д равна...



Варианты ответов:

1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{8}{3}$; 3) $\frac{14}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$.

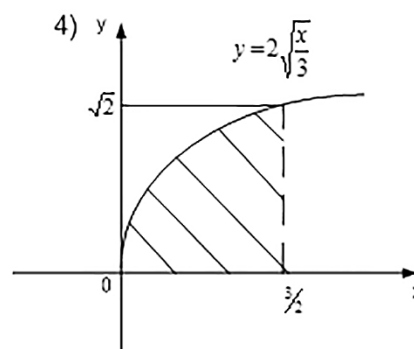
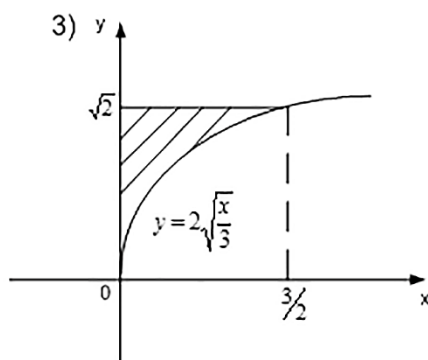
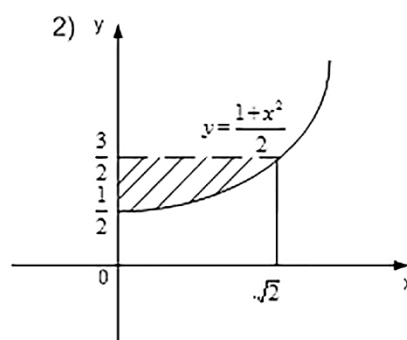
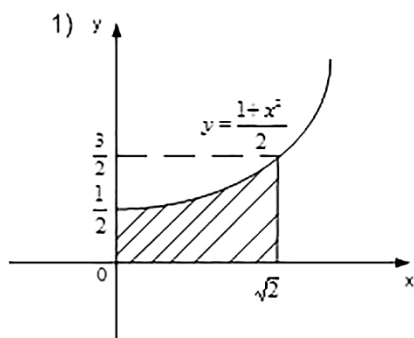
Задание 15. Площадь криволинейной трапеции Д равна...



Варианты ответов:

1) $e - 1$; 2) $2e$; 3) e ; 4) $e + 1$.

Задание 16. Установите соответствие между заштрихованными фигурами и определенными интегралами, которые выражают площади этих фигур...



Варианты ответов:

1. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1+x^2}{2} dx$.

$$2. \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - \frac{1+x^2}{2} \right) dx.$$

$$3. \int_0^{\frac{3}{2}} 2 \sqrt{\frac{x}{3}} dx.$$

$$4. \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2} - 2 \sqrt{\frac{x}{3}} \right) dx.$$

$$5. \int_0^{\frac{3}{2}} (\sqrt{2} - 2 \sqrt{\frac{x}{3}}) dx.$$

$$6. \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1+x^2}{2} dx.$$

Задание 17. Если $\int_0^1 f(x)dx = \sqrt{5} - \sqrt{2}$; $\int_0^1 q(x)dx = \sqrt{2}$, то интеграл $\int_0^1 \sqrt{5}f(x) + (\sqrt{5} + 3\sqrt{2})q(x))dx$ равен...

Варианты ответов:

1) 0; 2) -11; 3) 11; 4) $\sqrt{5}$.

Задание 18.

Если $f(x) \geq q(x)$ на $[a; b]$, то значение определенного интеграла $\int_a^b (q(x) - f(x)) \cdot (3q(x) - 2f(x))^2 dx$...

Варианты ответов:

1. Отрицательное.
2. Положительное.
3. Неположительное.
4. Неотрицательное.

Задание 19. Определенный интеграл, выражающий площадь треугольника с вершинами $(0; 0)$; $(2; 8)$; $(0; 8)$, имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\int_0^2 (4x - 8)dx$.
2. $\int_0^2 4x dx$.
3. $\int_0^2 \left(8 - \frac{x}{4} \right) dx$.

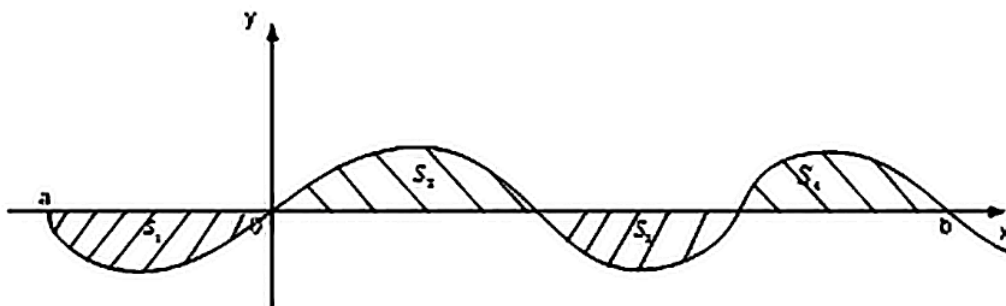
4. $\int_0^2 (8 - 4x) dx$.

Задание 20. Если $\int_0^1 3f(x) dx = -2$, $\int_1^2 f(x) dx = 3$, то $\int_0^2 3f(x) dx$ равен...

Варианты ответов:

1) 5; 2) 11; 3) 1; 4) 7.

Задание 21. Площадь изображенной фигуры определяется выражением...



Варианты ответов:

1. $S_2 - S_1 + S_3 + S_4$.

2. $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$.

3. $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$.

4. $S_2 - S_1 - S_3 + S_4$.

Задание 22. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболлами $y = 2x^2$ и $y = x^2 + 1$ равен...

Варианты ответов:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 2) π ; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{16\pi}{15}$.

Задание 23. Определенный интеграл $\int_0^2 \frac{x dx}{2+x^2}$ равен...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2} \ln 3$; 2) $\frac{1}{2} \ln 18$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание 24. Определенный интеграл $\int_1^2 \frac{(x^3+1)dx}{x^2}$ равен...

Варианты ответов:

1) 2; 2) 1; 3) $\frac{9}{4}$; 4) $\frac{15}{4}$.

Задание 25. Определенный интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos \frac{x}{2} dx$ равен...

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) π ; 4) $4\sqrt{2}$.

6 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел $(x; y)$.

Соответствие f , которое каждой паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in R$, называется функцией двух переменных, определенной на множестве D со значениями в R и записывается следующим способом $z = f(x, y)$.

Множество D называется **областью определения** функции. Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ обозначают $Z_0(x_0, y_0)$ или $Z_0 = f(M_0)$ и называют **частным значением функции**.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости XOY , в точках которой функция сохраняет постоянное значение $z = C$.

Поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = c$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x называется:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Обозначается частная производная функции: $z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной y называется:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Обозначается частная производная функции: $z'_y, \frac{\partial z}{\partial y}, f'_y(x, y)$.

Частная производная функции нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных переменных.

Полный дифференциал дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ в некоторой точке $P(x, y)$ есть выражение вида $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, где $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz \approx \Delta z$. Приближенное значение функции $f(x, y)$, в точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ вычисляется по формуле:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

Частными производными второго порядка от функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Эти производные обозначаются:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y), \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и высших порядков. Производные $f''_{xy}(x, y)$ и $f''_{yx}(x, y)$ называются **смешанными**.

Смешанные производные равны между собой. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна, то $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на ней, то касательная плоскость к поверхности в точке M_0 определяется уравнением:

$$(x - x_0) \cdot F'_x(M_0) + (y - y_0) \cdot F'_y(M_0) + (z - z_0) \cdot F'_z(M_0) = 0$$

Нормаль к поверхности в точке M_0 (прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости) определяется уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}$$

6.1 Экстремум функции двух переменных

Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой **экстремума (максимума или минимума)** функции $z = f(x, y)$, если $f(x_0, y_0)$ есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$.

Необходимый признак экстремума. Если в точке $P_0(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю или не существует хотя бы одна из них.

Точки, в которых частные производные равны нулю, либо не существуют, называются **критическими точками**.

Достаточный признак экстремума. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ является критической точкой функции $z = f(x, y)$. Вычислим в точке P_0 значения вторых частных производных функций $f(x, y)$ и обозначим:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A; f''_{xy}(x_0, y_0) = B; f''_{yy}(x_0, y_0) = C$$

Составим выражение $AC - B^2 - \Delta$, тогда:

1. Если $\Delta > 0$, то P_0 – точка экстремума (точка максимума при $A < 0$ и точка минимума при $A > 0$).
2. Если $\Delta < 0$, то в точке P_0 нет экстремума.
3. Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование.

6.2 Производная в данном направлении, градиент функции

Производной от функции $u = f(x, y, z)$ по направлению $\bar{\lambda}$ в точке M называется:

$$\lim_{|MM_1| \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{|M_1M|} = \frac{\partial u}{\partial \lambda} = u'_\lambda$$

Формула для вычисления производной по любому направлению $\bar{\lambda}$:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos \gamma$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы $\bar{\lambda}$.

В случае, если $u = f(x, y)$, то $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin \alpha$, где α – угол, образованный $\bar{\lambda}$ с осью Ox . Производная по направлению $\bar{\lambda}$ характеризует скорость изменения функции в точке M по этому направлению.

Если $\frac{\partial u}{\partial \lambda} > 0$, то функция u возрастает в направлении $\bar{\lambda}$, если $\frac{\partial u}{\partial \lambda} < 0$, то функция u в направлении $\bar{\lambda}$ убывает.

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функций $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$, называют **градиентом функции** и обозначают $gradu$, то есть:

$$gradu = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \text{ или } gradu = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$$

Производная функции по направлению $\bar{\lambda}$ связана с градиентом функции формулой $\frac{\partial u}{\partial \lambda} = |gradu| \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между вектором $gradu$ и направлением $\bar{\lambda}$.

Градиент функции указывает направление наибыстрейшего возрастания функции. Наибольшая скорость изменения функции u в точке M равна:

$$|gradu| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

6.3 Приложение функции нескольких переменных к решению экономических задач

Дана функция спроса $D = f(p, p_A, y)$, где p – цена товара, p_A – цена альтернативного товара, y – величина дохода. Рассмотрим как меняется спрос при изменении цен и доходов с помощью понятия эластичности.

1. Эластичность спроса от собственной цены при неизменных значениях цены альтернативного товара p_A и доходов y определяется по формуле:

$$E_p = \frac{p}{D} \cdot D'_p$$

Знак E_p всегда отрицательный, при $|E_p| > 1$ функция спроса эластична, $|E_p| < 1$ – неэластична.

2. Эластичность спроса цены альтернативного товара $E_{p_A} = \frac{p_A}{D} \cdot D'_{p_A}$.

E_{p_A} может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $E_{p_A} > 0$, то рост цены p_A приводит к увеличению спроса D (товар взаимозаменяемый). Если $E_{p_A} < 0$, то рост цены p_A приводит к уменьшению спроса D (товар взаимодополняемый).

3. Эластичность спроса от дохода $E_y = \frac{y}{D} \cdot D'_y$.

С ростом доходов предпочтение начинает отдаваться более качественным товарам. Поэтому для качественных товаров спрос увеличивается с ростом доходов, то есть $E_y > 0$. С другой стороны, потребление низкосортных товаров с ростом доходов уменьшается. Для таких товаров $E_y < 0$.

Полезность. Потреблению благ ставится в соответствие число U , называемое **полезностью**. Чем выше оценка, которую дает потребитель этим благам, тем больше число U .

