Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
аграрный университет»

Н. П. Кидяева
О. П. Митрохина

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2023

УДК 517.3
ББК 22.1
К38

Рецензент
Сергей Васильевич Щитов, доктор технических наук, профессор кафедры транспортно-энергетических средств и механизации АПК Дальневосточного государственного аграрного университета

Рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим советом электроэнергетического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета

К38 **Кидяева, Н. П. Определенный интеграл и его приложения :** учебно-методическое пособие / Н. П. Кидяева, О. П. Митрохина ; Дальневост. гос. аграр. ун-т. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2023. – 59 [1] с.

Учебно-методическое пособие содержит краткое изложение теоретических вопросов, необходимых для решения задач, а также большое количество решенных заданий по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной» курса «Математический анализ». В пособии подобраны задания для аудиторных занятий и самостоятельной (внеаудиторной) работы обучающихся, задания для контрольной и расчетно-графической работы.
Предназначено для обучающихся всех форм обучения по направлениям бакалавриата.

УДК 517.3
ББК 22.1

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 4
1 Задача, приводящая к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл 5
2 Свойства определенного интеграла 8
3 Методы интегрирования 9
3.1 Метод замены переменной 11
3.2 Интегрирование по частям 13
Практические задания 15
Самостоятельная работа 15
4 Несобственные интегралы 16
4.1 Несобственные интегралы I рода (интегралы с бесконечными пределами) 16
4.2 Несобственные интегралы II рода (интегралы от разрывных функций) 19
Практические задания 21
Самостоятельная работа 22
5 Геометрические приложения определенного интеграла 23
5.1 Вычисление площадей плоских фигур 23
5.2 Объем тела вращения 32
5.3 Длина дуги плоской кривой 35
Практические задания 39
Самостоятельная работа 41
Задания для расчетно-графической работы 42
Список рекомендуемой литературы 58

ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие содержит материал, относящийся к разделу курса математического анализа – интегральному исчислению функции одной переменной. В нем рассмотрены основные положения, связанные с изучением определенного, несобственного интегралов и приложений определенного интеграла.

Решение задач с использованием приложений определенного интеграла представляет собой один из сложных разделов математического анализа. Количество часов, отведенных на изучение данной темы, недостаточное, поэтому пособие разработано таким образом, чтобы изложенные в нем аспекты представляли интересный и доступный для обучающихся материал.

Учебно-методическое пособие может быть использовано для организации самостоятельной работы обучающихся всех форм обучения по различным направлениям бакалавриата.

1 ЗАДАЧА, ПРИВОДЯЩАЯ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на отрезке $[a\,;b]$ задана неотрицательная функция $y = f(x)$.

Необходимо найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, и осью Ox. Такие фигуры называются **криволинейными трапециями** (рис. 1).

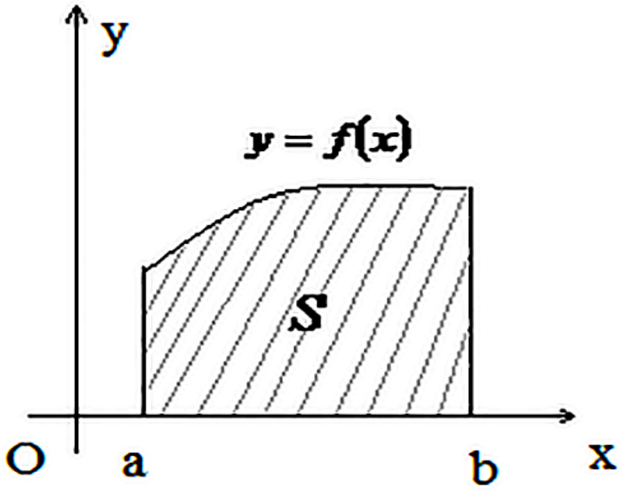

Рисунок 1 – Криволинейная трапеция

Используем прием, которым пользовались математики древней Греции и который называют методом Эвдокса или методом исчерпывания.

Идея Эвдокса состоит в следующем:

1) необходимо разбить сложную фигуру на части;

2) получившиеся части заменить простыми фигурами, площади которых находить умеем, и сложить площади этих простых фигур;

3) полученное в результате сложения число есть некоторое приближение к желаемому, поэтому следует перейти к пределу при разбиении сложной фигуры на все более и более мелкие части.

Для решения поставленной задачи поступим следующим образом:

1) отрезок $[a\,;b]$ произвольным образом разобьем на n равных частей $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = b$; из каждой точки деления восстановим перпендикуляры до пересечения с графиком функции (рис. 2);

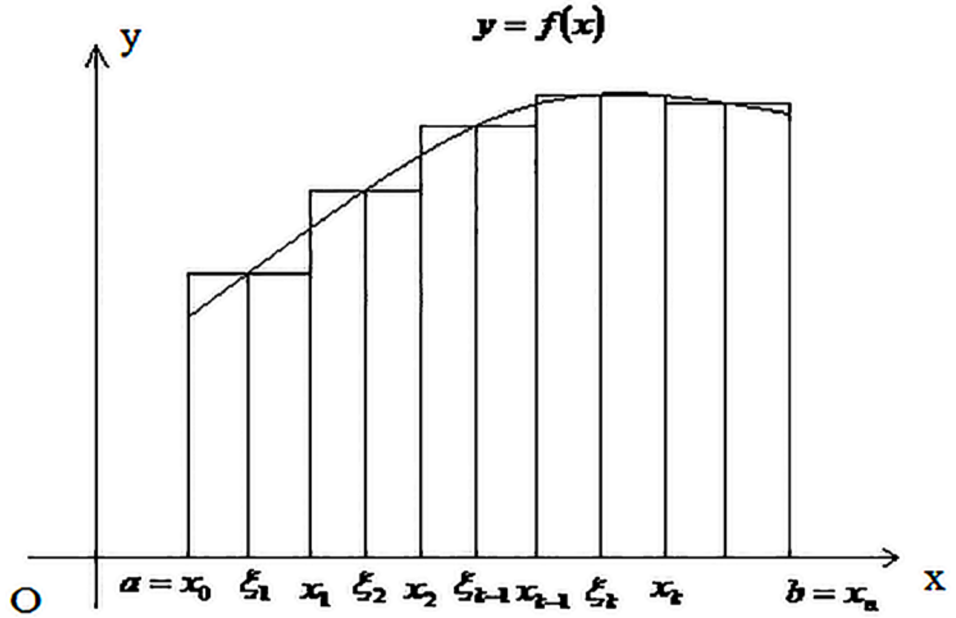

Рисунок 2

2) обозначим длину каждого частичного отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$;

3) на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ выберем произвольно точку ξ_k; из каждой точки деления восстановим перпендикуляры до пересечения с графиком функции;

4) каждую криволинейную полоску заменим прямоугольником с основанием Δx_k и высотой, равной $f(\xi_k)$; найдем их площади $S_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$;

5) все прямоугольники образуют ступенчатую фигуру, ее площадь составляет $S_{\text{ст.ф.}} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ – интегральная сумма;

