Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
аграрный университет»

Н. П. Кидяева
О. П. Митрохина

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2023

УДК 511.2
ББК 22.1
К38

Рецензент

Сергей Васильевич Щитов, доктор технических наук, профессор кафедры транспортно-энергетических средств и механизации АПК Дальневосточного государственного аграрного университета

Рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим советом электроэнергетического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета

К38 **Кидяева, Н. П. Комплексные числа и действия над ними :** учебно-методическое пособие / Н. П. Кидяева, О. П. Митрохина ; Дальневост. гос. аграр. ун-т. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2023. – 38 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткое изложение теоретических вопросов, необходимых для решения задач по разделу «Комплексные числа» дисциплины «Линейная алгебра». В пособии подобраны задания для аудиторных занятий и самостоятельной (внеаудиторной) работы обучающихся. Содержатся задания для расчетно-графической работы.
Предназначено для обучающихся всех форм обучения по направлениям бакалавриата.

УДК 511.2
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит материал, относящийся к разделу курса линейной алгебры – комплексные числа. Рассмотрены основные положения, связанные с изучением комплексных чисел; различные формы записи комплексного числа и действия, выполняемые над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной форме. Пособие разработано таким образом, чтобы изложенные в нем аспекты представляли собой интересный и доступный для обучающихся материал.

В учебно-методическом пособии приводится 30 вариантов расчетно-графической работы для самостоятельного решения, которые способствуют более глубокому изучению данной темы. Пособие может быть использовано, для организации самостоятельной работы студентов всех форм обучения, обучающихся по всем направлениям бакалавриата.

1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАПИСИ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Поиск решения уравнения $x^2 + 1 = 0$, не имеющего действительных корней, вызвал необходимость расширить множество действительных чисел до такого числового множества, в котором это уравнение было бы разрешимо. Это новое числовое множество является множеством комплексных чисел.

Определение 1. *Числа вида* $z = a + bi$, *где* a *и* b *– действительные числа, число* i *– мнимая единица, определяемая равенством* $i^2 = -1$, *называются* **комплексными числами.**

a – действительная часть комплексного числа;

bi – мнимая часть комплексного числа;

b – коэффициент при мнимой единице.

Определение 2. *Запись комплексного числа в виде* $z = a + bi$ *называется* **алгебраической формой записи комплексного числа**.

Если $b = 0$, то комплексное число принимает вид $z = a + 0i = a$ и является действительным числом. В силу того, что a – любое действительное число, справедливо высказывание: множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Если $a = 0$, то комплексное число принимает вид $z = 0 + bi = bi$ и является чисто мнимым числом.

Определение 3. *Комплексное число вида* $-z = -a - bi$ *называется* **противоположным** *для комплексного числа* $z = a + bi$.

Определение 4. *Комплексное число* $0 + 0\,i$ *называется* **комплексным нулем**.

Определение 5. *Комплексное число* $\bar{z} = a - bi$ *называется* **сопряженным** *для комплексного числа* $z = a + bi$.

Таким образом, *комплексно-сопряженные числа отличаются только знаком мнимой части*.

Числа 1 и i в алгебраической форме записываются:

$$1 = 1 + 0i;\ i = 0 + 1 \cdot i$$

Определение 6. *Два комплексных числа* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *и* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *называются равными, если* $a_1 = a_2$ *и* $b_1 = b_2$.

Пример 1. Решите уравнение: 1) $x^2 - 6x + 10 = 0$; 2) $x^2 - 3x + 10 = 0$.

Решение:

1) $x^2 - 6x + 10 = 0$

$$D = 36 - 40 = -\ 4\ \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2\,i$$

$$x_1 = \frac{6 - 2i}{2} = \frac{2 \cdot (3 - i)}{2} = 3 - i \text{ и } x_2 = \frac{6 + 2i}{2} = \frac{2 \cdot (3 + i)}{2} = 3 + i$$

Ответ: $3 \pm i$.

2) $x^2 - 3x + 10 = 0$

$$D = 9 - 40 = -\ 31 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{-31} = \sqrt{31 \cdot (-1)} = \sqrt{31} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{31}\,i$$

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{31}\,i}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{31}}{2}\,i \text{ и } x_2 = \frac{3 + \sqrt{31}\,i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{31}}{2}\,i$$

Ответ: $\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{31}}{2}\,i$.

Полезно уметь находить степени мнимой единицы:

$$i^1 = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -\ 1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -\ i$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 \qquad i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$$

Замечаем, что, начиная с показателя, равного 5, значение степеней мнимой единицы повторяется.

Правило 1. *Чтобы вычислить данную степень мнимой единицы, нужно показатель степени разделить на 4 и полученный при делении остаток записать как новый показатель; если необходимо, упростить.*

Пример 2. Вычислите: 1) i^{139}; 2) i^{2254}.

Решение:

1) $i^{139} = i^{4 \cdot 34+3} = i^3 = -\, i$;

2) $i^{2254} = i^{4 \cdot 563+2} = i^2 = -\,1$.

Практическое задание

Задание 1. Даны числа: 1) $z = 3 + i$; 2) $z = 3 - i$; 3) $z = -\,3 + i$;
4) $z = -\,3 - i$; 5) $z = 3$; 6) $z = -3$; 7) $z = -i$; 8) $z = i$.