Пусть имеется два вида товаров G_1 и G_2 ; потребитель приобретает первый

товар в количестве x_1 , а второй – в количестве x_2 . Тогда полезность представляет функцию, которая может быть записана $U = U(x_1, x_2)$. Если переменные x_1 и x_2 меняются незначительно, то результирующее изменение полезности можно приближенно получить по следующей формуле:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2$$

Предельным продуктом фактора производства называется добавочный продукт, полученный в результате добавления одной единицы данного фактора (ресурса) при неизменной величине остальных факторов производства. Если производственная функция задана $Q = f(K, L)$, то Q'_K – предельный продукт капитала, Q'_L – предельный продукт труда.

Кривые безразличия производства. Линия, в каждой точке которой различные сочетания факторов производства (капитала K и труда L) дают одно и тоже количество выпускаемой продукции, называется **изоквантой** или **кривой безразличия производства**.

Таким образом, изокванта состоит из таких пар точек (K, L) , в которых значения производственной функции одинаковы. Математически изокванта определяется уравнением $f(K, L) = Q_0$, где Q_0 – некоторая постоянная величины выпуска.

Коэффициент заменяемости ресурсов вычисляется по формуле $R = \frac{Q'_L}{Q'_K}$.

Часто используется производственная функция вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 – параметры производственной функции. Это положительные постоянные (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). **Производственная функция только что приведенного вида называется производственной функцией Кобба-Дугласа.** Она принадлежит к классу мультипликативных производственных функций. В приложениях производственной функции Кобба-Ду-

гласа $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала (объему используемых основных фондов – в отечественной терминологии), $x_1 = L$ – затратам живого труда. Тогда функция приобретает вид $Y = a_0 K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$.

Пример 6.1. Частная производная функции $z = x^4 \cdot \cos 3y$ по переменной x в точке $M(1; \frac{\pi}{6})$ равна...

Варианты ответов:

1) -1 ; 2) 0 ; 3) 1 ; 4) 4 .

Решение: При нахождении частной производной по x будем рассматривать y как величину постоянную. Тогда получим $z'_x = 4x^3 \cdot \cos 3y$. Вычисляем значение частной производной в точке $M(1; \frac{\pi}{6})$.

$$z'_x\left(1; \frac{\pi}{6}\right) = 4 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Ответ: 0.

Пример 6.2. Градиентом скалярного поля $u = xy + yz + 1$ в точке $A(1; -2; -1)$ является вектор...

Варианты ответов:

1) $-2i - \bar{j} - 2\bar{k}$; 2) $-2\bar{i} - 2\bar{k}$; 3) $-2\bar{i} + 2\bar{k}$; 4) $-2i + \bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение: Находим частные производные функции u :

$$u'_x = y; u'_y = x + z; u'_z = y$$

Вычисляем значения частных производных в точке $A(1; -2; -1)$:

$$u'_x = (1; -2; -1) = -2; u'_y = (1; -2; -1) = 0; u'_z = (1; -2; -1) = -2;$$

Получаем: $\overline{gradu}(A) = -2\bar{i} - 2\bar{k}$.

Ответ: $-2\bar{i} - 2\bar{k}$.

Пример 6.3. Дана функция полезности $u = \sqrt{xy}$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...

Варианты ответов:

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C.$

2. $\sqrt{xy} = C.$

3. $\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} = C.$

4. $\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} = C.$

Решение: Для функции полезности $u = u(x, y)$ кривая безразличия задается уравнением $u(x, y) = C$, то есть уравнением вида $\sqrt{xy} = C$.

Ответ: $\sqrt{xy} = C.$

Пример 6.4. Кривая безразличия задана уравнением $u = \sqrt{xy} = 10$, а оптимальный набор благ потребления имеет вид $x = 5, y = 20$. Тогда предельная норма замены блага x благом y равна...

Варианты ответов:

1) 4; 2) 10; 3) 0,25; 4) 2.

Решение: Предельная норма замены блага x благом y вычисляется по формуле $R = \frac{u'_x}{u'_y}$.

Тогда $R = \frac{0,5 \cdot x^{-0,5} \cdot y^{0,5}}{0,5 \cdot y^{-0,5} \cdot x^{0,5}} = \frac{y}{x}$. А в точке $(5; 20)$ $R = \frac{20}{5} = 4$.

Ответ: 4.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Частная производная функции $z = x^4 \cdot \cos y$ по переменной y в точке $M(1; \frac{\pi}{2})$ равна...

Варианты ответов:

1) -1; 2) 4; 3) 0; 4) 1.

Задание 2. Градиентом скалярного поля $u = x^2 y^3 z$ в точке $M(-1; 1; 2)$

является вектор...

Варианты ответов:

1. $-4\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}$.
2. $-2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$.
3. $-2\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$.
4. $-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$.

Задание 3. Частная производная функции $z = e^{x+y^3}$ по переменной y в точке $M(0; 1)$ равна...

Варианты ответов:

- 1) e ; 2) $2e$; 3) $3e$; 4) 3 .

Задание 4. Полный дифференциал первого порядка функции $z = \frac{x^2}{y}$ равен...

Варианты ответов:

1. $\frac{2x}{y} dx + x^2 dy$.
2. $\frac{2x}{y} dx$.
3. $\frac{2x}{y} dx - \frac{x^2}{y^2} dy$.
4. $\frac{2x}{y} dx + \frac{x^2}{y^2} dy$.

Задание 5. Приближенное значение числового выражения $1,05^{3,97}$, вычисленное с помощью полного дифференциала первого порядка функции двух переменных, равно...

Варианты ответов:

- 1) $0,8$; 2) $1,2$; 3) $1,15$; 4) 1 .

Задание 6. Частная производная z'_x функции $z = \ln(x^2 + y^2 - 3xy)$ равна...

Варианты ответов:

1. $\frac{2x-3y}{x^2+y^2-3xy}$.

2. $\frac{2y-3x}{x^2+y^2-3xy}$.

3. $\frac{1}{x^2+y^2-3xy}$.

4. $\frac{2x+2y-3(x+y)}{x^2+y^2-3xy}$.

Задание 7. Производная функции $z = \ln(3x^2 + 2xy^2)$ в точке $A(1; 2)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $B(4; -2)$ равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{11}$; 2) $\frac{74}{55}$; 3) $-\frac{1}{55}$; 4) $-\frac{2}{11}$.

Задание 8. Если $z = \sqrt{2x - 3y}$, тогда $2z'_x + z'_y$ в точке $A(2; 1)$ равно...

Варианты ответов:

1) $\frac{7}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 3; 4) $\frac{3}{2}$.

Задание 9. Градиент скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ равен нулевому вектору в точке...

Варианты ответов:

1. $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

2. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

3. $(-1; 0; 1)$.

4. $(1; 1; 1)$.

Задание 10. Модуль градиента скалярного поля $u = x^2 + xy + 2z$ в точке $A(1; 1; 1)$ равен...

Варианты ответов:

1) 4; 2) 14; 3) $\sqrt{11}$; 4) $\sqrt{14}$.

Задание 11. Дана функция $u(x, y, z) = \frac{\sin z^2}{xy}$. Установите соответствие между данными частными производными 1) $\frac{\partial u}{\partial x}$; 2) $\frac{\partial u}{\partial y}$; 3) $\frac{\partial u}{\partial z}$ и их значениями...

Варианты ответов:

1. $\frac{\sin z^2}{xy^2}$.

2. $-\frac{\sin z^2}{x^2y}$.

3. $\frac{2z \cos z^2}{xy}$.

4. $-\frac{\sin z^2}{xy^2}$.

Задание 12. Производственная функция имеет вид $Y = K^{0,5} \cdot L^{0,5}$, где K – капитал, L – труд. Тогда предельный продукт капитала $\frac{\partial Y}{\partial K}$ при $K = 8, L = 50$ равен...

Варианты ответов:

1) 0,4; 2) 20; 3) 1,25; 4) 0,2.

Задание 13. Мультипликативная производственная функция имеет вид $X = 0,8K^{0,4} \cdot L^{0,3}$, где K – капитал, L – труд. Тогда увеличение объема капитала на один процент приведет к увеличению валового выпуска на...

Варианты ответов:

1) 0,3 %; 2) 0,8 %; 3) 0,4 %; 4) 0,7 %.

Задание 14. Функция полезности потребления имеет вид $U = U(X, Y) = X^{0,4} \cdot Y^{0,5}$. Тогда при $X = Y$ предельная норма замещения продукта Y продуктом X ($k = -\frac{u'_y}{u'_x}$) равна...

Варианты ответов:

1) 1,25; 2) 0,8; 3) –0,8; 4) –1,25.

Задание 15. Дана функция полезности $U = 6\sqrt{x} + y$. Тогда кривая безразличия задается уравнением...

Варианты ответов:

1. $6y\sqrt{x} = C$.

2. $6\sqrt{x} + y = C$.

3. $\frac{6\sqrt{x}}{y} = C$.

4. $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1 = C$.

Задание 16. Для мультипликативной производственной функции $Y = 2K^{0,6} \cdot L^{0,5}$ коэффициент эластичности по капиталу равен...

Варианты ответов:

1) 1,1; 2) 0,5; 3) 0,6; 4) 3,1.

Задание 17. Функция полезности потребителя имеет вид $u = \sqrt{xy}$, а оптимальное потребление: $x = 25, y = 16$. Тогда предельная полезность блага y равна...

Варианты ответов:

1) 0,625; 2) 0,4; 3) 0,8; 4) 1,25.

Задание 18. Неоклассическая мультипликативная производственная функция может иметь вид...

Варианты ответов:

1. $Y = \frac{2K^{0,5}}{L^{0,5}}$.

2. $Y = 0,5K + 0,5L$.

3. $Y = 2K^{-0,5} \cdot L^{-0,5}$.

4. $Y = 2K^{0,5} \cdot L^{0,5}$.

Задание 19. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ функции $z = e^{5x-2y}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $25e^{5x-2y}$.

2. $4e^{5x-2y}$.

3. $5e^{5x-2y}$.

4. $-10e^{5x-2y}$.

Задание 20. Частная производная второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = x^4y^2 - 2x + 3y + 1$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $2x^4y + 3$.

2. $4x^3y^2 - 2$.

3. $2x^4y + 1$.

4. $4x^3y^2 + 1$.

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$. Условие, что при $x = x_0, y = y_0$ называется **начальным условием**. Начальное условие записывается в виде $y(x_0) = y_0$.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $\varphi = (x, c)$ является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C .

2. Каково бы ни было начальное условие $y(x_0) = y_0$, можно найти такое значение постоянной $c = c_0$, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением ДУ первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x, c_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении постоянной $c = c_0$.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется **задачей Коши**. Если общее решение ДУ первого порядка найдено в неявном виде, то есть в виде уравнения $\Phi(x, y, c) = 0$, то такое решение называется **общим интегралом ДУ первого порядка**. Уравнение $\Phi(x, y, c_0) = 0$ в этом случае называется **частным интегралом уравнения**. С геометрической точки зрения

$y = \varphi(x, c)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости OXY ; частное решение $y = \varphi(x, c_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку (x_0, y_0) .

Виды дифференциального уравнения первого порядка:

1. Уравнение с разделенными переменными имеет вид $P(x)dx + Q(y)dy = 0$. Проинтегрировав почленно уравнение, получаем общий интеграл уравнения.

2. Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ или $P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0$. Путем преобразований уравнение сводится к уравнению с разделенными переменными.

3. Уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ называется **однородным**, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного измерения, то есть $P(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^k P(x, y)$, $Q(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^k Q(x, y)$. Однородное уравнение может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. С помощью подстановки $y = u \cdot x$, где u – новая неизвестная функция, однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

4. Уравнение вида $y' + p(x)y = Q(x)$ называется **линейным**. С помощью подстановки $y = u \cdot v$, где u, v – неизвестные функции, линейное уравнение сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными.

5. Уравнение вида $y' + p(x)y = Q(x) \cdot y^n$, где $n \neq 0, n \neq 1$ называется **уравнением Бернулли**. Решается это уравнение также, как и линейное, подстановкой $y = u \cdot v$.

Пример 7.1. Уравнение $2(x^2y + \sqrt{x^2y^4 + x^4y^2})dx - x^3dy = 0$ является...

Варианты ответов:

1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка.
2. Уравнением Бернулли.

3. Однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка.

4. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Решение: Разрешим данное уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2y + \sqrt{x^2y^4 + x^4y^2})}{x^3}, y' = 2 \left(\frac{y}{x} + \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^4 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right)$$

Таким образом, y' есть функция отношения $\frac{y}{x}$, то есть данное уравнение однородное.

Ответ: однородное относительно x и y дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 7.2. Решение задачи Коши $\sqrt{x} \cdot y' = 2\sqrt{y}; y(1) = 1$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = (\sqrt{x} - 1)^2$.

2. $y = 2\sqrt{x} - 1$.

3. $y = (2\sqrt{x} - 1)^2$.

4. $y = (2\sqrt{x} + 1)^2$.

Решение: $\sqrt{x} \cdot y' = 2\sqrt{y}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

$$\sqrt{x} \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}; \sqrt{x} dy = 2\sqrt{y} dx; \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{2dx}{\sqrt{x}}; \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{x}}$$

$$2\sqrt{y} = 4\sqrt{x} + C; \sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C; y(2\sqrt{x} + C)^2$$

Подставляя начальное условие $y(1) = 1$, получим значение для C : $1 = (2 + C)^2$. Отсюда $C = -1$. Следовательно, частным решением данного уравнения является функция $y = (2\sqrt{x} - 1)^2$.

Ответ: $y = (2\sqrt{x} - 1)^2$.

Пример 7.3. Функция $y = kx^4 + 7x$ является решением дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$. Тогда значение k равно...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 2; 4) $\frac{2}{5}$.

Решение: По условию функция $y = kx^4 + 7x$ является решением дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = 2x^3$.

Подставив функцию в уравнение, получим тождество:

$$(kx^4 + 7x)' - \frac{kx^4 + 7x}{x} = 2x^3; 4kx^3 + 7 - kx^3 - 7 = 2x^3;$$
$$3kx^3 - 2x^3 = 0; x^3(3k - 2) = 0; k = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{2}{3}$.

Пример 7.4. Частный интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$ для начального условия $y(1) = \frac{\pi}{3}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + \sqrt{3}$.

2. $\operatorname{ctg} \frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + \frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $-\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| - \sqrt{3}$.

Решение: $y' = \frac{y}{x} + \cos^2 \frac{y}{x}$ – однородное уравнение.

Положим $y = u \cdot x$, тогда $y' = u'x + u$. Подставляем в исходное уравнение: $u'x + u = u + \cos^2 u$; $u'x = \cos^2 u$; $\frac{du}{dx}x = \cos^2 u$; $\frac{du}{\cos^2 u} = \frac{dx}{x}$. Получим уравнение с разделенными переменными.

Интегрируем: $\operatorname{tg} u = \ln|x| + C$. Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + C$ – общий интеграл уравнения.

Подставим начальное условие $y(1) = \frac{\pi}{3}$ в общий интеграл:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \ln 1 + C; \sqrt{3} = C$$

Следовательно, частным интегралом данного уравнения является функция: $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + \sqrt{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln|x| + \sqrt{3}$

7.2 Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка связывает независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные y' и y'' .

В общем случае записывается в виде $F(x, y, y', y'') = 0$ или (в разрешенном относительно y'' виде) $y'' = f(x, y, y')$. Начальные условия: $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, содержащая две произвольные постоянные и удовлетворяющая условиям:

1. Функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ является решением дифференциального уравнения при любых значениях c_1, c_2 .

2. Каковы бы ни были начальные условия $(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$ можно найти такие значения постоянных c_1^0, c_2^0 , что функция $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ удовлетворяет начальным условиям.

Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется функция $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ при конкретных значениях постоянных $c_1 = c_1^0, c_2 = c_2^0$.

Уравнения, допускающие понижение порядка:

1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным интегрированием n раз.

2. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$, не содержащее явно искомую функцию y . Полагая $y' = z, y'' = z'$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция, получим дифференциальное уравнение первого порядка.

3. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$, не содержащее независимую переменную x . Полагая $y' = z, y'' = z \cdot \frac{dz}{dy}$, где $z = z(y)$ – новая независимая функция, получим дифференциальное уравнение первого порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = 0$, где p, q – постоянные. Для решения уравнения составляется характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ (для его составления достаточно в уравнении заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1). Возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения действительные, различные $k_1 \neq k_2$; общее решение уравнения имеет вид: $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

2) корни характеристического уравнения действительные и равные $k_1 = k_2 = k$. Общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$.

3) корни характеристического уравнения комплексные числа: $k_{1,2} = a \pm \pm bi$. Общее решение уравнения имеет вид: $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид: $y'' + py' + qy = f(x)$, где p, q – постоянные. Общее решение уравнения $y = Y + \bar{y}$, где Y – общее решение соответствующего однородного уравнения; $\bar{y}$ – частное решение данного уравнения. Частное решение $\bar{y}$ зависит от вида функции $f(x)$. Рассмотрим некоторые частные случаи в таблице 7.1

Таблица 7.1 – Частные случаи решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

Правая часть уравнения $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения
$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ α – действительное число; $P_n(x)$ – многочлен n степени	$\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$	$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$ Q_n – многочлен n степени
	$\alpha = k$ или $\alpha = k_2$ $\alpha = k_1 = k_2$	$\bar{y} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$ $\bar{y} = x^2 \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x))$ $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены степени n и m ; α, β – действительные числа	число $\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения; число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения	$\bar{y} = e^{\alpha x} \cdot (M_e(x) \cdot \cos \beta x + N_e(x) \sin \beta x)$ где $e = \max(n, m)$ $\bar{y} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot (M_e(x) \cdot \cos \beta x + N_e(x) \sin \beta x)$

Пример 7.5. Общее решение дифференциального уравнения $y'' = e^{3x} + 5$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + 5x + C$.
2. $y = e^{3x} + x^2 + C_1x + C_2$.
3. $y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + x$.
4. $y = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$.

Решение: Последовательно интегрируя два раза данное уравнение, получим:

$$y' = \int (e^{3x} + 5)dx = \frac{1}{3}e^{3x} + 5x + C_1$$

$$y = \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} + 5x + C_1 \right) dx = \frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$$

Ответ: $\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$.

Пример 7.6. Решение задачи Коши $y'' - y' - 2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$

имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = -e^{2x} + e^{-x}$.

2. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

3. $y = e^{-2x} - e^{-x}$.

4. $y = e^{2x} - e^{-x}$.

Решение: Составим характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$. Его корни $k_1 = 2; k_2 = -1$.

Следовательно, общее решение имеет вид: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Подставляя начальные условия в систему уравнений: $\begin{cases} y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \\ y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} \end{cases}$, получим:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 3 = 2C_1 - C_2 \end{cases}$$

Решая систему уравнений найдем, $C_1 = 1; C_2 = -1$. Значит, решение удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид $y = e^{2x} - e^{-x}$.

Ответ: $y = e^{2x} - e^{-x}$.

Пример 7.7. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 25y' = e^{3x}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\bar{y} = x \cdot e^{3x} \cdot A$.

2. $\bar{y} = e^{3x} \cdot A$.

3. $\bar{y} = A e^{3x} \cdot \cos x$.

4. $\bar{y} = A$.

Решение:

Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, где $\alpha = 3, n = 0$.

Среди корней соответствующего характеристического уравнения ($k^2 + 25k; k = 0; k_1 = 0; k_2 = -25$) нет корня $k = 3$. Следовательно, частное решение этого уравнения имеет вид $\bar{y} = e^{3x} \cdot Q_0(x)$, то есть $\bar{y} = e^{3x} \cdot A$.

Ответ: $\bar{y} = e^{3x} \cdot A$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Уравнение $y' - 3xy = (x + 1)y^2$ является...

Варианты ответов:

1. Дифференциальным уравнением Бернулли.
2. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.
4. Дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными.

Задание 2. Если $y(x)$ – решение уравнения $y' = \frac{y-1}{x-2}$, удовлетворяющее условию $y(1) = -1$, тогда $y(1,5)$ равно...

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) -1; 3) 1; 4) 2.

Задание 3. Среди перечисленных дифференциальных уравнений уравнениями первого порядка являются:

Варианты ответов:

1. $2x \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$.
2. $y^2 \frac{dy}{dx} + x = 0$.
3. $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$.
4. $x \frac{d^2y}{dx^2} + xy \frac{dy}{dx} + x^2 = y$.

Задание 4. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$

имеет вид...

Варианты ответов:

1. $-\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + C.$

2. $\frac{1}{y} = -\ln(1 + x^2) + C.$

3. $-\frac{1}{y} = \operatorname{arctg} x + C.$

4. $\frac{1}{y} = \ln(1 + x^2) + C.$

Задание 5. Дано дифференциальное уравнение $y' = 5 - y$. Тогда его решением является функция...

Варианты ответов:

1) $y = e^{-x} + 5$; 2) $y = e^x + 5$; 3) $y = e^{-x} - 5$; 4) $y = e^x - 5$.

Задание 6. Функция $y = \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$ является общим решением дифференциального уравнения первого порядка. Тогда при начальном условии $y(1) = 0$ частное решение этого уравнения имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = \ln \left| \frac{2(x-3)}{x+3} \right|.$

2. $y = \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + 1.$

3. $C = \ln 2.$

4. $y = \ln \left| \frac{3(x+1)}{x+3} \right|.$

Задание 7. Дано дифференциальное уравнение $y' = (k + 1) \cdot x^2$, тогда функция $y = x^3$ является его решением при k равном...

Варианты ответов:

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3.

Задание 8. Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dy}{y^2} = x dx$ имеет вид...

Варианты ответов:

$$1. -\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

$$2. \frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

$$3. y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$4. -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Задание 9. Если дифференциальное уравнение имеет вид $xy' = y$, $y(4) = 12$, то в общем решении $y = Cx$ произвольная постоянная C равна...

Варианты ответов:

1) 3; 2) 0; 3) -3; 4) 1.

Задание 10. Уравнение $y' - \frac{y}{x} = x^3 e^x$ является...

Варианты ответов:

1. Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.
2. Дифференциальным уравнением третьего порядка.
3. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка.
4. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Задание 11. Какое из выражений является общим решением дифференциального уравнения $x^2 y' = x^3 + 1$.

Варианты ответов:

$$1. \ln|x| + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$2. \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C.$$

$$3. 1 - \frac{2}{x^3} + C$$

$$4. \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C.$$

Задание 12. Дифференциальное уравнение $(x^2 + 7xy + 2y^2)dx = x^2 dy$ путем введения новой неизвестной функции $u = u(x)$ приведено к уравнению с разделяющимися переменными. Тогда полученное уравнение имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\frac{du}{dx} = \frac{1+6u+2u^2}{x}$.