6) очевидно, что $S_{\text{ст.ф.}} \approx S_{\text{кр.тр.}}$; будем увеличивать число делений отрезка $[a\,;b]$, то есть $n \to \infty$, но так чтобы $\Delta x_k \to 0$ (обозначим $\max\{\Delta x_k\} = \lambda$);

7) за точное значение $S_{\text{кр.тр.}}$ принимаем $\lim S_{\text{ст.ф.}}$, таким образом:

$$S_{\text{кр.тр.}} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{1}$$

Определение. **Определенным интегралом** *называется конечный предел интегральных сумм, если он существует при* $\lambda \to 0$, *и не зависит ни от способа деления отрезка на части, ни от выбора точки внутри каждой части:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k \tag{2}$$

где $f(x)$ *– подынтегральная функция;*
$f(x)\,dx$ *– подынтегральное выражение;*
a *– нижний предел интегрирования;*
b *– верхний предел интегрирования.*

Геометрический смысл: *определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции.*

Вычисление определенного интеграла непосредственно по определению представляет собой трудную работу. Более легкий и удобный способ вычисления был предложен в XVII веке Ньютоном и Лейбницем. Этот способ основан на тесной связи, существующей между производной и интегралом.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a\,; b]$ *и* $F(x)$ *– какая-либо первообразная на* $[a\,; b]$ *для* $f(x)$, *то имеет место формула (3):*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Формулу (3) называют **формулой Ньютона-Лейбница.**

2 СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k\,f(x)\;dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \big(f_1(x)\pm\ldots\pm f_2(x)\big)\;dx = \int_a^b f_1(x)\,dx\ \pm\ \ldots\ \pm\ \int_a^b f_2(x)\,dx$$

3. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\;dx = 0$$

4. При изменении порядка интегрирования знак определенного интеграла меняется на противоположный:

$$\int_a^b f(x)\;dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

5. Если отрезок $[a\,;b]$ точкой $x = c$ разбит на части, то имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\;dx = \int_a^c f(x)\;dx + \int_c^b f(x)\;dx$$

6. Если на отрезке $[a\,;b]$, где $a < b$ и $f(x) \le \varphi(x)$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

7. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a\,;b]$ и $a \le b$, то:

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

8. **Теорема о среднем**: *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a\,;b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что справедливо равенство:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

9. Если функция $f(x)$ – нечетная, то есть $f(-x) = -f(x)$, то:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

10. Если функция $f(x)$ – четная, то есть $f(-x) = f(x)$, то:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\;dx = 2\int_0^a f(x)\;dx$$

3 МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Методы вычисления определенного интеграла те же, что и для неопределенного, однако нужно использовать формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 1. Вычислите интеграл $\int_0^1 (x^2+1)^2 dx$.

Решение:

$$\int_0^1 (x^2+1)^2 dx = \int_0^1 (x^4+2x^2+1)\;dx =$$

$$=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1=\frac{28}{15}$$

Пример 2. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)\right)=\frac{\pi}{4}$$

Пример 3. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Решение:

$$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}=\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}dx=\left/\begin{array}{c}11+5x=t\\ 5dx=dt\ \Rightarrow\ dx=\dfrac{dt}{5}\\ t_{\text{н}}=1,\quad t_{\text{в}}=6\end{array}\right/=$$

$$=\int_1^6 t^{-3}\,\frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int_1^6 t^{-3}dt==\frac{1}{5}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}\Big|_1^6=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{t^2}\Big|_1^6=$$

$$=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=-\frac{1}{10}\left(-\frac{35}{36}\right)=\frac{7}{72}$$

Пример 4. Вычислите интеграл $\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Решение:

$$\int_1^4\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^4\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)dx=\left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1}\right)\Bigg|_1^4=\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}\right)\Big|_1^4$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1^3}\right)-2\left(\sqrt{4}-\sqrt{1}\right)=\frac{2}{3}(8-1)-2(2-1)=\frac{14}{3}-2=\frac{8}{3}$$

3.1 Метод замены переменной

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ \ b]$, требуется вычислить $\int_a^b f(x)\,dx$.

Заменим переменную x, полагая:

$$x = \varphi(t) \tag{4}$$

Тогда:

$$dx = \varphi'(t)dt \tag{5}$$

Из равенства (4) найдем, что значению $x = a$ соответствует значение $t = \alpha$, а значению $x = b$ соответствует $t = \beta$. Следовательно, справедлива формула (6):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big/ \begin{array}{c} x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t)\,dt \\ \text{при } x = a \Rightarrow t_{\text{н}} = \alpha \\ \text{при } x = b \Rightarrow t_{\text{в}} = \beta \end{array} \Big/ = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt \tag{6}$$

Пример 5. Вычислите интеграл $\int_2^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Решение:

$$\int_2^{e^2} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \Bigg/ \begin{array}{c} \text{Введем замену } \ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt \\ \text{Изменим пределы интегрирования} \\ t_{\text{н}} = \ln 2;\ t_{\text{в}} = \ln e^2 = 2 \end{array} \Bigg/ = \int_{\ln 2}^{2} \frac{dt}{t^3} = \int_{\ln 2}^{2} t^{-3}dt =$$

$$\frac{t^{-2}}{-2}\Bigg|_{\ln 2}^{2} == -\frac{1}{2t^2}\Bigg|_{\ln 2}^{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2\ln^2 2} = \frac{-\ln^2 2 + 4}{8\ln^2 2} = \frac{4 - \ln^2 2}{8\ln^2 2}$$

Пример 6. Вычислите интеграл $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}dx$.

Решение:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx = \Bigg/ \begin{matrix} \text{Введем замену } x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\ dt \\ \text{Изменим пределы интегрирования} \\ \text{если } x = 0 \Rightarrow t_{н} = 0; \\ \text{если } x = 2 \Rightarrow\ t_{в} = \dfrac{\pi}{2}. \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2\ \cos t\ dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\ \cos t\ dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, d\, t =$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\ dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\ dt = 2\ \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= (2t + \sin 2t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\ \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + (\sin\pi - \sin 0) = \pi$$

Пример 7. Вычислите интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{16x\ dx}{(x^2+1)^5}$.

Решение:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{16x\ dx}{(x^2+1)^5} = \Bigg/ \begin{matrix} \text{Введем замену } x^2+1 = t \Rightarrow 2xdx = dt \\ \text{Изменим пределы интегрирования} \\ \text{если } x = 1 \Rightarrow t_{н} = 2; \\ \text{если } x = \sqrt{3} \Rightarrow\ t_{в} = 4. \end{matrix} \Bigg/ = \int_2^4 \frac{8dt}{t^5} dt$$

$$=$$

$$= 8 \int_2^4 t^{-5} dt = 8\ \frac{t^{-4}}{-4} \Bigg|_2^4 = -\ \frac{2}{t^4} \Bigg|_2^4 = -\ \left(\frac{2}{4^4} - \frac{2}{2^4}\right) = -\ \left(\frac{2}{256} - \frac{2}{16}\right) =$$

$$= -\ \left(\frac{1}{128} - \ \frac{1}{8}\right) = -\ \frac{1-16}{128}\ =\ \frac{15}{128}$$

Пример 8. Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3}$.