Запишите числа, сопряженные и противоположные данным.

Задание 2. Решите уравнение: 1) $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$; 2) $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$.

Задание 3. Вычислите: 1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$;

2) $i + i^{12} + i^{23} + i^{44} + i^{65}$;

3) $i^{17} + i^{21} + i^{35} + i^{43} + i^{59}$;

4) $i^{11} \cdot i^{32} \cdot i^{53} \cdot i^{144}$.

2 ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Над комплексными числами, записанными в алгебраической форме, можно выполнять те же действия, что и над действительными числами, а именно, сложение, вычитание, умножение, деление. В отдельных случаях комплексные числа можно возводить в степень и извлекать корни, но эти операции удобно выполнять, если числа записаны в тригонометрической или показательной форме.

Пусть даны комплексные числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Правило 2. *Чтобы сложить (вычесть) два комплексных числа* z_1 *и* z_2*, надо сложить (вычесть) их действительные и мнимые части:*

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\, i$$

Пример 3. Выполните действия: 1) $(2 - 3\, i) + (4 + 7 i)$;

2) $(4 - \, i) - (3 + 2 i)$.

Решение:

1) $(2 - 3\, i) + (4 + 7 i) = 2 - 3\, i + 4 + 7\, i = 6 + 4\, i$;

2) $(4 - \, i) - (3 + 2 i) = 4 - \, i - 3 - 2\, i = 1 - 3\, i$.

Правило 3. *Умножение комплексных чисел выполняется по формуле:*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$$

Замечание 1. *Полезно знать, что сложение, вычитание, умножение комплексных чисел можно выполнять как сложение, вычитание, умножение обычных двучленов.*

Пример 4. Выполните действия: $(5 - 2\, i\,) \cdot (1 + 3\, i\,) - (1 + 4\, i\,)$.

Решение:

Первый способ (по правилу 3):

$$(5 - 2\, i) \cdot (1 + 3\, i) - (1 + 4\, i\,) = \Big((5 \cdot 1 - (-2) \cdot 3) + \big(5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2)\big)\, i\Big) -$$
$$-(1 + 4\ i\,) == (11 + 13 i) - (1 + 4 i) = (11 - 1) + (13 - 4) i = 10 + 9\, i$$

Второй способ (по замечанию 1):

$$(5 - 2\, i\,) \cdot (1 + 3\, i\,) - (1 + 4\, i\,) = \Big/ \begin{matrix} \text{раскроем скобки и приведем} \\ \text{подобные, учитывая, что } i^2 = -1 \end{matrix} \Big/ =$$
$$= 5 + 15\, i - 2\, i - 6\, i^2 - 1 - 4\, i = 5 + 15\, i - 2\, i + 6 - 1 - 4\, i = 10 + 9\, i$$

Правило 4. *Чтобы разделить одно комплексное число на другое комплексное число, надо делимое и делитель умножить на число, сопряженное делителю:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+b\,i}{c+d\,i} = \frac{(a+b\,i)\cdot(c-d\,i)}{(c+d\,i)\cdot(c-d\,i)}$$

Пример 5. Выполните деление $\frac{2-3\,i}{4+5\,i}$.

Решение:

$$\frac{2-3\,i}{4+5\,i} = \frac{(2-3\,i)\cdot(4-5\,i)}{(4+5\,i)\cdot(4-5\,i)} = \frac{8-10\,i-12\,i+15\,i^2}{4^2+5^2} =$$

$$= \frac{8-22\,i-15}{41} = \frac{-7-22\,i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}\,i$$

Пример 6. Выполните действия $\frac{5+2\,i}{2-5\,i} - \frac{3-4\,i}{4+3\,i}$.

Решение:

$$\frac{5+2\,i}{2-5\,i} - \frac{3-4\,i}{4+3\,i} = \frac{(5+2\,i)\cdot(2+5\,i)}{(2-5\,i)\cdot(2+5\,i)} - \frac{(3-4\,i)\cdot(4-3\,i)}{(4+3\,i)\cdot(4-3\,i)} =$$

$$= \frac{10+25\,i+4\,i-10}{2^2+5^2} - \frac{12-9\,i-16\,i-12}{4^2+3^2} = \frac{29\,i}{29} - \frac{-25\,i}{25} = i+i = 2\,i$$

Пример 7. Выполните действия $\frac{3+5\,i^{31}}{3-2\,i^{33}} + \frac{-i^{47}}{i^{31}+3\,i^{64}}$.