2. $\frac{du}{dx} = \frac{x}{1+6u+2u^2}$.

3. $\frac{du}{dx} = \frac{1+7u+2u^2}{x}$.

4. $\frac{du}{dx} = \frac{1+8u+2u^2}{x}$.

Задание 13. Функция $y = \frac{a}{x^3}$ будет частным решением задачи Коши: $y' + b \cdot \frac{y}{x} = 0, y(-2) = 2$ при a и b равными...

Варианты ответов:

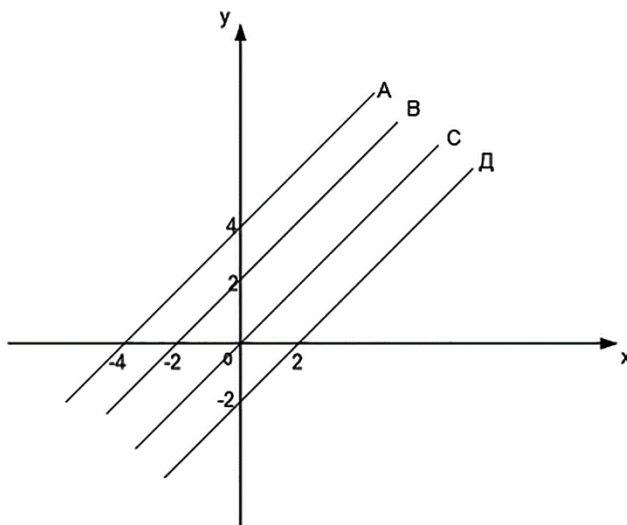
1) $a = -8, b = 1,5$; 2) $a = -2, b = 2$; 3) $a = -16, b = -3$; 4) $a = -16, b = 3$.

Задание 14. Порядок дифференциального уравнения $3y'' - y' = x^5$ равен...

Варианты ответов:

1) 5; 2) 3; 3) 1; 4) 2.

Задание 15. Дано дифференциальное уравнение $xy' = y - 4$ при $y(2) = 6$. Тогда интегральная кривая, которая определяет решение этого уравнения имеет вид...



Варианты ответов:

1) А; 2) В; 3) С; 4) Д.

Задание 16. Дано дифференциальное уравнение $y'' + 5y' + 6y = 0$. Тогда соответствующее ему характеристическое уравнение имеет вид...

Варианты ответов:

1. $k^2 + 5k + 6 = 0$.

2. $1 + 5k + 6k^2 = 0$.

3. $k^2 - 5k + 6 = 0$.

4. $k^2 - 5k - 6 = 0$.

Задание 17. Порядок дифференциального уравнения $y'' - y' \cdot \operatorname{tg} x = \cos x$ можно понизить заменой...

Варианты ответов:

1) $y'' = z(x)$; 2) $y'' = z(y)$; 3) $y' = z(y)$; 4) $y' = z(x)$.

Задание 18. Общее решение дифференциального уравнения $y''' = x + 2$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

2. $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$.

3. $y = x^4 + x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

4. $y = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

Задание 19. Функция $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения. Тогда его характеристическое уравнение имеет вид...

Варианты ответов:

1. $k^2 + k - 6 = 0$.

2. $k^2 + 3k - 4 = 0$.

3. $k^2 - k - 2 = 0$.

4. $k^2 + k - 2 = 0$.

Задание 20. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его характеристическим уравнением:

1. $9y'' + 6y' - 2y = 0$.

2. $9y'' - 2y' = 0$.

3. $9y'' + 6y' = 0$.

Варианты ответов:

1. $6k^2 - 2k = 0$.

2. $9k^2 - 2k = 0$.

3. $9k^2 - 2 = 0$.

4. $9k^2 + 6k = 0$.

5. $9k^2 + 6k - 2 = 0$.

Задание 21. Установите соответствие между дифференциальными уравнениями и их характеристическими уравнениями...

1. $y^{IV} - 4y''' - y'' = 0$.

2. $y^{IV} - 4y''' - y'' + y' = 0$.

3. $y^{IV} - 4y''' - y' + y = 0$.

Варианты ответов:

1. $k^4 - 4k^3 - k^2 + k = 0$.

2. $k^4 - 4k^3 - k + 1 = 0$.

3. $k^3 - k^2 - k = 0$.

4. $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$.

5. $k^4 - 4k^3 - k^2 = 0$.

Задание 22. Дано дифференциальное уравнение $y'' - 4y' - 5y = 2e^{5x}$.
Общим видом частного решения данного уравнения является...

Варианты ответов:

1. $\bar{y} = C_0 \cos 5x + C_1 \sin 5x$.

2. $\bar{y} = C_0 + C_1 x$.

3. $\bar{y} = C_0 x e^{5x}$.

4. $\bar{y} = C_0 e^{5x}$.

Задание 23. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 6y' + 9y = 0$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}; C_1, C_2 \in R$.

2. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x}; C_1, C_2 \in R$.

3. $y = C_1 e^{3x} + x \cdot e^{3x}; C_1 \in R$.

4. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}; C_1, C_2 \in R$.

Задание 24. Решение задачи Коши $y'' + 3y' - 4y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 0$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y = 4e^x + e^{-4x}$.

2. $y = e^x + 4e^{-4x}$.

3. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$.

4. $y = 4e^{-x} + e^{4x}$.

Задание 25. После понижения порядка дифференциальное уравнение $(1 + 2x^2)y'' + (y')^2 + 2 = 0$ приводится к виду...

Варианты ответов:

1. $(1 + 2x^2) \cdot p \cdot p' + (p \cdot p')^2 + 2 = 0$.

2. $(1 + 2x^2) \cdot p' + p^2 + 2 = 0$.

3. $(1 + 2x^2) \cdot p' \cdot p + p^2 + 2 = 0$.

4. $(1 + 2x^2) \cdot p' + (p \cdot p')^2 + 2 = 0$.

Задание 26. Корни характеристического уравнения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $k_1 = 2, k_2 = 3$. Тогда это уравнение имеет вид...

Варианты ответов:

1. $y'' + 2y' + 3y = 0$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 2x + 3$.
3. $y'' - 5y' + 6y = 0$.
4. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

Задание 27. Частному решению линейного неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = x + 1$ по виду его правой части соответствует функция...

Варианты ответов:

1. $y = e^{2x}(Ax + B)$.
2. $y = Ae^{2x} + Be^{3x}$.
3. $y = Ax + B$.
4. $y = Ax^2$.

8 РЯДЫ

8.1 Числовые ряды

Выражение вида $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n \in R$, называется **числовым рядом**. Числа $u_1, u_2, \dots, u_n$, называются **членами ряда**, число u_n – **общим членом ряда**.

Сумму первых n членов числового ряда обозначают через S_n и называют **n -й частичной суммой ряда**: $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$.

Ряд называется **сходящимся**, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S называют **суммой ряда**. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд называется **расходящимся**.

Ряд вида $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n$, составленный из членов любой убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся при $|q| < 1$ и имеет сумму $S = \frac{a}{1-q}$. Если $|q| \geq 1$, то ряд расходится.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, называемый **гармоническим**, расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, называемый **рядом Дирихле**, (обобщенным гармоническим рядом), сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leq 1$.

Если ряд сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (*необходимый признак сходимости ряда*). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится (*достаточный признак расходимости ряда*).

Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами:

1. Первый признак сравнения. Даны два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (8.1)$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots \quad (8.2)$$

1) если $u_n \leq v_n$ и ряд (8.2) сходится, то сходится и ряд (8.1);

2) если $u_n \geq v_n$ и ряд (8.2) расходится, то расходится и ряд (8.1).

2. Второй признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

3. Признак Даламбера. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то:

1) при $l < 1$ ряд сходится;

2) при $l > 1$ ряд расходится;

3) при $l = 1$, вопрос остается нерешенным, необходимо применить другой признак.

4. Радиальный признак Коши. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то:

1) при $l < 1$ ряд сходится;

2) при $l > 1$ ряд расходится;

3) при $l = 1$, вопрос остается нерешенным, необходимо применить другой признак.

5. Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ при $x \geq 1$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где $u_n = f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

Знакопередающимся рядом называется ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot u_n$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$ (то есть ряд знаки членов которого строго чередуются)

Признак Лейбница. Знакопередающийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю, то есть выполняются два условия:

$$1) u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Знакопередающийся ряд (с членами разных знаков) имеет вид (8.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (8.3)$$

называется **абсолютно сходящимся рядом**, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (8.4)$$

Сходящийся знакопередающийся ряд (8.3) называется **условно сходящимся**, если ряд (8.4) расходится.

Пример 8.1. Сходящимся числовым рядом является...

Варианты ответов:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \arctg n.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}.$$

Решение:

1. Применим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg n$ необходимый признак сходимости

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Необходимый признак сходимости не выполняется. Следовательно, ряд расходится.

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ расходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{3}{2} > 1$.

3. Применим к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 = 1 \neq 0$$

Необходимый признак сходимости не выполняется. Следовательно, ряд расходится.

4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$ сходится, так как его члены образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{7}{10} < 1$.

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$.

Пример 8.2. Согласно признаку Даламбера числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n} \dots$

Варианты ответов:

1) сходится; 2) расходится; 3) условно сходится; 4) абсолютно расходится.

Решение: Здесь $u_n = \frac{n!}{10^n}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$.

Вычислим $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1) \cdot 10^n}{10^n \cdot 10 \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{10} = \infty$.

Так как $l = \infty > 1$, то ряд расходится.

Ответ: ряд расходится.

Пример 8.3. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an+2}{3n+1}\right)^n$ сходится при значениях a , равных... Укажите не менее двух вариантов ответа.

Варианты ответов:

1) 4; 2) 2; 3) 1; 4) 3.

Решение: По радикальному признаку Коши, числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$. В нашем случае:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 2}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{a}{3} < 1; a < 3$$

Из предложенных вариантов этому условию удовлетворяют значения единицы и двух.

Ответ: 1 и 2.

Пример 8.4. Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \dots$

Варианты ответов:

1) расходится; 2) абсолютно сходится; 3) условно сходится.

Решение: Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине, стремясь к нулю:

$$1) 1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \dots; 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда.

Применим интегральный признак Коши:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x-1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln|2b-1| - \ln 1) = +\infty$$

Согласно интегральному признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ условно сходится.

Ответ: условно сходится.

8.2 Функциональные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x , называется функциональным:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (8.5)$$

Совокупность значений x , при которых ряд (8.5) сходится, называется **областью сходимости** функционального ряда.

Функциональный ряд вида (8.6) называется **степенным**:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (8.6)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – постоянные числа (**коэффициенты ряда**);
 x_0 – фиксированное число.

При $x_0 = 0$, получаем степенной ряд вида (8.7):

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (8.7)$$

Областью сходимости степенного ряда (8.7) служит интервал $(-R; R)$ числовой оси, симметричный относительно точки $x = 0$, дополненный, быть может, его концами. Этот интервал, называемый **интервалом сходимости**, обладает тем свойством, что при всех $|x| < R$ ряд **сходится** и притом абсолютно, а при всех $|x| > R$ – **расходится**. На концах интервала сходимости, то есть в точках $x = -R$ и $x = R$, возможна как сходимость, так и расходимость степенного ряда.