Решение:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x + 3} = \left/ \begin{array}{c} \text{Введем замену } t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2};\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \text{Изменим пределы интегрирования} \\ \text{если } x = 0 \Rightarrow t_{\text{н}} = 0; \\ \text{если } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_{\text{в}} = 1. \end{array} \right/ =$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\left(\frac{2\,(1-t^2)}{1+t^2}+3\right)} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2-2t^2+3+3t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\ \operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 0\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\ \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$$

3.2 Интегрирование по частям

Пусть $u = u\,(x)$ и $v = v(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями, тогда:

$$d(u\cdot v) = vdu + udv \tag{7}$$

Проинтегрируем обе части выражения (7) в пределах от *a* до *b:*

$$\int_a^b d(u\cdot v) = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$$

$$\text{или } (u\cdot v)\,|_a^b = \int_a^b v\,du + \int_a^b u\,dv$$

Таким образом:

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\,|_a^b - \int_a^b v\,d\,u \tag{8}$$

Формула (8) носит название формулы интегрирования по частям определенного интеграла.

Пример 9. Вычислите интеграл $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Решение:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \bigg/ \begin{matrix} u = xd \Rightarrow u = dx \\ dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x} \end{matrix} \bigg/ = -xe^{-x}\big|_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx =$$

$$= -e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx == -e^{-1} - e^{-x}\big|_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - e^0) =$$

$$= -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}$$

Пример 10. Вычислите интеграл $\int_0^3 \operatorname{arctg} x\, dx$.

Решение:

$$\int_0^3 \operatorname{arctg} x dx = \bigg/ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \bigg/ = x \cdot \operatorname{arctg} x\,\big|_0^3 - \int_0^3 \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x\,\big|_0^3 - \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x\,d\,x}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x\big|_0^3 - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\,\big|_0^3 =$$

$$= 3\operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2}\,(\ln 10 - \ln 1) = 3\,arctg\,3 - \frac{1}{2}ln10 = 3\,arctg\,3 - ln\sqrt{10}$$

Пример 11. Вычислите интеграл $\int_1^e \ln^2 x\,dx$.

Решение:

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \bigg/ \begin{matrix} u = ln^2 x \Rightarrow du = \dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \bigg/ = x\ln^2 x\,\big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \bigg/ \begin{matrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{matrix} \bigg/ = xln^2 x\,\big|_1^e - 2\left(x\ln x\,\big|_1^e - \int_1^e dx\right) =$$

$$= x\ln^2 x\big|_0^e - 2x\ln x\big|_0^e + 2x\big|_0^e = e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e = e - 2e + 2e = e$$

Практические задания

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 (x^2+1)^2 dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 x\, dx$;

3) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{1+x^2}\, dx$;

4) $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sinx}\cdot cosx\, dx$;

6) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^3 x}\, dx$;

7) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cdot cos3xdx$;

8) $\int_0^1 xe^{4x} dx$;

9) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

10) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$;

11) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$;

12) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^3 dx}{x^2-3x+2}$.

Самостоятельная работа

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 e^{3x+2} dx$;

2) $\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\, dx$;

3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{32xdx}{(x^2+1)^5}$;

4) $\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^x dx}{e^{2x}-1}$;

5) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sinxdx}{(1-cosx)^2}$;

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinxdx$;

7) $\int_{1}^{5} ln(x^2+x)dx$; 8) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x+3x+5}$; 9) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\,(x+1)^2}$.

4 НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение определенного интеграла было дано в предположении, что промежуток интегрирования $[a;\ b]$ *конечен и функция* $f(x)$ *непрерывна на нем. Такой интеграл еще называется* **собственным**. *Если хотя бы одно из условий не выполняется, то интеграл называется* **несобственным.** Например:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\,;\ \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,;\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,;\ \int_{a}^{b} \frac{dx}{x-a}$$

4.1 Несобственные интегралы I рода (интегралы с бесконечными пределами)

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;\ +\infty)$, тогда несобственный интеграл определяется равенством:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\,|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(a)\big) \qquad (9)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл существует или говорят, что он **сходится**. *Если же этот предел не существует или равен* ∞, *то говорят, что несобственный интеграл* **расходится**.

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx, \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\text{или} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{11}$$

где c – произвольное число.

Пример 12. Вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$.

Решение:

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_a^0 =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{a}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\operatorname{arctg}(-\infty)\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 13. Вычислите интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{(x+5)\,dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$

Решение:

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{(x+5)\,dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}} = \int_{1}^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}}(x+5)\,dx =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\left(x^{-\frac{1}{3}} + 5x^{-\frac{4}{3}}\right)dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{15}{x^{\frac{1}{3}}}\right)\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - \frac{15}{\sqrt[3]{x}}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{1}\right) - 15\left(\frac{1}{\sqrt[3]{b}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1}}\right)\right] = \infty$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 14. Вычислите интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Решение:

$$\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} xe^{-x^2}dx = \left/ \begin{matrix} -x^2 = t \\ -2xdx = dt \quad \Rightarrow \quad x\,dx = -\dfrac{dt}{2} \\ t_{\text{н}} = 0, \quad t_{\text{в}} = -b^2 \end{matrix} \right/ =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{-b^2} e^t dt = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} e^t\Big|_0^{-b^2} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b^2} - e^0\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{b^2}} - 1\right) = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 15. Вычислите интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2+2x+5} = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4} =$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \left/ \begin{matrix} x+1 = t \\ dx = dt \\ t_{\text{н}} = a+1 \\ t_{\text{в}} = b+1 \end{matrix} \right/ = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a+1}^{b+1} \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \operatorname{arctg}\frac{t}{2}\Bigg|_{a+1}^{b+1} == \frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty)\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

4.2 Несобственные интегралы II рода (интегралы от разрывных функций)

Если функция $y = f(x)$ определена на $[a;\ b)$ и имеет разрыв в точке $x = b$, то несобственный интеграл определяется равенством:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \tag{12}$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл существует или **сходится.** *Если же этот предел не существует или равен* ∞, *то говорят, что несобственный интеграл* **расходится**.

Аналогично если функция $y = f(x)$ определена на $(a;\ b]$ и имеет разрыв в точке $x = a$, то:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \tag{13}$$

Если функция $y = f(x)$ определена на $[a;\ b]$ и имеет разрыв в точке $x = c$, причем $a < c < b$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{14}$$

Пример 16. Вычислите интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$.

Решение: Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 2$, тогда:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon} (2-x)^{-\frac{1}{2}}dx =$$

$$=\left/\begin{matrix} 2-x=t & \\ -dx=dt & \Rightarrow \quad dx=-\,dt \\ t=2\,, & t=\varepsilon \end{matrix}\right/ = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2}^{\varepsilon} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\,t^{\frac{1}{2}}\Big|_{2}^{\varepsilon} =$$

$$= -2\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{t}\,\Big|_{2}^{\varepsilon} = -2\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Пример 17. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$.

Решение: При $x = 1$ функция $y = \frac{1}{x\ln x}$ является разрывной, тогда:

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{xlnx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{\frac{1}{x}\,dx}{lnx} = \lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\ln x|\,|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(\ln\ln 2 - \ln|\ln(1+\varepsilon)|) =$$

$$= \ln\ln 2 - \ln\ln 1 = \ln\ln 2 - \infty = -\infty$$

Следовательно, несобственный интеграл расходится.