Решение:

$$\frac{3+5\,i^{31}}{3-2\,i^{33}} + \frac{-i^{47}}{i^{31}+3\,i^{64}} = \frac{3+5\,i^{4\cdot7+3}}{3-2\,i^{4\cdot8+1}} + \frac{-\,i^{4\cdot11+3}}{i^{4\cdot7+3}+3\,i^{4\cdot16}} =$$

$$= \frac{3+5\,i^3}{3-2\,i} + \frac{-i^3}{i^3+3} == \frac{3-5\,i}{3-2\,i} + \frac{i}{3-\ i} = \frac{(3-5\,i)\cdot(3+2\,i)}{(3-2\,i)\cdot(3+2\,i)} +$$

$$+ \frac{i\ \cdot(3+\ i)}{(3-\ i)\ \cdot\ (3+\ i)} = \frac{9+6\,i-15\,i+10}{3^2+2^2} + \frac{3\,i-1}{3^2+1^2} = \frac{19-9\,i}{13} +$$

$$+ \frac{-1+3\,i}{10} = \frac{190-90\,i-13+39\,i}{130} = \frac{177-51\,i}{130} = \frac{177}{130} - \frac{51}{130}\,i$$

Рассмотрим некоторые **свойства комплексно-сопряженных чисел:**

1. $z+\bar{z}=(a+b\,i)+(a-b\,i)=2a$ – *сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.*

2. $z-\bar{z}=(a+b\,i)-(a-b\,i)=2b\,i$ – *разность комплексно-сопряженных чисел является чисто мнимым числом.*

3. $z\cdot\bar{z}=(a+b\,i)\cdot(a-b\,i)=a^2+b^2$ – *произведение комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.*

Из последнего равенства следует, что во множестве комплексных чисел сумма квадратов двух чисел разлагается на линейные множители.

Практическое задание

Задание 4. Выполните действия:

1) $\frac{3-2\,i}{1+3\,i}$; 2) $\frac{(1-2\,i)\cdot(2+i)}{3-2\,i}$; 3) $\frac{2+3\,i}{(4+i)\cdot(2-2\,i)}$; 4) $\frac{(3+2\,i)\cdot(2-\,i)}{(2+3\,i)(1+i)}$;

5) $\frac{1-3\,i}{i-2}+\frac{4\,i+1}{3\,i-1}$; 6) $\frac{-3+i}{1+3\,i}+\frac{7-2\,i}{2+7\,i}$; 7) $\frac{5\,i^{60}-\,i^{81}}{i^{144}-2\,i^{39}}+\frac{2-\,i^{51}}{i^{33}+3\,i^{68}}$.

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Комплексное число $z=a+bi$ на плоскости изображается либо точкой M с координатами $(a;b)$, либо радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с теми же координатами $(a;b)$ (рис. 1).

Так как a – действительная часть комплексного числа, то точки, изображающие комплексные числа вида $z=a+0i$, лежат на оси Ox, которая называется **действительной осью** и обозначается Rez.

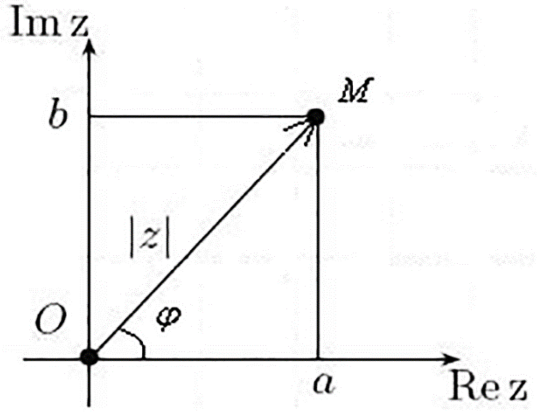

Рисунок 1 – Комплексное число

В силу того, что bi – мнимая часть комплексного числа, то точки, изображающие комплексные числа вида $z = 0 + bi$, лежат на оси *Oy,* называющейся **мнимой осью** и обозначающейся Imz.

Определение 7. *Плоскость, служащая для изображения комплексных чисел, называется* **комплексной плоскостью**.

Определение 8. Модулем *комплексного числа* $z = a + b\,i$ *называется число, вычисляемое по формуле:*

$$|\,z\,| = |\,a + b\,i\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Из геометрической интерпретации комплексного числа вытекают следующие свойства:

1. Длина вектора $\vec{z}$ равна $|z| = r$.

2. Точки (радиус-векторы), изображающие комплексно-сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси *Ox*.

3. Точки (радиус-векторы), соответствующие противоположным комплексным числам, симметричны относительно начала координат.

4. Сложение, вычитание комплексных чисел, умножение комплексного числа на действительное число иллюстрируются как соответствующие действия над векторами.

5. Расстояние между точками z_1 и z_2 равно $|\,z_1 - z_2|$.

Определение 9. *Угол φ между действительной осью Ох и вектором $\overrightarrow{OM}$, отсчитываемый от положительного направления действительной оси, называется* **аргументом** *комплексного числа $z = a + b\,i$ (рис. 1) и обозначается:*

$$\arg z = \arg(a + bi) = \varphi$$

Аргумент комплексного числа определяется неоднозначно. Любое комплексное число $z \neq 0 + 0\,i$ имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π.

Определение 10. *Наименьшее по абсолютной величине значение аргумента из промежутка $(-\pi\,;\,\pi)$ называется* **главным значением аргумента**, *которое находится по формуле:*

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} arctg\,\dfrac{b}{a} \text{ для внутренних точек } I, IV \text{ четвертей;} \\ arctg\,\dfrac{b}{a} + \pi \text{ для внутренних точек } II \text{ четврети,} \\ arctg\,\dfrac{b}{a} - \pi \text{ для внутренних точек } III \text{ четверти.} \end{cases}$$

Значения аргумента комплексного числа $z = a + b\,i \neq 0 + 0\,i$ находятся в следующей последовательности:

1) определить в какой четверти находится точка $z = a + b\,i$;

2) найти главное значения аргумента числа *z*.