Для степенного ряда вида (8.6) интервалом сходимости служит интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, симметричный относительно точки x_0 . Число R – половина

длины интервала сходимости (называется **радиусом сходимости** степенного ряда). Если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь при $x = x_0$; если $R = \infty$, то ряд сходится на всей числовой оси.

Радиус сходимости степенного ряда определяется формулой:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ или } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Если $x_0 = 0$, то получается ряд:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

который называется **рядом Маклорена**.

Разложения некоторых элементарных функций в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < \infty$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots, -1 < x < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, -1 < x < 1$$

$$\ln|1+x| = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + \dots, -1 < x < 1$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, -1 < x < 1$$

Тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ называется ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

коэффициенты которого, называемые **коэффициентами Фурье** для $f(x)$, вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1; 2; 3 \dots),$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n = 1; 2; 3 \dots),$$

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, удовлетворяет в этом промежутке двум условиям:

1) $f(x)$ кусочно-непрерывна, то есть непрерывна или имеет конечное число точек разрыва I рода;

2) $f(x)$ кусочно-монотонна, то есть монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна. Тогда соответствующий функции $f(x)$ ряд Фурье сходится на этом отрезке, и при этом:

1) в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x) = f(x)$;

2) в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна: $S(x_0) = \frac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$, то есть равна среднему арифметическому пределов функции $f(x)$ справа и слева;

3) в точках $x = -l$ и $x = l$ (на концах отрезка) сумма ряда равна $S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

Если функция $f(x)$ – **четная**, то есть $f(-x) = f(x)$, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx, b_n = 0$$

Таким образом, **четная функция разлагается в ряд Фурье по косинусам:**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l}$$

Если функция $f(x)$ – **нечетная**, то есть $f(-x) = -f(x)$, то:

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Таким образом, **нечетная функция разлагается в ряд Фурье по синусам:**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Пример 8.5. Область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^n}$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $[-1; 1]$; 2) $[-4; 4]$; 3) $(-4; 4)$; 4) $[-4; 4)$.

Решение: Найдем радиус сходимости по формуле $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$\text{Здесь } a_n = \frac{1}{n \cdot 4^n}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 4^{n+1}}.$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) \cdot 4^{n+1}}{n \cdot 4^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot 4^n \cdot 4}{n \cdot 4^n} = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 4$$

Интервал сходимости имеет вид $(-R; R)$, то есть $(-4; 4)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости. При $x = 4$ получаем гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится. При $x = -4$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, который сходится согласно признаку Лейбница ($1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$). Итак, интервал сходимости

имеет вид $[-4; 4)$.

Ответ: $[-4; 4)$.

Пример 8.6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 1)^n$ равен 6. Тогда интервал сходимости этого ряда имеет вид...

Варианты ответов:

1) $(0; 7)$; 2) $(-5; 7)$; 3) $(5; 7)$; 4) $(-6; 6)$.

Решение: Для степенного ряда интервал сходимости имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$. Здесь $x_0 = 1, R = 6$. Получаем $(-5; 7)$.

Ответ: $(-5; 7)$.

Пример 8.7. Ряд Маклорена для функции e^{-x^2} имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x^2)^n}{n}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot x^n}{n!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}$.

Решение: Ряд Маклорена для функции e^x имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Заменяя x на $-x^2$, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}$$

Ответ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{n!}$.

Пример 8.8. Если $f(x) = x^4 - 1$, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$ равен...

Варианты ответов:

1) 0,2; 2) -1; 3) 1; 4) 0.

Решение: Вычислим значения данной функции и ее последовательных производных при $x = 1$:

$$f(x) = x^4 - 1, a_0 = f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f'(x) = 4x^3, a_1 = f'(1) = 4$$

$$f''(x) = 12x^2, a_2 = f''(1) = 12$$

$$f'''(x) = 24x, a_3 = f'''(1) = 24$$

$$f^{(4)}(x) = 24, a_4 = f^{(4)}(1) = 24$$

$$f^{(5)}(x) = 0, a_5 = f^{(5)}(1) = 0$$

Ответ: 0.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Общий член числовой последовательности

$-\frac{1}{4}; \frac{5}{16}; -\frac{9}{64}; \frac{13}{256} \dots$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\frac{(1)^{n \cdot (4n+1)}}{4n}$.

2. $\frac{(-1)^{n+1} \cdot (4n-3)}{4^n}$.

3. $\frac{(-1)^n \cdot (4n+1)}{4^n}$.

4. $\frac{(-1)^n \cdot (4n-3)}{4^n}$.

Задание 2. Если формула n -го члена числовой последовательности имеет

вид $x_n = \frac{n+1}{n^2+2}$, то x_5 равно...

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{3}{19}$; 3) $\frac{5}{18}$; 4) $\frac{1}{5}$

Задание 3. Установите соответствие между числовой последовательностью и формулой ее общего члена:

1. $1, \frac{5}{4 \cdot 2!}, \frac{10}{8 \cdot 3!}, \dots$

2. $\frac{2 \cdot 2}{1!}, \frac{2^2 \cdot 3}{2!}, \frac{2^3 \cdot 4}{3!}, \dots$

3. $\frac{3}{2!}, \frac{9}{4!}, \frac{19}{6!}, \dots$

Варианты ответов:

1. $a_n = \frac{2n^2+1}{(2n)!}$.

2. $a_n = \frac{2^n \cdot (n+1)}{n!}$.

3. $a_n = \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!}$.

4. $a_n = \frac{2n^2}{(2n)!}$.

Задание 4. Частичная сумма первых пяти членов числового ряда: 11, 13, 15, ... равна...

Варианты ответов:

1) 75; 2) 47,5; 3) 80; 4) 19.

Задание 5. Сумма числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{625}$; 4) $\frac{5}{4}$

Задание 6. Установите соответствие между рядами и их названиями:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{n^2}$.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3+n^2}.$$

Варианты ответов:

1. Знакоположительный.
2. Знакопередающийся.
3. Степенной.

Задание 7. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = 4a_n - 9, a_1 = 3$. Тогда четвертый член этой последовательности a_4 равен...

Варианты ответов:

- 1) 3; 2) -13; 3) -61; 4) -5.

Задание 8. Необходимый признак сходимости не выполнен для рядов...

Варианты ответов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{3n^2-2}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1}{n} + 2 \right).$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+4}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3}{n+7}.$

Задание 9. Сходящимся числовым рядом является...

Варианты ответов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}.$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[8]{n^3}}.$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+10}.$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{n^2+6n-1}.$

Задание 10. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$, то числовой ряд сходится при l , равном...

Варианты ответов:

1) 1,5; 2) 2; 3) 0,5; 4) –2.

Задание 11. Установите соответствие между видами сходимости и знакопеременными рядами:

1. Абсолютно сходится.
2. Условно сходится.
3. Расходится.

Варианты ответов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-1}$.

Задание 12. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ равен 10. Тогда интервал сходимости имеет вид...

Варианты ответов:

1) (0; 10); 2) (–10; 10); 3) (–10; 0); 4) (–5; 5].

Задание 13. Если радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 7)^n$ равен 3, то интервал сходимости имеет вид...

Варианты ответов:

1) (–3; 3); 2) $(-\infty; 4) \cup (10; +\infty)$; 3) (4; 10); 4) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$..

Задание 14. Количество целых чисел, принадлежащих интервалу сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{9n \sqrt[3]{9n^2 + 1}}$ равно...

Варианты ответов:

1) 8; 2) 5; 3) 9; 4) 7.

Задание 15. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n}$ имеет вид $(a; b)$. Тогда $a + b$ равно...

Варианты ответов:

- 1) 1; 2) -2 ; 3) 0; 4) 2.

Задание 16. Интервал $(0; 2)$ является интервалом сходимости степенного ряда...

Варианты ответов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x - 1)^n$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x + 2)^n$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (x - 1)^n$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (x - 2)^n$.

Задание 17. Если $f(x) = x^3 - 3$, то коэффициент a_4 разложения данной функции в ряд по степеням $(x - 3)$ равен...

Варианты ответов:

- 1) 3; 2) 0; 3) 1; 4) 0,25.

Задание 18. Первый, отличный от нуля, коэффициент разложения функции $y = 3e^x$ в ряд Тейлора по степеням x равен...

Варианты ответов:

- 1) 0; 2) 1; 3) 3; 4) 4.

Задание 19. Разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = \cos 2x$ имеет вид...

Варианты ответов:

1. $1 - x^2 + 4x^4 + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 4^{n-1} \cdot x^{2n}}{n!} + \dots$.
2. $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \dots$.

3. $1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 4^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

4. $2 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \dots + \frac{(-1)^n \cdot 2x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

Задание 20. Дана функция $f(x) = x^4 - 2, x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициент b_5 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен...

Варианты ответов:

1) $\frac{5}{\pi}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) π ; 4) 0.

Задание 21. Функция $y = f(x)$, заданная на отрезке $[-2; 2]$, является четной. Тогда разложение этой функции в ряд Фурье может иметь вид...

Варианты ответов:

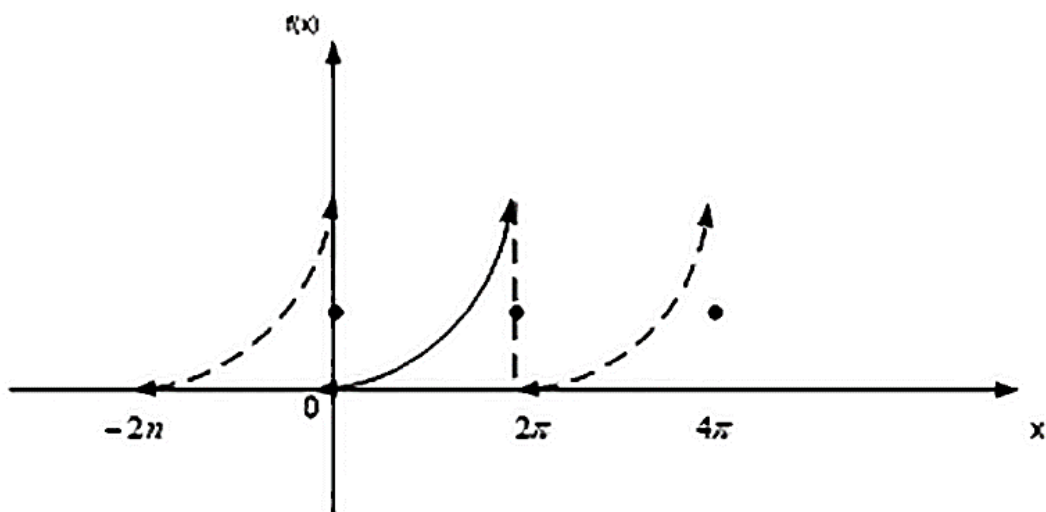
1. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2}$.

2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{2}$.

3. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{2}$.

4. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{2}$.

Задание 22. График функции $f(x)$ при $x \in [0; 2\pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рисунке:

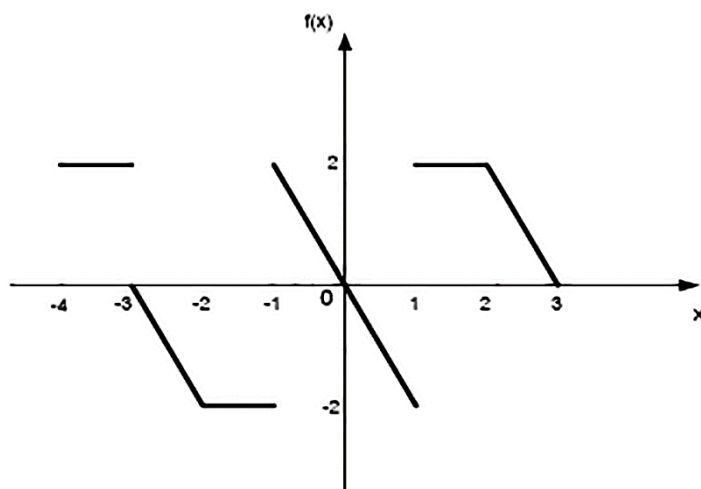


Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид...