Пример 18. Вычислите интеграл $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

Решение: Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 4$. Для вычисления неопределенного интеграла отрезок $[2;\ 6]$ разделим на две части точкой $x = 4$, и данный интеграл найдем как сумму двух несобственных интегралов:

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2}^{4-\varepsilon}(4-x)^{-\frac{2}{3}}\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{4+\varepsilon}^{6}(4-x)^{-\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$=\left/\begin{matrix} 4-x=t & \\ -dx=dt & \Rightarrow \quad dx=-\,dt \\ t_{\text{н}}=2 & t_{\text{н}}=-\,\varepsilon \\ t_{\text{в}}=\varepsilon & t_{\text{в}}=-\,2 \end{matrix}\right/ = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2}^{\varepsilon} t^{-\frac{2}{3}}\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{-2} t^{-\frac{2}{3}}\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_{2}^{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\right|_{-\varepsilon}^{-2} = -\lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{t}\Big|_{2}^{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0} 3\sqrt[3]{t}\Big|_{-\varepsilon}^{-2} =$$

$$= -3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{\varepsilon} - \sqrt[3]{2}\right) - 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[3]{(-2)} - \sqrt[3]{(-\varepsilon)}\right) =$$

$$= -3\left(-\sqrt[3]{2}\right) - 3\sqrt[3]{(-2)} = 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

Практические задания

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл I рода:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{16+x^2}$; 2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \cos x\, dx$;

4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}\, dx$; 5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; 6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+8}}$;

7) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$; 8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+7}$; 9) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\cdot(x+5)}$.

Задание 3. Вычислите несобственный интеграл II рода:

1) $\displaystyle\int_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; 2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$; 3) $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{dx}{(x-3)^2}$;

4) $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln x\, dx$; 5) $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2+2x-3}$; 6) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[4]{lnx}}$; 8) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2 - x - 2}$; 9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{cosx}$.

Самостоятельная работа

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл I рода:

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2 + 9}$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{\frac{\pi}{2}} sinx\,dx$;

4) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-5x} dx$; 5) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{2x} dx$.

Задание 3. Вычислите несобственный интеграл II рода:

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3 + \sqrt[3]{x} - 7}{\sqrt[5]{x^3}} dx$; 2) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-2)^2}$; 3) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2 - 1}$;

4) $\int\limits_{-3}^{1} \frac{x\,dx}{x^2 - 4}$; 5) $\int\limits_{0}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}}$; 6) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

5 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

5.1 Вычисление площадей плоских фигур

Если криволинейная трапеция ограничена сверху непрерывной кривой $y = f(x)$, снизу осью OX, с боков прямыми $x = a$, $x = b$, причем $a < b$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 3) вычисляется по формуле (15):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \tag{15}$$

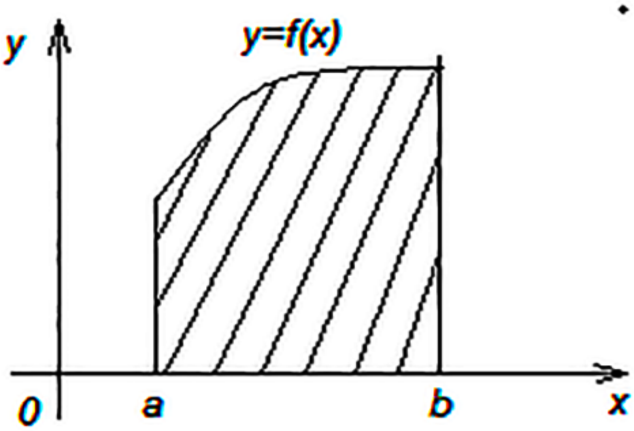

Рисунок 3

Если криволинейная трапеция ограничена снизу непрерывной кривой $y = f(x)$, сверху осью OX, с боков прямыми $x = a$, $x = b$, причем $a < b$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 4) вычисляется по формулам (16), (17):

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx, \tag{16}$$

$$\text{или } S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \tag{17}$$

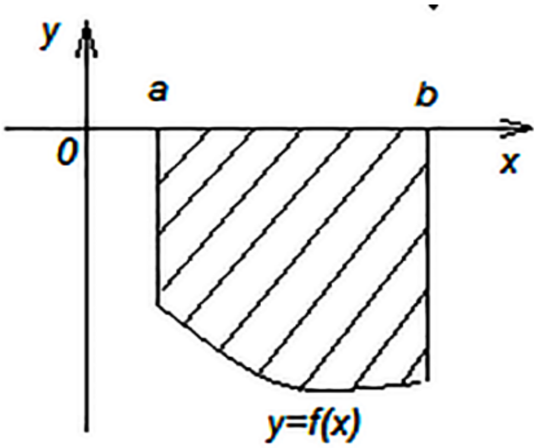

Рисунок 4

Если непрерывная кривая $y = f(x)$ пересекает ось OX конечное число раз (рис. 5), то чтобы вычислить площадь фигуры нужно $[a\,;\,b]$ разбить на части, в пределах которых функция не меняет знак и применить соответствующую формулу (15), (16), (17):

$$S = \int_a^b f(x)\,dx + \left|\int_b^c f(x)\,dx\right| + \int_c^d f(x)dx \qquad (18)$$

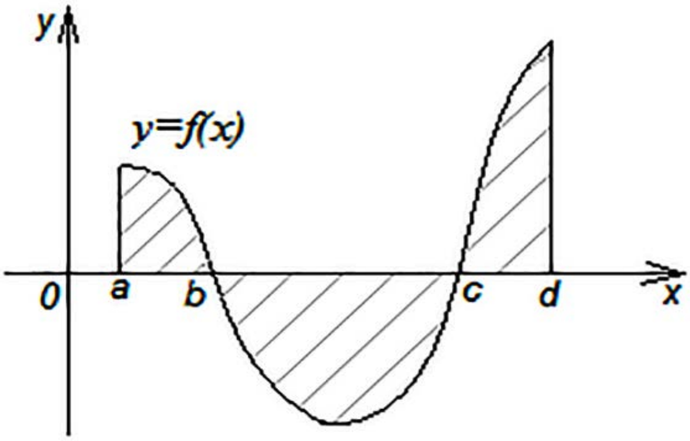

Рисунок 5

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 6) находится по формуле (19):

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx \tag{19}$$

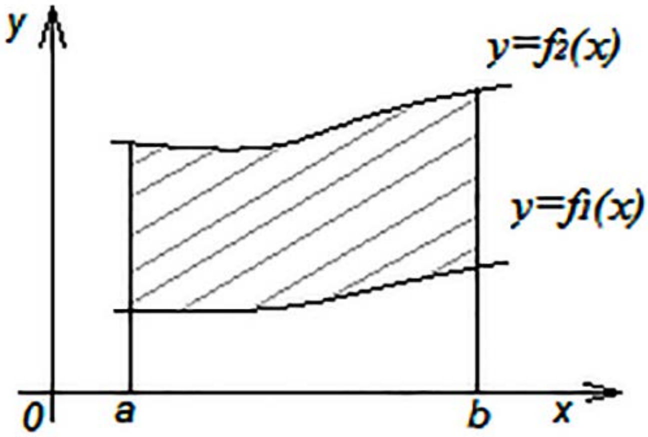

Рисунок 6

Если криволинейная трапеция ограничена справа непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, слева осью OY, сверху и снизу прямыми $y = c$, $y = d$, причем $c < d$, то площадь криволинейной трапеции (рис. 7) вычисляется по формуле (20):