Пример 8. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 2 - 2\,i$.

Решение:

$$\begin{matrix} a = 2 & (\text{отмечаем на оси ОХ}) \\ b = -2 & (\text{отмечаем на оси ОУ}) \end{matrix} \Rightarrow M(2\,;\,-\,2) \in IV \text{ четверти (рис. 2).}$$

Находим *модуль* по формуле определения 8:

$$|z| = r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

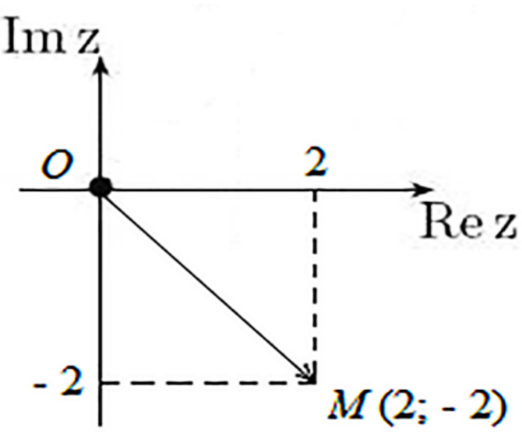

Рисунок 2

Находим *аргумент* по формуле определения 10. Так как $M(2\,;-2) \in IV$, то в формуле выбираем третью строку:

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a} = arctg\left(\frac{-2}{2}\right) = arctg(-1) = -\,arctg\,1 = -\,\frac{\pi}{4}$$

Практическое задание

Задание 5. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексных чисел: 1) $z = 3$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -3i$; 5) $z = -2 - 2i$;

6) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 7) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 8) $z = -\sqrt{3} + i$.

Задание 6. Найдите все значения аргумента комплексных чисел:

1) $z = -1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$.

4 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Пусть комплексному числу $z = a + b\,i$ соответствует вектор:

$\vec{\mathrm{OM}} = (a\,;b)$. $\left|\vec{\mathrm{OM}}\right| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\angle MOB = \varphi$ (рис. 3). Спроектируем точку M на ось Ox.

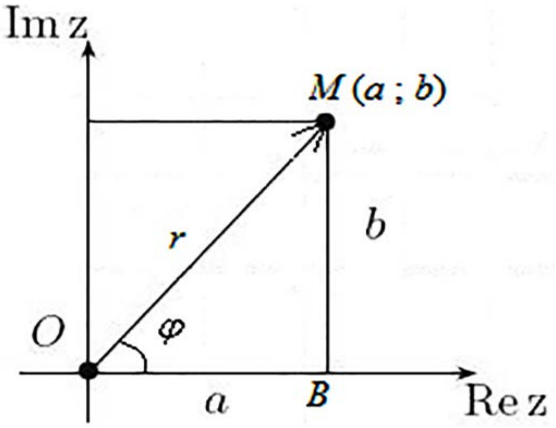

Рисунок 3

Рассмотрим полученный прямоугольный треугольник $\Delta\, OMB$. По определению тригонометрических функций имеем:

$$cos\varphi = \frac{a}{r};\, sin\varphi = \frac{b}{r}$$

Отсюда $a = r \cdot \cos\varphi$, $b = r \cdot \sin\varphi$.

Подставив в алгебраическую форму комплексного числа вместо a и b их значения, получим:

$$z = a + b\ i = r \cdot cos\varphi + (r \cdot sin\varphi)\ i = r\ (cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$$

Определение 11. *Запись комплексного числа в виде:*

$$z = r\,(cos\varphi + i \cdot sin\varphi)$$

где r – модуль, φ – одно из значений аргумента комплексного числа $z =$ $= a + b\ i$, называется **тригонометрической формой записи комплексного числа**.

Для представления комплексного числа в тригонометрической форме необходимо найти: 1) модуль этого числа; 2) значения аргумента этого числа.

Пример 9. Запишите число $z = -\,2 + 2\,\sqrt{3}\,i$ в тригонометрической форме.

Решение: $a = -\,2$; $b = 2\,\sqrt{3} \Rightarrow M\big(-2; 2\sqrt{3}\big) \in II$ четверти (рис. 4).

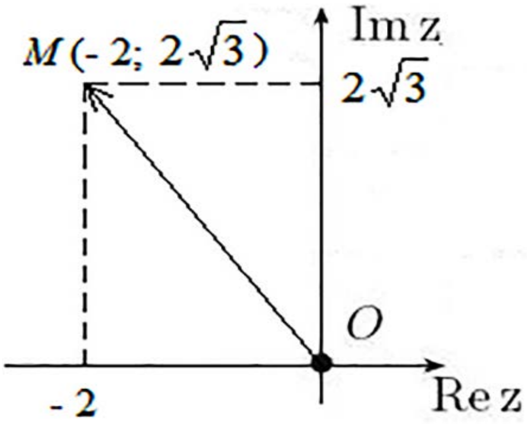

Рисунок 4

Находим *модуль* по формуле определения 8:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Находим *аргумент* по формуле определения 10. Так как $M\left(-2;\ 2\sqrt{3}\right) \in II$, то в формуле выбираем вторую строку:

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a} + \pi = arctg\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = arctg\left(-\sqrt{3}\right) + \pi =$$

$$= -\,arctg\sqrt{3} + \pi = -\,\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

Таким образом, $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i = 4\,\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\,\sin\frac{2}{3}\pi\right)$.