Варианты ответов:

1. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$.
2. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$.
4. $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$.

Задание 23. График периодической функции имеет вид:



$S(x)$ – сумма ряда Фурье для этой функции. Тогда сумма $S(0)$ равна...

Варианты ответов:

- 1) 2; 2) 0; 3) -2; 4) 1.

Задание 24. Если $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4x + 1$, то коэффициент a_2 разложения $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 3)$ равен...

Варианты ответов:

- 1) -49; 2) -6; 3) 24; 4) 12.

Задание 25. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{4n}\right)^n x^n$ равен...

Варианты ответов:

- 1) 0,25; 2) 3; 3) 4; 4) 2.

9 ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

9.1 Случайные события

Испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий. **Результатом испытания** является событие. События обозначают буквами: $A, B, C, \dots$. Событие, которое в результате испытания может произойти или не произойти, называется **случайным событием**. Событие, которое в результате испытания обязательно произойдет, называется **достоверным событием**. Событие, которое в результате испытания никогда не произойдет, называется **невозможным событием**. События называются **несовместными**, если в результате испытания появление одного из них исключает появление остальных событий. События называются **совместными**, если в результате испытания появление одного из этих событий не исключает возможность появления другого. Совокупность несовместных событий называется **полной группой**, если в результате испытания одно из них обязательно произойдет. Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**. Противоположное событию A событие обозначают $\bar{A}$.

Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее в появлении события A или события B , или обоих событий вместе.

Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий. **Вероятность** – числовая характеристика возможности появления случайного события в определенных условиях, которые могут быть произведены неограниченное число раз.

Вероятность случайного события A обозначается через $P(A)$.

Классическое определение вероятности. $P(A) = \frac{m}{n}$, где m – число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A ;

n – общее число возможных элементарных исходов испытания.

Из определения вероятности события следует, что $0 \leq P(A) \leq 1$.

Основные формулы комбинаторики:

1. Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

2. Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

3. Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Основные формулы:

1. Формулы сложения вероятностей несовместных событий.

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

где события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

2. Формула сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

3. Формула умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

4. Формула умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

5. Вероятность появления хотя бы одного события: $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n$.

6. Формула полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

7. Формула Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

8. Формула Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

9. Локальная теорема Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

10. Интегральная теорема Лапласа:

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'), \text{ где } x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

11. Формула Пуассона: $P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, где $\lambda = n \cdot p$.

Пример 9.1. В урне пять белых и три черных шаров. Из урны вынимают четыре шара. Тогда вероятность того, что среди четырех шаров будет один белый, равна...

Варианты ответов:

$$1) \frac{1}{14}; 2) \frac{1}{5}; 3) \frac{2}{15}; 4) \frac{1}{15}.$$

Решение: Общее число возможных элементарных исходов испытания $n = C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$.

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию (среди четырех шаров ровно один белый): один белый шар можно взять из пяти белых шаров C_5^1 способами; при этом остальные три шара должны быть черными; взять три черных шара из трех черных шаров можно C_3^3 способами, то есть $m = C_5^1 \cdot C_3^3 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 5$. Вероятность данного события

равна: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

Ответ: $\frac{1}{14}$.

Пример 9.2. Вероятность совместного появления герба при одном бросании двух монет равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 1.

Решение: Вероятность появления герба первой монеты (событие A): $P(A) = \frac{1}{2}$. Вероятность появления герба второй монеты (событие B): $P(B) = \frac{1}{2}$.

События A и B независимые, поэтому искомая вероятность по теореме умножения равна: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{4}$.

Пример 9.3. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Тогда вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{5}{6}$.

Решение: Вероятность того, что первая деталь окажется окрашенной (событие A) $P(A) = \frac{3}{5}$. Вероятность того, что вторая деталь окажется окрашенной (событие B), при условии, что первая извлеченная деталь окрашенная, то есть условная вероятность $P_A(B) = \frac{5}{9}$. Вероятность того, что деталь окажется окрашенной (событие C), при условии, что две извлеченные детали окрашенные, то есть условная вероятность $P_{AB}(C) = \frac{1}{2}$.

Искомая вероятность по теореме умножения равна:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Пример 9.4. С первого станка на сборку поступает 60 %, со второго – 40 % всех деталей. Среди деталей первого станка 70 % стандартных деталей, второго – 80 %. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Тогда вероятность того, что она изготовлена на втором станке, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{21}{37}$; 2) $\frac{16}{37}$; 3) $\frac{7}{19}$; 4) $\frac{8}{25}$.

Решение: Обозначим через A событие – извлеченная деталь стандартна. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1 – деталь изготовлена на первом станке, B_2 – деталь изготовлена на втором станке. По условию задачи имеем $P(B_1) = 0,6$; $P(B_2) = 0,4$; $P_{B_1}(A) = 0,7$; $P_{B_2}(A) = 0,8$.

Вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной, по формуле полной вероятности равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,42 + 0,32 = 0,74.$$

Искомая вероятность того, что взятая стандартная деталь изготовлена на втором станке, по формуле Бейеса равна $P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,8}{0,74} = \frac{16}{37}$.

Ответ: $\frac{16}{37}$.

9.2 Случайные величины

Случайной величиной называется величина X , которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное. Если значения, которые может принимать случайная величина X , образуют конечный или бесконечный ряд чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то случайная

величина X называется **дискретной**. Если значения, которые может принимать случайная величина X , заполняют целый конечный или бесконечный промежуток числовой оси OX , то случайная величина X называется **непрерывной**.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Для дискретной случайной величины закон распределения задается таблицей 9.1.

Таблица 9.1 – Закон распределения для дискретной случайной величины

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

При этом $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x , то есть $F(x) = P(X < x)$. Часто вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция распределения».

Свойства функции распределения $F(x)$:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$.
2. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.
3. $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.
4. $P(X = x_i) = 0$.
5. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют первую производную от функции распределения $f(x) = F'(x)$. Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$. Часто вместо термина «плотность распределения» используют термины «плотность вероятностей» и «дифференциальная

функция».

Свойства плотности распределения $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$.

Числовые характеристики случайных величин:

1. Математическое ожидание:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \text{ — для дискретной случайной величины;}$$

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \text{ — для непрерывной случайной величины.}$$

Свойства математического ожидания:

1. $M(C) = C$, где C — постоянная величина.
2. $M(CX) = C \cdot M(X)$.
3. $M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)$.
4. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ — независимые случайные величины.

2. Дисперсия:

$$\left. \begin{aligned} D(X) &= \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i \\ D(X) &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i - M^2(X) \end{aligned} \right\} \text{ для дискретной случайной величины;}$$

$$\left. \begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - M(X)]^2 \cdot f(x)dx \\ D(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X) \end{aligned} \right\} \text{ для непрерывной случайной величины.}$$

Свойства дисперсии:

1. $D(C) = 0$, где C — постоянная величина.

$$2. D(C \cdot X) = C^2 D(X).$$

3. $D(X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$, где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – независимые случайные величины.

3. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Биномиальное распределение:

Закон распределения: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Параметры распределения: $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Пуассоновское распределение:

Закон распределения: $P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$.

Параметры распределения: $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Нормальное распределение:

Закон распределения: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Параметры распределения: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.

Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Равномерное распределение:

Закон распределения: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } x \in (a, b) \\ 0 & \text{при } x \notin (a, b) \end{cases}$.

Параметры распределения: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$, $\sigma(X) = \frac{|a-b|}{2\sqrt{3}}$.

Показательное распределение:

Закон распределения: $f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Параметры распределения: $M(X) = \frac{1}{\lambda}$, $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Пример 9.5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	4	6
P	0,1	a	0,6	0,1

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 10 \cdot M(X)$ равно...

Варианты ответов:

1) 35; 2) 10; 3) 40; 4) 20.

Решение: Найдем сначала значение параметра a . Так как:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \text{ то } a = 1 - 0,1 - 0,6 - 0,1 = 0,2.$$

Тогда найдем $M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$.

$$M(X) = 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,1 = 3,5.$$

$$\text{Следовательно, } Y = 10 \cdot M(X) = 10 \cdot 3,5 = 35.$$

Ответ: 35.

Пример 9.6. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ cx, & 1 < x \leq 12 \\ 0, & x > 12 \end{cases}$. Тогда вероятность попадания X в интервал $(2, 3)$ равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{2}{143}$; 2) $\frac{1}{11}$; 3) $\frac{1}{12}$; 4) $\frac{5}{143}$.

Решение: Сначала найдем значение параметра c . По свойствам плотности распределения вероятностей $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^1 0dx + \int_1^{12} cxdx + \int_{12}^{+\infty} 0dx = c \frac{x^2}{2} [1; 12] = c \cdot \frac{143}{2} = 1$$

$$\text{Следовательно, } c = \frac{2}{143}.$$

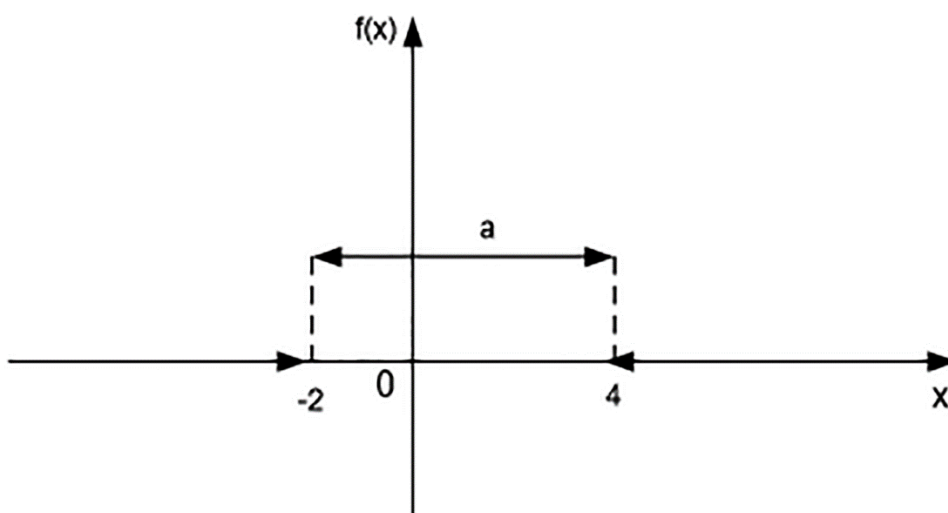
Вероятность попадания X в интервал $(2, 3)$ вычислим по формуле:

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 f(x)dx, P(2 < X < 3) = \int_2^3 \frac{2 \cdot x}{143} dx =$$

$$\frac{2}{143} \cdot \frac{x^2}{2} [2; 3] = \frac{9}{143} - \frac{4}{143} = \frac{5}{143}.$$

Ответ: $\frac{5}{143}$.

Пример 9.7. График плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X , распределенной в интервале $(-2; 4)$ имеет вид:



Тогда дисперсия этой случайной величины равна...