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy \tag{20}$$

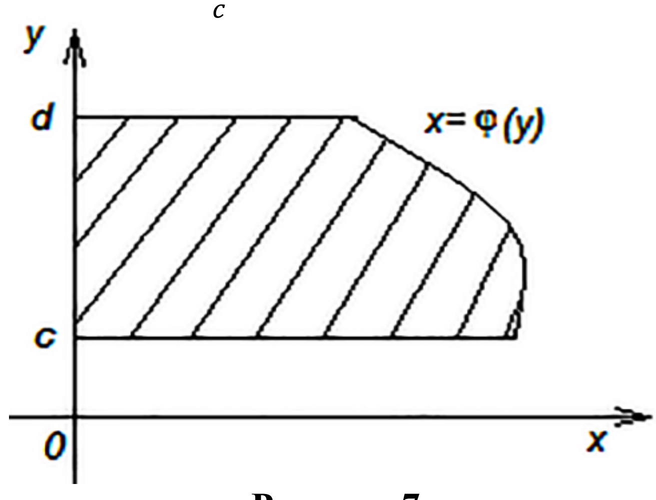

Рисунок 7

Если кривая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a, x = b$ и отрезком $[a\,;\,b]$ оси OX, выражается формулой (21):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\ dt \qquad (21)$$

где t_1, t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$ ($\psi(t) \geq 0$ при $t_1 \leq t \leq t_2$).

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ (где $\alpha < \beta$) (рис. 8), вычисляется по формуле (22):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi \qquad (22)$$

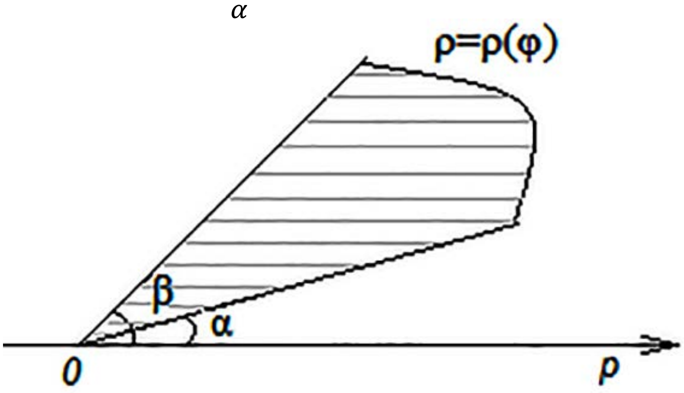

Рисунок 8

Пример 19. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью *OX*.

Решение:

Парабола пересекает ось *OX* в точках $(0\,;\ 0)$ и $(2\,;\ 0)$ (рис. 9).

Следовательно:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)\, dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}\ \text{ед}^2$$

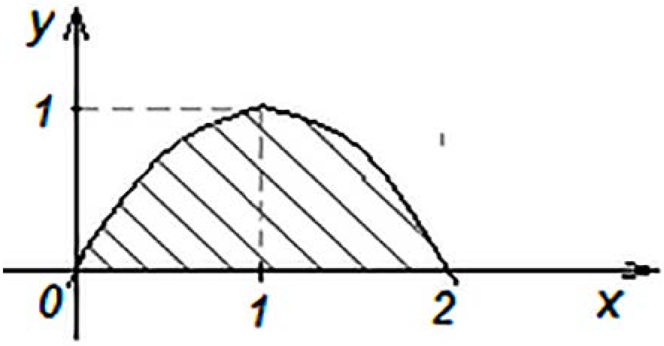

Рисунок 9

Пример 20. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6 - x^2$ и $y = x^2 - 2$.

Решение: Уравнению $y = 6 - x^2$ соответствует парабола с вершиной в точке $(0\,;\ 6)$. Уравнению $y = x^2 - 2$ соответствует парабола с вершиной в точке $(0\,;-2)$ (рис. 10).

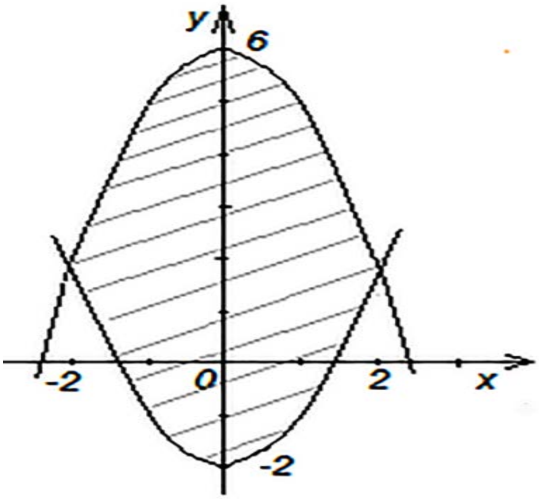

Рисунок 10

Найдем абсциссы точек пересечения заданных кривых:

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

Следовательно: $6 - x^2 = x^2 - 2;\ x_1 = -2;\ x_2 = 2.$

Таким образом:

$$S = \int_{-2}^{2} [(6 - x^2) - (x^2 - 2)]\, dx = 2 \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = 2 \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 2 \left(4\ (2 + 2) - \frac{1}{3}\ (2^3 - (-2)^3)\right) = 2 \left(16 - \frac{1}{3} \cdot 16\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{48 - 16}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}\ \text{ед}^2$$

Пример 21. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 6x - 5$ и осями координат.

Решение: Парабола пересекает ось *OX* в точках $(1\,;\,0)$ и $(5\,;\ 0)$ (рис. 11).

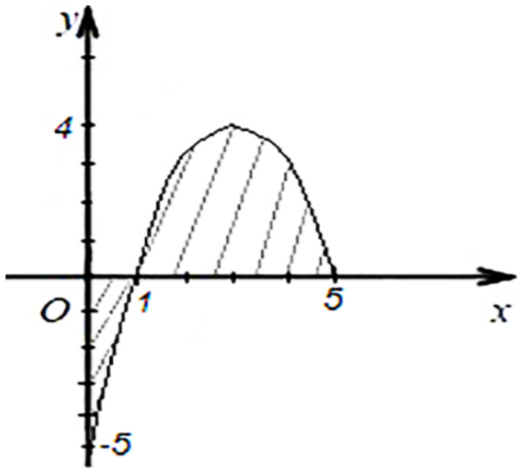

Рисунок 11

Следовательно:

$$S = \left|\int_{0}^{1} (-x^2 + 6x - 5)\ dx\right| + \int_{1}^{5} (-x^2 + 6x - 5)\ dx =$$

$$= \left| \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right) \Big|_{0}^{1} \right| + \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right) \Big|_{1}^{5} =$$

$$= \left|-\frac{1}{3} + 3 - 5\right| + \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5\right) =$$

$$= \frac{7}{3} - \frac{124}{3} + 52 = -\frac{117}{3} + 52 = -39 + 52 = 13\ \text{ед}^2$$

Пример 22. Вычислите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = a\ (t - \sin t) \\ y = a\ (1 - \cos t) \end{cases}$ и осью *OX*.