Пример 10. Запишите число $z = -2i$ в тригонометрической форме.

Решение: $a = 0; b = -2$, следовательно радиус-вектор совпадает с отрицательным направлением оси *Oy* (рис. 5).

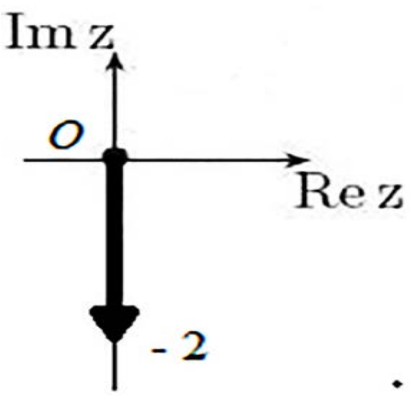

Рисунок 5

$$r = \sqrt{0 + (-\ 2)^2} = \sqrt{4} = 2;\ \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

Таким образом,

$$z = -\,2\ i = 2\ \left(cos\ \left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\ sin\ \left(-\ \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\ \left(cos\ \frac{\pi}{2} - i\ sin\ \frac{\pi}{2}\right)$$

Пример 11. Запишите число $z = -2$ в тригонометрической форме.

Решение: $a = -2; b = 0$, следовательно радиус-вектор совпадает с отрицательным направлением оси *Ox* (рис. 6).

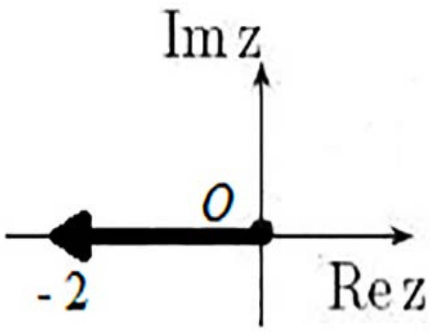

Рисунок 6

$$r = \sqrt{(-\ 2)^2 + 0} = \sqrt{4} = 2;\ \varphi = \pi$$

Таким образом, $z = -\,2\ = 2\ (\cos\pi + i\ \sin\pi)$.

Правило 5. *Чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа к алгебраической, нужно вычислить значения тригонометрических функций.*

Пример 12. Представить в алгебраической форме число:

$$z = 5\ \left(cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Решение:

$$z = 5\ \left(cos\ \frac{\pi}{2} + i\,sin\ \frac{\pi}{2}\right) = 5\ (0 + 1\ \cdot\ i) = 5\ i$$

Таким образом, $z = 5\ i$.

Над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме, можно выполнять следующие действия: *умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня.* Рассмотрим комплексные числа:

$$z = r\ (cos\varphi + i\ sin\varphi);$$

$$z_1 = r_1\ (cos\varphi_1 + i\, sin\varphi_1);$$

$$z_2 = r_2\ (cos\varphi_2 + i\, sin\varphi_2).$$

Правило 6. *При умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \big(cos\ (\varphi_1 + \varphi_2) + i\ sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

Пример 13. Найдите произведение чисел:

$$z_1 = 2\ \left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right) \text{ и } z_2 = 3\ \left(cos\frac{\pi}{12} + i\, sin\frac{\pi}{12}\right)$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 3\ \left(cos\ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right) + i\ \ sin\ \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\right)\right) = 6 \cdot \left(cos\frac{\pi}{4} + i\ \ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Правило 7. *При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ \big(cos\ (\varphi_1 - \varphi_2) + i\ \ sin\ (\varphi_1 - \varphi_2)\big)$$

Пример 14. Выполните деление чисел:

$$z_1 = 10\ \left(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4}\right) \text{ и } z_2 = 2\ \left(cos\ \frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10}{2}\ \left(cos\ \ \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + i\ sin\ \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 5\ \left(cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2}\right)$$

Правило 8. *При возведении комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в целую степень, модуль комплексного числа возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель:*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\ \sin n\varphi\ ), n \in Z$$

Пример 15. Найдите $z^6, z = 2\ \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Решение:

$$\left(2\ \left(cos\frac{\pi}{6} + i\ sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 2^6\left(cos\ \left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right) + isin\left(\frac{\pi}{6}\cdot 6\right)\right) =$$

$$= 64\ (cos\pi + isin\pi)$$

Правило 9. *Для извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме, используется формула:*

$$z_k = \sqrt[n]{r\ (cos\varphi + i\ sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\ \left(cos\ \frac{\varphi + 2\pi\, k}{n} + i\ sin\ \frac{\varphi + 2\pi\, k}{n}\right)$$

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень. $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Пример 16. Извлеките корень $\sqrt[3]{-3-\ 3\ i}$.

Решение: Запишем число $z = -\ 3\ -\ 3\ i$ в тригонометрической форме.

Имеем $a = -3; b = -3$, следовательно $M(-3; -3) \in III$ четверти.