Варианты ответов:

1) 36; 2) 3; 3) 6; 4) a^2 .

Решение: Так как это равномерный закон распределения случайной величины, то дисперсия вычисляется по формуле: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. В данном случае $a = -2, b = 4$. Следовательно, $D(X) = \frac{(4+2)^2}{12} = 3$.

Ответ: 3.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,8 и 0,75 соответственно. Тогда вероятность того, что цель будет поражена, равна...

Варианты ответов:

1) 0,55; 2) 0,4; 3) 0,95; 4) 0,6.

Задание 2. Бросают две монеты. Событие A – «герб на первой монете» и событие B – «цифра на второй монете» являются...

Варианты ответов:

1. Зависимыми.
2. Несовместными.
3. Совместными.
3. Независимыми.

Задание 3. Несовместные события A, B и C не образуют полную группу, если их вероятности равны...

Варианты ответов:

1. $P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{1}{3}; P(C) = \frac{1}{4}$.
2. $P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{1}{6}; P(C) = \frac{2}{3}$.
3. $P(A) = \frac{1}{3}; P(B) = \frac{1}{3}; P(C) = \frac{1}{3}$.
4. $P(A) = \frac{1}{6}; P(B) = \frac{2}{3}; P(C) = \frac{1}{2}$.

Задание 4. По оценкам экспертов вероятности банкротства для двух предприятий, производящих разнородную продукцию, равны 0,2 и 0,35. Тогда вероятность банкротства обоих предприятий равна...

Варианты ответов:

1) 0,07; 2) 0,55; 3) 0,70; 4) 0,52.

Задание 5. Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2 , образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1) = \frac{1}{3}$ и условные вероятности $P_{B_1}(A) = \frac{1}{2}$; $P_{B_2}(A) = \frac{1}{4}$. Тогда вероятность $P(A)$ равна...

Варианты ответов:

- 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$; 4) $\frac{1}{3}$.

Задание 6. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны 0,6 и 0,3 соответственно. Тогда вероятность того, что в цель попадут оба стрелка, равна...

Варианты ответов:

- 1) 0,28; 2) 0,15; 3) 0,18; 4) 0,90.

Задание 7. В первом ящике 7 красных и 11 синих шаров, во втором – 5 красных и 9 синих. Из произвольного ящика достают один шар. Вероятность того, что он синий, равна...

- 1) $\frac{1}{2} \left(\frac{11}{18} + \frac{9}{14} \right)$; 2) $\frac{11}{18} \cdot \frac{9}{14}$; 3) $\frac{11+9}{18+14}$; 4) $\frac{11}{18} + \frac{9}{14}$.

Задание 8. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет не более трех очков, равна...

Варианты ответов:

- 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}$.

Задание 9. Вероятность достоверного события равна...

Варианты ответов:

- 1) -1; 2) 0; 3) 0,995; 4) 1.

Задание 10. Случайные события A и B , удовлетворяющие условиям $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,4$, $P(A \cdot B) = 0,2$, являются...

Варианты ответов:

1. Совместными и зависимыми.

2. Совместными и независимыми.

3. Несовместными и зависимыми.

3. Несовместными и независимыми.

Задание 11. По мишени производится четыре выстрела. Значения вероятности промаха при первом выстреле 0,5; при втором – 0,3; при третьем – 0,2; при четвертом – 0,1. Тогда вероятность того, что мишень не будет поражена ни разу равна...

Варианты ответов:

1) 0,003; 2) 1,1; 3) 0,275; 4) 0,03.

Задание 12. В группе 20 студентов. Тогда число способов выбрать среди них старосту и его заместителя, равно...

Варианты ответов:

1) 380; 2) 400; 3) 39; 4) 210.

Задание 13. Из урны, в которой находится 3 белых и 7 черных шара, вынимают одновременно два шара. Тогда вероятность того, что оба шара будут черными, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{1}{10}$; 4) $\frac{2}{7}$.

Задание 14. В урне находятся 3 белых и 3 черных шара. Последовательно, без возвращения и наудачу извлекают три шара. Тогда, вероятность того, что первый и третий шар будут черными, а второй – белым, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{9}{40}$; 2) $\frac{8}{27}$; 3) $\frac{3}{20}$; 4) $\frac{1}{8}$.

Задание 15. Число всевозможных способов, которыми можно извлечь из шести различных учебников три, равно...

Варианты ответов:

1) 18; 2) 20; 3) 120; 4) 12.

Задание 16. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	0	3
P	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 4X$ равно...

Варианты ответов:

1) 8; 2) 7,6; 3) 5,7; 4) 6,8.

Задание 17. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	0	x_2	9
P	0,1	0,5	0,4

Если математическое ожидание $M(X) = 5,6$, то значение x_2 равно...

Варианты ответов:

1) 4; 2) 5; 3) 6; 4) 3.

Задание 18. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	-1	3
P	0,4	0,6

Тогда дисперсия этой случайной величины равна:

1) 3,84; 2) 1,4; 3) 2; 4) 3.

Задание 19. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2; 5]$. Распределение случайной величины $y = 3x - 1$ имеет...

Варианты ответов:

1. Другой (кроме равномерного и нормального) вид распределения.
2. Равномерное распределение на отрезке $[5; 14]$.
3. Нормальное распределение на отрезке $[2; 5]$.
4. Равномерное распределение на отрезке $[6; 15]$.

Задание 20. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	-1	2	4
P	0,1	a	b

Тогда ее математическое ожидание равно 3,3, если...

Варианты ответов:

1) $a = 0,1; b = 0,9$; 2) $a = 0,2; b = 0,7$;

3) $a = 0,1; b = 0,8$; 4) $a = 0,8; b = 0,1$.

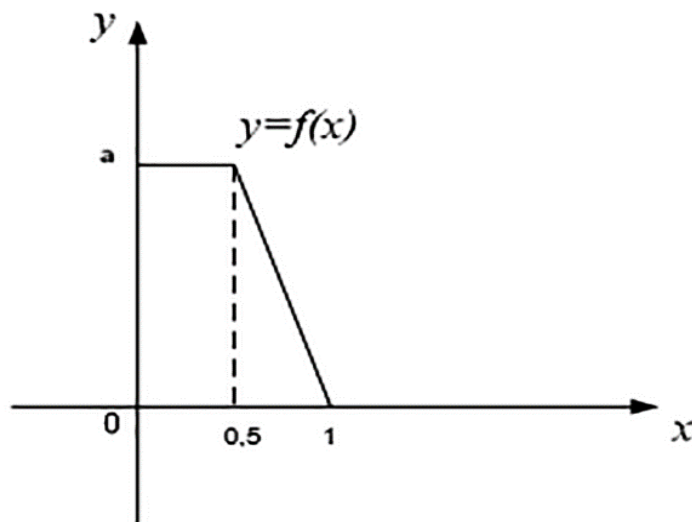
Задание 21. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Тогда математическое ожидание этой нормально распределенной случайной величины равно...

Варианты ответов: 1) 3; 2) 18; 3) 9; 4) 4.

Задание 22. Случайная величина распределена равномерно на интервале (10;12). Тогда ее математическое ожидание и дисперсия соответственно равны...

Варианты ответов: 1) 10,5 и $\frac{1}{3}$; 2) 11 и $\frac{1}{3}$; 3) 11 и 1; 4) 10 и $\frac{1}{4}$.

Задание 23. График плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины приведен на рисунке:



Тогда значение a равно...

Варианты ответов:

1) $\frac{4}{3}$; 2) 1,2; 3) 0,9; 4) $\frac{3}{4}$.

Задание 24. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения вероятностей:

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ Cx + 2, & -1 < x \leq -\frac{1}{2} \\ 1, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Тогда значение C равно...

Варианты ответов: 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1.

Задание 25. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0,3, & 0 < x \leq 1 \\ 0,5, & 1 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-1 \leq X \leq 3)$ равна...

Варианты ответов: 1) 0,7; 2) 0,3; 3) 0,2; 4) 0,5.

Задание 26. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, & \text{при } 0 < x \leq 3 \\ 0, & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(0 < X < 2)$ равна...

Варианты ответов: 1) $\frac{8}{27}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{8}{9}$.

10 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Выборочной совокупностью (или выборкой) называется совокупность случайно отобранных объектов. **Генеральной совокупностью** называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка. **Объемом совокупности** (выборочной или генеральной) называется число объектов этой совокупности.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 — n_2 раз, x_k — n_k раз и $\sum_{i=1}^k n_i = n$ — объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, — **вариационным рядом**.

Числа наблюдений называют **частотами**, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ — **относительными частотами**.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариантов и соответствующих им частот или **относительных частот**.

Модой M_0 называют варианту, которая имеет наибольшую частоту. **Медианой** m_e называют варианту, которая делит вариационный ряд на две части, равные по числу вариантов. Если число вариантов нечетно, то есть $n = 2k + 1$, то $m_e = x_{k+1}$, при четном — $n = 2k$, медиана равна $m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Размахом варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантами: $R = x_{\max} - x_{\min}$. **Полигоном частот** называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$, где x_i — варианты выборки и n_i — соответствующие им частоты. **Полигоном относительных частот** называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1, \omega_1), (x_2, \omega_2), \dots, (x_k, \omega_k)$, где ω_i — соответствующие вариантам относительные частоты.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из

прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h , а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объему выборки n .

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h , а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, то есть единице.

Основные свойства оценок:

1. *Несмещенной* называют оценку θ^* , математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ , то есть $M(\theta^*) = \theta$.

2. *Смещенной* называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

3. *Состоятельной* называют оценку, которая с увеличением объема выборки приближается к оцениваемому параметру.

Точечные оценки параметров распределения:

1. **Выборочное среднее** $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ или $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i$.

Оценка является несмещенной и состоятельной.

2. **Выборочная дисперсия** $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2$ или $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2$.

Оценка является смещенной.

3. **Исправленная выборочная дисперсия** $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B$.

Оценка является несмещенной.

Доверительным называют интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ .

Элементы теории корреляции:

Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_b \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot (x - \bar{x}) \text{ или } \bar{y}_x = \rho_{yx}x + b, \text{ где } \rho_{yx} = r_b \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

Выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y имеет вид:

$$x_y - \bar{x} = r_b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot (y - \bar{y}) \text{ или } \bar{x}_y = \rho_{xy} + d, \text{ где } \rho_{xy} = r_b \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

где σ_x, σ_y – выборочные средние квадратические отклонения;

ρ_{yx} – выборочный коэффициент регрессии Y на X ;

ρ_{xy} – выборочный коэффициент регрессии X на Y ;

r_b – выборочный коэффициент корреляции.

Свойства выборочного коэффициента корреляции:

1. $-1 \leq r_b \leq 1$.
2. Если $r_b = \pm 1$, то между признаками X и Y существует линейная функциональная зависимость (при $r_b = 1$ прямая, а при $r_b = -1$ обратная).
3. Если $r_b = 0$, то между признаками X и Y отсутствует линейная корреляционная зависимость.
4. Знак r_b совпадает со знаком выборочных коэффициентов регрессии.