Решение: Циклоида – плоская кривая, которую описывает точка M окружности радиуса a, катящаяся без скольжения по прямой линии (рис. 12).

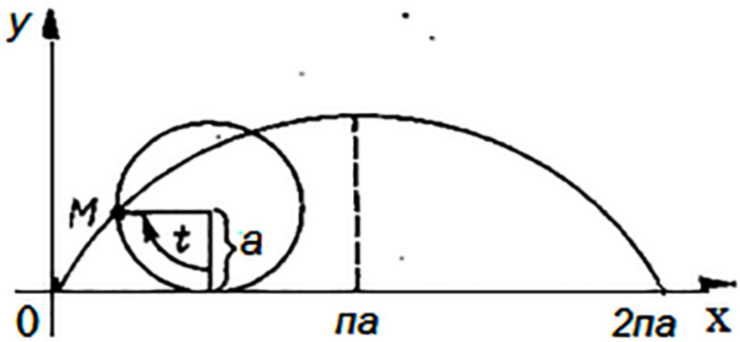

Рисунок 12 – Циклоида

Заметим, что данная кривая задана в параметрическом виде, при этом выполняется соотношение $0 \le x \le 2\pi a$.

Если $x = 0$, то $a\ (t - \sin t) = 0$; $t = 0$.

Если $x = 2\pi a$, то $a\ (t - \sin t) = 2\pi a$; $t = 2\pi$.

$$S = \int_0^{2\pi a} y\,dx = \int_0^{2\pi} a\ (1 - \cos t)\ a\ (1 - \cos t)\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2\, dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)\ dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\ dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)\ dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \text{ ед}^2$$

Пример 23. Вычислите площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a\ \cos t, \\ y = b\ \sin t. \end{cases}$

Решение: Так как эллипс симметричен относительно осей координат (рис. 13), то достаточно вычислить площадь одной четвертой части всей фигуры, а результат умножить на четыре.

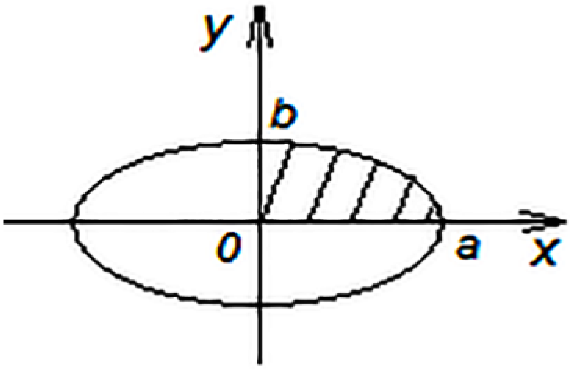

Рисунок 13 – Эллипс

Данная кривая задана в параметрическом виде, при этом $0 \leq x \leq 2\pi a$.

Если $x = 0$, то $a\cos t = 0$; $t = \frac{\pi}{2}$.

Если $x = a$, то $a \cos t = a$; $t = 0$.

$$S = 4\int_0^a y dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a\ (-\sin t)\ dt = -4\,a\,b\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 4\,a\,b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\ dt = 4\,a\,b\left(\frac{1}{2}\,t - \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\ (\sin\pi - \sin 0)\right) = ab\pi \text{ ед}^2$$

Пример 24. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = a\cos 3\varphi (a > 0)$.

Решение: Так как фигура состоит из трех одинаковых «лепестков» (трехлепестковая роза) (рис. 14), то достаточно вычислить площадь одной шестой части всей фигуры, а результат умножить на шесть.

Если $\rho = 0$, то $a \cos 3\varphi = 0$; $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Если $\rho = a$, то $a\cos3\varphi = a$; $\varphi = 0$.

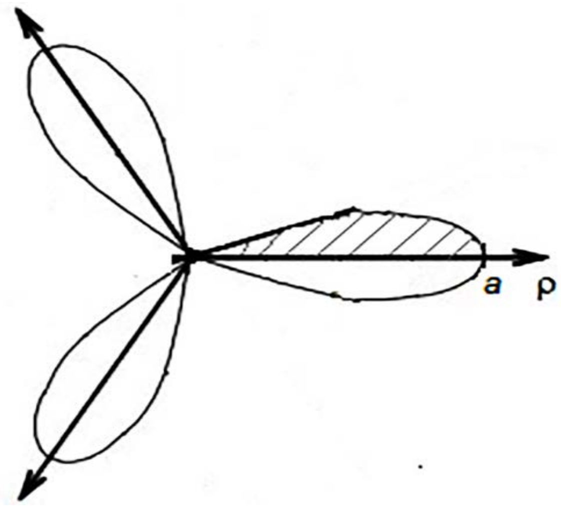

Рисунок 14 – Трилистник

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 d\varphi = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi d\varphi = 3\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos6\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin6\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi a^2}{4} \text{ ед}^2$$

Пример 25. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$.

Решение: В силу симметрии кардиоиды (рис. 15) достаточно вычислить площадь половины части всей фигуры, а результат умножить на два.

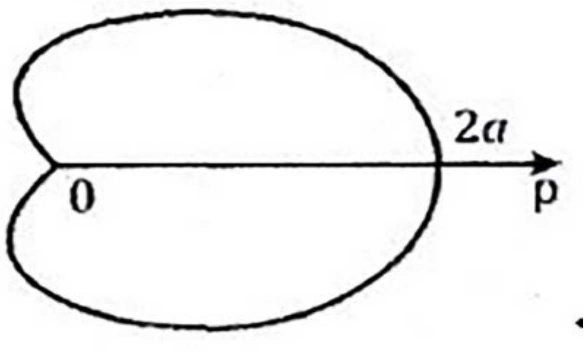

Рисунок 15 – Кардиоида

Если $\rho = 0$, то $a\,(1 + \cos\varphi) = 0$; $\varphi = \pi$.

Если $\rho = 2a$, то $a\ (1 + \cos\varphi) = 2a$; $\varphi = 0$.

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2 d\varphi = \int_0^{\pi} a^2\,(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\pi}\left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos2\varphi}{2}\right)d\varphi == a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{3\pi}{2}a^2\ \text{ед}^2$$

5.2 Объем тела вращения

Если криволинейная трапеция ограничена кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a, x = b$, вращается вокруг оси *OX*, то объем тела вращения вычисляется по формуле (23):

$$V_{ox} = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx \tag{23}$$

Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, прямыми $y = c, y = d$, отрезком $[c;\ d]$ на оси *OY* вычисляется по формуле (24):

$$V_{oy} = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy \tag{24}$$

Если фигура ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$, и прямыми $x = a, x = b$, вращается вокруг оси *OX*, то объем тела вращения вычисляется по формуле (25):

$$V_{ox} = \pi\int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx \tag{25}$$

Объем тела, образованного вращением кривых $x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y)$ $\left(\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)\right)$ и прямыми $y = c, y = d$, вокруг оси *OY*, вычисляется по формуле (26):

$$V_{oy} = \pi \int_c^d \left(\varphi_2^2(y) - \varphi_1^2(y)\right) dy \tag{26}$$

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi\ (t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где $\alpha \le t \le \beta$, то:

$$V_{ox} = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\, dt, \tag{27}$$

$$V_{oy} = \pi \int_\alpha^\beta \varphi^2(t)\psi'(t)\, dt \tag{28}$$

Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, вычисляется по формуле (29):

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3 sin\varphi\ \, d\varphi \tag{29}$$

Пример 26. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2, x = y^2$.