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = arctg\frac{b}{a} - \pi = arctg\left(\frac{-3}{-3}\right) - \pi = arctg1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\ \frac{3\pi}{4}$$

Следовательно,

$$z = -\ 3 -\ 3\ i = 3\sqrt{2}\ \left(cos\ \left(-\ \frac{3\pi}{4}\right) + i\ sin\left(-\ \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$z_k = \sqrt[3]{3\sqrt{2}\ \left(cos\ \left(-\ \frac{3\pi}{4}\right) + i\ sin\left(-\ \frac{3\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\ sin\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$$

$$= \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \frac{-3\pi+8\pi k}{12}+i\ sin\frac{-3\pi+8\pi k}{12}\right),\ k=0,1,2$$

Если $k = 0$, то:

$$z_0 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \left(-\ \frac{\pi}{4}\right)\ +i\ sin\left(-\ \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \frac{\pi}{4}\ \ -i\ \ sin\ \frac{\pi}{4}\right)$$

Если $k = 1$, то:

$$z_1 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \frac{5\pi}{12}+i\ sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

Если $k = 2$, то:

$$z_2 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\ \left(cos\ \frac{13\pi}{12}+i\ sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

Практические задания

Задание 7. Представьте в тригонометрической форме комплексные числа:

1) $4i$; 2) $1-i$; 3) $-\sqrt{3}-3i$;

4) $3+i\sqrt{3}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; 6) $-\sqrt{3}-i$.

Задание 8. Представьте в алгебраической форме числа:

1) $z = 5\ \left(\cos\ \frac{\pi}{2}+i\ \sin\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $z = 4\ \left(\cos\ \left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\ \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$;

3) $z = 2\ \left(\cos\ \frac{\pi}{4}+i\sin\ \frac{\pi}{4}\right)$;

4) $z = cos\pi + i\sin\pi$.

Задание 9. Выполните умножение в тригонометрической форме:

1) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}i\right)$;

2) $\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2-2\,i\sqrt{3}\right)$.

Задание 10. Выполните деление в тригонометрической форме:

1) $(1+i):\left(3+3i\sqrt{3}\right)$;

2) $\left(6+2i\sqrt{3}\right):(-3-3i)$.

Задание 11. Возведите в степень:

1) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{6}$;

2) $\left(2\ \left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)\right)^{8}$.

Задание 12. Извлеките корни:

1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{i}$.

а) $\sqrt[3]{-1}$; *б)* $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; *в)* $\sqrt[3]{i}$.

5 ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛАМИ, ЗАПИСАННЫМИ В ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определение 12. *Представление комплексного числа в виде:*

$$z = re^{i\varphi}$$

где r – модуль комплексного числа; φ – главное значение аргумента комплексного числа, называется **показательной формой комплексного числа.**

Чтобы записать комплексное число в показательной форме, нужно знать его модуль и аргумент.

Пример 17. Запишите комплексное число $z = 4i$ в показательной форме.

Решение: $a = 0; b = 4$, следовательно радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ совпадает с положительным направлением оси *Oy* (рис. 6).

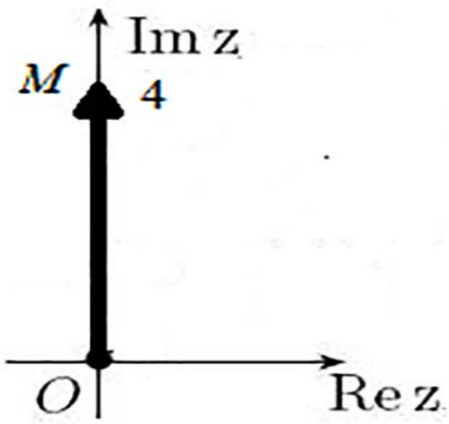

Рисунок 6

$$r = |z| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4;\ \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, $z = 4\,i = 4\,e^{\frac{\pi}{2}i}$.

Над комплексными числами, записанными в показательной форме, выполняются те же действия, что и над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме и по тем же правилам.

Пусть даны комплексные числа: $z = re^{i\varphi}; z_1 = r_1e^{i\varphi_1}; z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$.

Формулы, по которым выполняются действия, имеют вид:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i(\varphi_1-\varphi_2)};$$

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}\cdot i}; k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Пример 18. Если $z_1 = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\cdot i}$, $z_2 = 2\,e^{-\frac{\pi}{3}\cdot i}$, вычислите:

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_1}{z_2}$; 3) z_1^6; 4) $\sqrt[4]{z_1}$.

Решение:

1) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\ e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot 2\ e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{\pi}{12}i}$;

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}{2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{\frac{7\pi}{12}i}$;

3) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = 8\, e^{\frac{3\pi}{2}i}$;

4) $z_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt[8]{2} e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}i}, k = 0, 1, 2, 3.$

Если $k = 0, z_0 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{\pi}{16}i}$;

Если $k = 1, z_1 = \sqrt[8]{2}\ e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi}{4}i} = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{9\pi}{16}i}$;

Если $k = 2, z_2 = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 4\pi}{4}i} = \sqrt[8]{2}\ e^{\frac{17\pi}{16}i}$;

Если $k = 3, z_3 = \sqrt[8]{2}\ e^{\frac{\frac{\pi}{4} + 6\pi}{4}i} = \sqrt[8]{2}\, e^{\frac{25\pi}{16}i}$.

Практические задания

Задание 13. Представьте в показательной форме числа: 1) 1; 2) $\sqrt{3} + i$; 3) $3 - i\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{2} - i\sqrt{6}$.