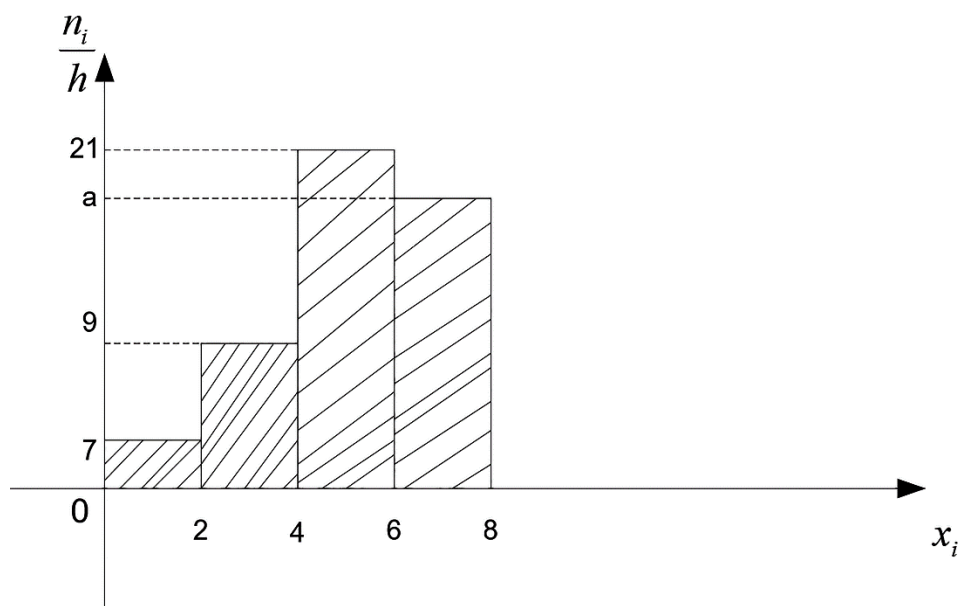
Для отыскания критической области задаются уровнем значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

- 1) для правосторонней критической области $P(K > k_{kp}) = \alpha \quad (k_{kp} > 0)$;
- 2) для левосторонней критической области $P(K < k_{kp}) = \alpha \quad (k_{kp} < 0)$;
- в) для двусторонней симметричной области:

$$P(K > k_{kp}) = \frac{\alpha}{2} \quad (k_{kp} > 0), P(K < -k_{kp}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Пример 10.1. По выборке объема $n = 100$ построена гистограмма частот. Тогда значение a равно...

Варианты ответов: 1) 13; 2) 63; 3) 12; 4) 14.



Решение: Площадь гистограммы частот равна объему выборки:

$$2 \cdot (7 + 9 + 21 + a) = 100, (37 + a) \cdot 2 = 100, 37 + a = 50, a = 50 - 37 = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 10.2. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: 28, 30, 32. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна...

Варианты ответов: 1) 0; 2) 6; 3) 8; 4) 4.

Решение: Несмещенная оценка дисперсии вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_B)^2, \text{ где } \bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Подставляя данные значения, получаем: $\bar{x}_B = \frac{28+30+32}{3} = 30$.

$$S^2 = \frac{1}{2} \cdot ((28 - 30)^2 + (30 - 30)^2 + (32 - 30)^2) = 4$$

Ответ: 4.

Пример 10.3. Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a = 20$, то конкурирующей может быть гипотеза...

Варианты ответов:

1. $H_1: a > 20$.

2. $H_1: a \geq 10$.

3. $H_1: a \leq 20$.

4. $H_1: a \geq 20$.

Решение: Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1 , которая противоречит основной (нулевой). Следовательно, $H_1: a > 20$.

Ответ: $H_1: a > 20$.

Пример 10.4. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 6,4 - 1,6x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

Варианты ответов: 1) -4 ; 2) 4 ; 3) $0,92$; 4) $-0,92$.

Решение: Значение выборочного коэффициента корреляции, во-первых, принадлежит промежутку $[-1; 1]$, а, во-вторых, его знак совпадает со знаком выборочного коэффициента регрессии. Этим условиям удовлетворяет значение $-0,92$.

Ответ: $-0,92$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины: 4; 5; 8; 9; 11. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна:

Варианты ответов: 1) 8; 2) 7,6; 3) 7,4; 4) 9,25.

Задание 2. Мода вариационного ряда 1, 4, 4, 5, 6, 8, 9 равна...

Варианты ответов: 1) 9; 2) 1; 3) 4; 4) 6.

Задание 3. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	1	2	3	4
n_i	10	n_2	8	7

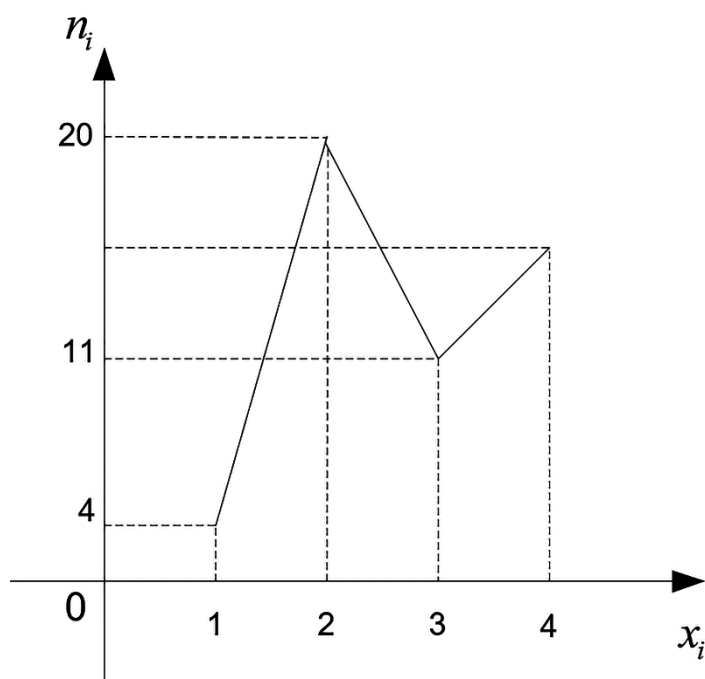
Тогда n_2 равен...

Варианты ответов: 1) 26; 2) 25; 3) 9; 4) 50.

Задание 4. Для выборки объема $n = 10$ вычислена выборочная дисперсия $D_B = 180$. Тогда исправленная дисперсия S^2 для этой выборки равна...

Варианты ответов: 1) 324; 2) 200; 3) 162; 4) 400.

Задание 5. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$, полигон частот которой имеет вид:



Тогда число варианты $x_4 = 4$ в выборке равно...

Варианты ответов: 1) 14; 2) 16; 3) 15; 4) 50.

Задание 6. Статистическое распределение выборки имеет вид:

x_i	2	3	7	10
n_i	4	7	5	4

Тогда относительная частота варианты $x_1 = 2$, равна...

Варианты ответов: 1) 0,2; 2) 4; 3) 0,1; 4) 0,4.

Задание 7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	8	10	12	13	15
n_i	20	15	10	3	2

Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...

Варианты ответов: 1) 9,98; 2) 10; 3) 9; 4) 10,25.

Задание 8. Медиана вариационного ряда 21, 22, 22, 22, 23, 25, 25, 27 равна...

Варианты ответов: 1) 22,5; 2) 22; 3) 23; 4) 25.

Задание 9. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты 4,5; 5,5; 6,5. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна...

Варианты ответов: 1) 2; 2) 0; 3) 5,5; 4) 1.

Задание 10. Дана выборка объема n . Если каждый элемент выборки увеличить в 10 раз, то выборочное среднее $\bar{x}_в$...

Варианты ответов:

1. Увеличится в 10 раз.
2. Не изменится.
3. Увеличится в 25 раз.
4. Уменьшится в 10 раз.

Задание 11. Дана выборка объема n . Если каждый элемент выборки уменьшить на семь единиц, то выборочная дисперсия...

Варианты ответов:

1. Не изменится.
2. Увеличится на 7 единиц.
3. Уменьшится на 7 единиц.
4. Уменьшится на 14 единиц.

Задание 12. Дана выборка объема n . Если каждый элемент выборки увеличить в восемь раз, то выборочная дисперсия...

Варианты ответов:

1. Не изменится.
2. Увеличится в 8 раз.
3. Увеличится в 64 раза.
4. Уменьшится в 8 раз.

Задание 13. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -3 + 2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

Варианты ответов: 1) 2; 2) 0,6; 3) -3; 4) -0,6.

Задание 14. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = -5,6 - 2,8x$. Тогда выборочный коэффициент регрессии равен...

Варианты ответов: 1) 2,8; 2) -5,6; 3) -2,8; 4) -8,4.

Задание 15. При построении выборочной парной регрессии $r_b = 0,75, \sigma_x = 1,1, \sigma_y = 2,2$. Тогда выборочный коэффициент регрессии ρ_{xy} равен...

Варианты ответов: 1) 0,375; 2) 0,5; 3) 0,85; 4) 0,11.

Задание 16. Выборочное уравнение парной регрессии имеет вид $y = 2,8 + 0,8x, \sigma_x = 2, \sigma_y = 3,2$. Тогда выборочный коэффициент корреляции равен...

Варианты ответов: 1) 0,5; 2) 0,8; 3) -0,5; 4) 1,28.

Задание 17. Если основная гипотеза имеет вид $H_0: a = 10$, то конкурирующей может быть гипотеза...

Варианты ответов:

1. $H_1: a \leq 20$.
2. $H_1: a \leq 10$.
3. $H_1: a \geq 10$.
4. $H_1: a \neq 10$.

Задание 18. Точечная оценка математического ожидания нормального распределения равна 10. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...

Варианты ответов: 1) (8,5; 11,5); 2) (10; 10,9); 3) (8,4; 10); 4) (8,6; 9,6).

Задание 19. Дан доверительный интервал (12,4; 13,2) для оценки математического ожидания нормального распределенного количественного признака. Тогда точечная оценка математического ожидания равна...

Варианты ответов: 1) 0,4; 2) 13; 3) 12,8; 4) 12,7.

Задание 20. Левосторонняя критическая область может определяться из соотношения...

Варианты ответов:

1. $P(-3,22 < K < 3,22) = 0,99$.

2. $P(K < -3,22) + P(K > 3,22) = 0,01$.

3. $P(K > 3,22) = 0,01$.

4. $P(K < -3,22) = 0,01$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – Москва : Юрайт, 2020. – 401 с. // ЭБС Юрайт : [сайт]. – URL : <https://urait.ru/bcode/449938>.
2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – Москва : Юрайт, 2020. – 439 с. // ЭБС Юрайт : [сайт]. – URL : <https://urait.ru/bcode/451746>.
3. Высшая математика : учебник и практикум / под общей ред. М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – Москва : Юрайт, 2020. – 478 с. // ЭБС Юрайт : [сайт]. – URL : <https://urait.ru/bcode/450527>.
4. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. – Москва : Юрайт, 2020. – 204 с. // ЭБС Юрайт : [сайт]. – URL : <https://urait.ru/bcode/450819>.
5. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – Москва : Высшая школа, 2003. – 405 с.
6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высшая школа, 2006. – 304 с.
7. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высшая школа, 2006. – 416 с.
8. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и теоретическая статистика / Н. Ш. Кремер. – Москва : ЮНИТИ, 2002. – 544 с.
9. Красс, М. С. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании : учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – Москва : Дело, 2001. – 688 с.
10. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Н. С. Пискунов. – Москва : Интеграл-Пресс, 2002. – 416 с.

Учебное издание

Крючкова Людмила Геннадьевна, кандидат технических наук, доцент

**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ
ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Учебное пособие

Подписано в печать 08.11.2022 г.
Формат 60х90/16. Уч.-изд. л – 3,67. Усл. печ. л. – 19,87.
Тираж по требованию. Заказ 45.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86