Решение: Тело, образованное вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной параболами, представлено на рисунке 16. Найдем координаты (абсциссы) точек пересечения парабол из системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathrm{y} = \mathrm{x}^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Таким образом, $x_1 = 0;\ x_2 = 1$.

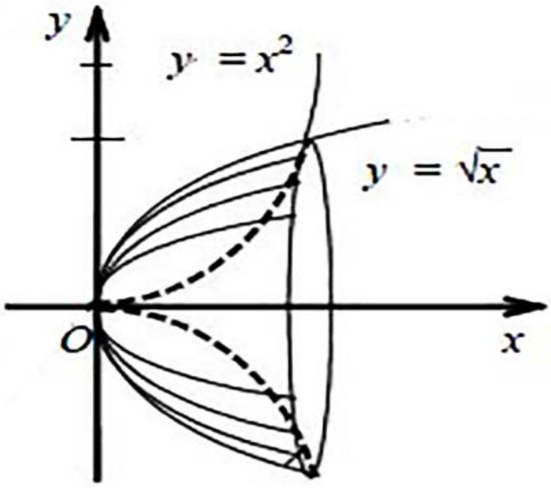

Рисунок 16

Применим формулу (25):

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)\ dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{10}\ \pi \text{ ед}^3$$

Пример 27. Вычислите объем тела, образованного вращением первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$ вокруг оси *OX*.

Решение: Заметим, что данная кривая задана в параметрическом виде, при этом $0 \le x \le 2\pi a$.

Если $x = 0$, то $a(t - \sin t) = 0;\ t = 0$.

Если $x = 2\pi a$, то $a\,(t - \sin t) = 2\pi a;\ t = 2\pi$.

$$V_{OX} = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\ t)^2 a\,(1 - \cos\ t)\ dt =$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos\ t)^3\ dt = \pi \cdot a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3\ dt =$$

$$= \pi \cdot a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\ dt =$$

$$= \pi \cdot a^3 \left(t\,\Big|_0^{2\pi} - 3\sin t\,\Big|_0^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cos\ t\, dt \right) =$$

$$= \pi \cdot a^3 \left(2\pi + \frac{3}{2} \cdot 2\pi - \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t)\ d\ (\sin t) \right) =$$

$$= \pi \cdot a^3 \left(5\pi - \sin t\,\Big|_0^{2\pi} + \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi} \right) = 5\pi^2 a^3 \text{ ед}^3$$

5.3 Длина дуги плоской кривой

Пусть в прямоугольных координатах дана плоская кривая *AB*, уравнение которой $y = f(x)$, где $a \le x \le b$ и функция $y = f(x)$ имеет на $[a;\ b]$ непрерывную производную $f'(x)$.

Определение. *Длиной дуги AB называется предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда длина наибольшего звена стремится к нулю:*

$$l = \lim_{max\Delta x_i \to 0} \sum_{l=1}^{n} \Delta l_i$$

Если кривая *AB* задана функцией $y = f(x)$ – непрерывной вместе со своей производной на отрезке $[a;\ b]$, то длина кривой *AB* вычисляется по формуле (30):

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \qquad (30)$$

Если кривая *AB* задана функцией $x = \varphi(y)$ – непрерывной вместе со своей производной на отрезке $[c\,;\,d]$, длина этой кривой *AB* вычисляется по формуле (31):

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy \tag{31}$$

Если кривая *AB* задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi\ (t), \\ y = \psi\ (t), \end{cases}$ причем $t_1 \ \le \ t \ \le \ t_2$, то имеем формулу (32) для расчета длины этой кривой:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}dt \tag{32}$$

Если кривая *AB* задана уравнениям в полярной системе координат $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги *AB* вычисляется по формуле (33):

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}d\varphi \tag{33}$$

Пример 28. Найдите длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки $A\ (4\,;\ 8)$.

Решение: Кривая симметрична относительно оси *OX* (рис. 17), поэтому вычислим длину верхней части кривой и результат удвоим. Уравнение полукубической параболы имеет вид $y^2 = x^3$ или $y = x^{\frac{3}{2}}$. Дифференцируя уравнение кривой, найдем $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Применив формулу (30), получим:

$$l = 2 \cdot \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \left/ \begin{matrix} 1 + \dfrac{9}{4}x = t \\ \dfrac{9}{4}\,dx = dt \ \ \Rightarrow \ \ dx = \dfrac{4}{9}\,dt \\ t_{\text{н}} = 1, \qquad t_{\text{в}} = 10 \end{matrix} \right/ = \frac{8}{9} \cdot \int_1^{10} \sqrt{t}\ dt =$$

$$= \frac{8}{9} \cdot \int\limits_{1}^{10} t^{\frac{1}{2}}\, dt = = \frac{16}{27}\, t^{\frac{3}{2}} \Big|_{1}^{10} = \frac{16}{27}\sqrt{t^3}\Big|_{1}^{10} = \frac{16}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) =$$

$$= \frac{16}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \text{ ед.}$$

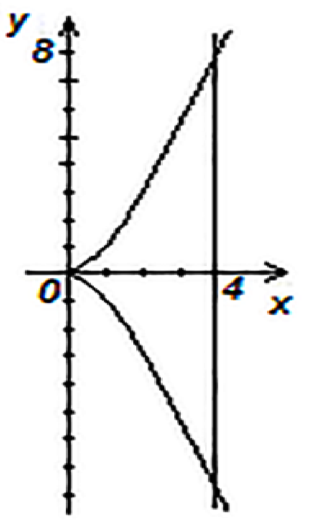

Рисунок 17

Пример 29. Найдите длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases} 0 \le t \le 2\pi,$ предполагая, что $a > b$.

Решение: В силу симметрии астроиды (рис. 18) вычислим сначала одну четвертую длины, а затем результат умножим на четыре.

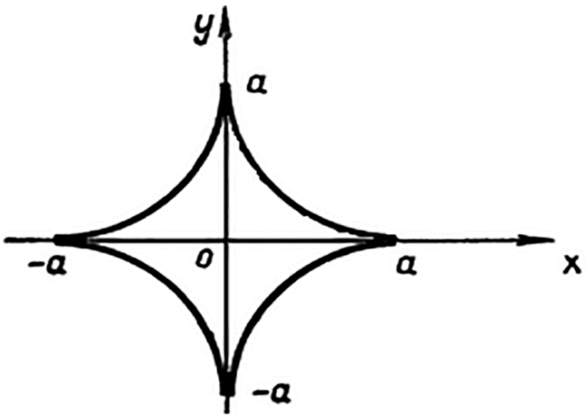

Рисунок 18 – Астроида

Применяя формулу (32), получим:

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\, 9\ \cos^4 t\,(-\sin t)^2 + a^2\, 9 \sin^4 t\ \cos^2 t}\ dt =$$

$$= 12\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)}\ dt =$$

$$= 12\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = 6\, a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\, t\, dt = 3\, a\,(-\cos 2t)\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6a \text{ ед.}$$

Пример 30. Найдите длину первого витка архимедовой спирали $\rho = a\varphi$.