Задание 14. Представив числа $z_1 = -\sqrt{3} + i$ и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в показательной форме, вычислите:

1) $z_1 \cdot z_2$; 2) $\frac{z_2}{z_1}$;

3) z_2^4; 4) $\sqrt[3]{z_1}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решите уравнение $z^2 + 3z + 24 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{-i^{19}}{2-5i^{27}} - \frac{2-i^{61}}{5i^{32}-i^{33}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 6 + 2\sqrt{3}\,i; z_2 = -3 - 3\,i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\frac{i-1}{i+1}$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $z^2 + 3z + 9 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{-i^{17}}{1-2i^{43}} + \frac{2+i^{51}}{5i^{24}-i^{41}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = \sqrt{3}+i; z_2 = -2+2\sqrt{3}\,i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(2 + \sqrt{12}\,i\right)^5$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $z^2 + 4z + 11 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{-\,i^{27}}{3-5\,i^{45}}+\frac{4-i^{31}}{3\,i^{24}-i^{61}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$; $z_2 = 2 + 2\,i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left((\sqrt{3}-i)\cdot(-\,1+i)\right)^4$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $z^2 + 2z + 7 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{3-\ i^{9}}{2+5\,i^{17}}-\frac{2+i^{51}}{3\,i^{44}-i^{23}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 3i$; $z_2 = 2 - 2\,i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$.

Вариант 5

1. Решите уравнение $z^2 + 3z + 12 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{4 - i^{17}}{1 - 2i^{25}} + \frac{4 - i^{26}}{2i^{64} + 7i^{73}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 7 + 7i$; $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[3]{-1 + i}$.

Вариант 6

1. Решите уравнение $z^2 + 5z + 7 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{-i^{21}}{3 - 2i^{55}} - \frac{2 - 3i^{19}}{i^{29} - 2i^{36}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$; $z_2 = \sqrt{3} - i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^6$.

Вариант 7

1. Решите уравнение $z^2 + 2z + 25 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{1-3\,i^{\,41}}{3+2\,i^{\,15}}+\frac{2-i^{\,56}}{5\,i^{56}-2i^{\,13}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i;\ z_2=2\sqrt{3}i+2.$

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{6}$.

Вариант 8

1. Решите уравнение $z^2+4z+13=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{1-3\,i^{\,27}}{3+2\,i^{\,13}}-\frac{2-i^{\,26}}{5\,i^{\,41}-4i^{\,24}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=3-3i;\ z_2=-2i.$

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-2}$.

Вариант 9

1. Решите уравнение $z^2+4z+17=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{i^{\,45}+3}{1+\,i^{\,21}}+\frac{2-i^{\,53}}{3\,i^{76}+2i^{\,23}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=\sqrt{3}-i;\ z_2=3i-3$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\left(\sqrt{3}-i\right)\cdot(-1+i)\right)^2$.

Вариант 10

1. Решите уравнение $z^2+6z+17=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{1+5\,i^{27}}{3-2\,i^{25}}-\frac{4-i^{76}}{i^{31}+2i^{16}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;\ z_2=2i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(-3-\sqrt{3}\,i\right)^3$.

Вариант 11

1. Решите уравнение $z^2+7z+15=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{1+4\,i^{31}}{1+2\,i^{61}}+\frac{2-i^{64}}{7\,i^{48}-i^{37}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -3 - \sqrt{3}i$; $z_2 = -2 + 2i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{2\sqrt{3}-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^3$.

Вариант 12

1. Решите уравнение $z^2 + 7z + 13 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{2i^{29} - 3}{5 - i^{21}} + \frac{1 - i^{18}}{3i^{36} - i^{17}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}\,i$; $z_2 = 4 - 4i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{0{,}5-0{,}5\sqrt{3}i}{0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i}\right)^4$.

Вариант 13

1. Решите уравнение $z^2 + 7z + 17 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{7 - i^{15}}{6 + i^{11}} - \frac{2 + i^{66}}{i^{52} + i^{39}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$; $z_2 = 3 + 3i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{5\,i}\right)^{12}$.

Вариант 14

1. Решите уравнение $z^2 + 5z + 9 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{4 - i^{25}}{5 - i^{51}} + \frac{-i^{35}}{i^{56} - i^{37}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -1 - \sqrt{3}\, i$; $z_2 = 3 - 3i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\frac{-2+2i}{i+1}$.

Вариант 15

1. Решите уравнение $z^2 + 4z + 21 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{3 - i^{49}}{5 - i^{83}} + \frac{2 - i^{51}}{i^{88} - 3i^{93}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 3 + 3\sqrt{3}\, i$; $z_2 = 1 + i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(4\sqrt{3} - 4i\right)^5$.

Вариант 16

1. Решите уравнение $z^2 + 6z + 14 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{4-\ i^{63}}{4+\ i^{21}}+\frac{2+i^{92}}{5i^{64}-8i^{19}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=-1+\sqrt{3}\,i;\ z_2=2+2i.$

4. Выполните действия в показательной форме $(-2+2i)^9$.

Вариант 17

1. Решите уравнение $z^2+3z+14=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{2i^{12}-\ i^{59}}{2+3\,i^{117}}+\frac{2-5i^{65}}{3\,i^{28}-i^{93}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1\cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=6+2\sqrt{3}\,i;\ z_2=-3-3i.$

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[4]{-2i}$.

Вариант 18

1. Решите уравнение $z^2+3z+13=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{8-\ i^{27}}{1+2\,i^{53}}+\frac{4+i^{57}}{5\,i^{24}+i^{43}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2; \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = \sqrt{3} + i$; $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^{20}$.

Вариант 19

1. Решите уравнение $z^2 + 4z + 21 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{7 - i^{97}}{3 - i^{15}} + \frac{4 - i^{111}}{3i^{84} - 2i^{31}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2; \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{1}{9}i$; $z_2 = -7 + 7i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[5]{3\,i}$.

Вариант 20

1. Решите уравнение $z^2 + 2z + 17 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{3 - 7i^{19}}{2 + i^{127}} - \frac{5 + i^{91}}{i^{84} - 3i^{73}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1 \cdot z_2; \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -3i$; $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[7]{-3 - \sqrt{3}i}$.

Вариант 21

1. Решите уравнение $z^2 + 3z + 19 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{3 - i^{87}}{1 - 4i^{25}} + \frac{5 - i^{46}}{i^{124} - 7i^{53}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -7i$; $z_2 = -2 - 2\sqrt{3}i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[4]{-3 + 3i}$.

Вариант 22

1. Решите уравнение $z^2 + 5z + 17 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{6 + i^{23}}{3 - i^{95}} + \frac{2 - i^{79}}{i^{49} + 2i^{76}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 3 - \sqrt{3}i$; $z_2 = \sqrt{3}i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\left(6 - 2\sqrt{3}\right) \cdot (-2 - 2i)\right)^3$.

Вариант 23

1. Решите уравнение $z^2 + 2z + 13 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{6-\ i^{47}}{7+\ i^{115}}+\frac{2-3i^{39}}{i^{86}+2i^{43}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1\cdot z_2;\sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$; $z_2=2\sqrt{3}i-2$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\right)^8$.

Вариант 24

1. Решите уравнение $z^2+4z+16=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{1-3\,i^{27}}{3+2\,i^{13}}-\frac{2-i^{26}}{5\,i^{41}-4i^{24}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1\cdot z_2;\sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1=3i$; $z_2=-2+2\sqrt{3}i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{0{,}5-0{,}5\,\sqrt{3}i}{0{,}5\,\sqrt{3}-0{,}5\,i}\right)^3$.

Вариант 25

1. Решите уравнение $z^2+4z+21=0$.

2. Вычислите:

$$\frac{7i^{35}-1}{i^{44}+2i^{81}}+\frac{2i^{36}-3i^{93}}{5\,i^{116}-7i^{27}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = \sqrt{3} - 3i$; $z_2 = -3i - 3$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[9]{-1 + \sqrt{3}i}$.

Вариант 26

1. Решите уравнение $z^2 + 6z + 10 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{i^{112} - 3i^{27}}{3i^{46} - i^{24}} - \frac{8 - i^{37}}{i^{41} - 2i^{16}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_2^5}{z_1};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$; $z_2 = 2i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[4]{2 + 2i}$.

Вариант 27

1. Решите уравнение $z^2 + 3z + 15 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{7 - i^{121}}{1 + 2i^{65}} - \frac{1 - 6i^{71}}{i^{98} - i^{77}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -\sqrt{3}i$; $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\frac{2+2\sqrt{3}\,i}{i-1}$.

Вариант 28

1. Решите уравнение $z^2 + 4z + 13 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{i^{49} + 8}{1 - 2i^{27}} + \frac{4 - 2i^{38}}{i^{39} + 2i^{87}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$; $z_2 = 4i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.

Вариант 29

1. Решите уравнение $z^2 + 7z + 15 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{7 - i^{15}}{6 + i^{11}} - \frac{2 + i^{66}}{i^{52} + i^{39}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = 3 - 3\sqrt{3}i$; $z_2 = -4 + 4i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}\,i}$.

Вариант 30

1. Решите уравнение $z^2 + 5z + 19 = 0$.

2. Вычислите:

$$\frac{3 - i^{67}}{2 + i^{58}} + \frac{3 - i^{75}}{i^{116} - 2i^{97}}$$

3. Заданные комплексные числа запишите в тригонометрической форме и выполните действия:

$$\frac{z_1^3}{z_2};\ z_1 \cdot z_2;\ \sqrt[4]{z_2}$$

если $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$; $z_2 = 5 - 5i$.

4. Выполните действия в показательной форме $\sqrt[7]{-2\sqrt{3} + 2i}$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – М. : Юрайт, 2020. – 401 с.

2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 439 с.

3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 320 с.

4. Высшая математика : учебник и практикум / под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – М. : Юрайт, 2020. – 478 с.

5. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. – М. : Юрайт, 2020. – 204 с.

6. Элементы дискретной математики : учебное пособие / А. М. Емельянов [и др.]. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2014. – 106 с.

Учебное издание

Кидяева Наталья Петровна
кандидат технических наук, доцент
Митрохина Олеся Павловна
кандидат технических наук, доцент

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА
И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 27.06.2023 г.
Формат 60х90/16. Уч.-изд. л – 0,73. Усл. печ. л. – 2,19.
Тираж по требованию. Заказ 38.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86