Решение*:* Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла $0 \le \varphi \le 2\pi$ (рис. 19).

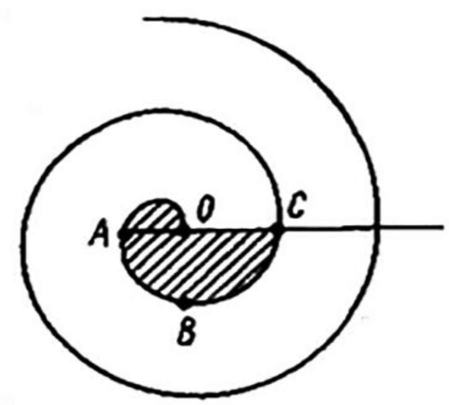

Рисунок 19 – Спираль Архимеда

Используя формулу (33), имеем:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\ d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\ d\varphi =$$

$$= \Bigg/ \begin{matrix} u = \sqrt{\varphi^2 + 1} & du = \dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2 + 1}}\, d\varphi \\ dv = d\varphi & v = \varphi \end{matrix} \Bigg/ =$$

Рассмотрим решение последнего интеграла методом интегрирования по частям:

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \left/ \begin{matrix} u=\sqrt{\varphi^2+1} & du=\dfrac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\,d\varphi \\ dv=d\varphi & v=\varphi \end{matrix} \right/ =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right) =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\varphi^2+1-1}{\sqrt{\varphi^2+1}}d\varphi\right) =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right) =$$

$$= a\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

Выразим:

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\Big|_0^{2\pi}\right)$$

Таким образом:

$$l = a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\ \ d\varphi = a\ \left(\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\ \left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right) \text{ ед.}$$

Практические задания

Задание 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = 2 - x^2$;

2) $y = 1 - x^2, y = x^2 + 2, x = 0, x = 1$;

3) $y = \sin 2x, y = 1, x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$;

4) $y = \cos x, y = -\frac{x}{2}, x = 0, x = \frac{3}{2}\pi$.

Задание 5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) астроидой $\begin{cases} x = a\ \cos^3 t, \\ y = a\ \sin^3 t, \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x = a\ \sin t \cos^2 t, \\ y = a\ \cos t \sin^2 t, \end{cases}$ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;

3) первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, $a > 0$ и полярной осью;

4) лемнискатой $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$.

Задание 6. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2 = (x-1)^3$, $x = 2$;

2) $y = \frac{x^2}{2} + 1$, $x = 0, x = 2$.

Задание 7. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \frac{4}{x}$, $x = 1, x = 4$;

2) $y = \arcsin x\,, y = 0, y = \frac{\pi}{2}$

Задание 8. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX:*

1) астроиды $\begin{cases} x = \mathrm{a}\ \cos^3 t, \\ y = a\ \sin^3 t, \end{cases}$;

2) кривой $\begin{cases} x = \sin t + 1, \\ \ \ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 0,\ y = 0,\ 0 \le x \le 1.$

Задание 9. Найдите длину дуги:

1) кривой $y = \ln\cos x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{6}$;

2) кривой $\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases}$ $0 \le t \le 3$;

3) кардиоиды $\rho = a\ (1 + \cos\varphi), a > 0$;

4) первой арки циклоиды $\begin{cases} x = a\ (t - \sin t), \\ y = a\ (1 - \cos t). \end{cases}$

Самостоятельная работа

Задание 4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = \ln x, y = 0, x = 2, x = 10;$

2) $x^2 + y - 3 = 0, x + y - 1 = 0;$

3) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right), \end{cases}$ между точками пересечения с осью *OX*;

4) одним лепестком кривой $\rho = 5\sin 3\varphi$.

Задание 5. Найдите объем тела вращения, ограниченного линиями:

1) $y = 2x - x^2$и $y = -x + 2$ вокруг оси *OX*;

2) $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1$ вокруг оси *OY*;

3) верхней половиной эллипса $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $x = 0, y = 0$ вокруг оси *OY*.

Задание 6. Найдите длину дуги:

1) кривой $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{8};$

2) кривой $\begin{cases} x = 4 - \frac{t^4}{4}, \\ y = \frac{t^6}{6}, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2;$

3) кривой $\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^4 (2x^5 - 5x^3 + 10)\ dx$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot \cos x\, dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 2x}{3cos2x} dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой:

$$3x^2 + 4y = 0, 2x + 4y + 1 = 0.$$

Задание 4. Найдите объем тела вращения, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX*, ограниченной синусоидой $y = \sin x$ и отрезком $0 \leq x \leq \pi$ оси *OX*.

Вариант 2

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{-1}^2 (5x - 2)^2 dx$; 2) $\int_0^1 \frac{2x - 7}{x^2 - 2x + 6} dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2^8 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^0 x \cdot e^x dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x + 1$, $y = \frac{2}{x}$, $y = 0, x = 3$.

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривой $y^2 = \frac{2x^3+x}{4}$.

Вариант 3

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^2 (4x^3-5)^2\,dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{x-1}{x^3-3x}dx$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos^8 x \cdot \sin x\,dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной частью спирали:

$$y = 4x - x^2, y = 5, x = 3.$$

Задание 4. Вычислите объем тела, полученного от вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной осью *OY*, синусоидой и косинусоидой ($0 \le x \le \frac{\pi}{2}$).

Вариант 4

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^4 (4x^3-6)^2 dx$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^3-7x^2-3x}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6\sin 2x}{2\cos 2x - 4}\,dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 2x - x^2 + 3; y = x^2 - 4x + 3.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Вариант 5

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{2x^5 - 8x^2 + 6}{x}\,dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{3x-1}{x^2+x+2}\,dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-3)^3}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (4-x)^3$ и прямой $x = 0$.

Задание 4. Определите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривой $y = \operatorname{ctg} x$, $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант 6

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{5x^6 - 8x^3 + 3}{x^3}\,dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+2)\cdot(x+4)^2}\,dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{5x-6}{x^2-10x+3}\,dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_5^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7-x)^2}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x^3$ и прямыми $y = 8; x = 0$.

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси *OX*, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0.$$

Вариант 7

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x^4 + 6x^3 - 5}{x^3} dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 7} dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x^3} dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = x^2 + 4x; y = x + 4.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $(6 - x)y^2 = x^2$; $0 \le x \le 4$ вокруг оси *OX*.

Вариант 8

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{1}^{2} \frac{x^3 + 4x - 6}{\sqrt[7]{x}} dx$; 2) $\int_{1}^{2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x \cdot (x^2 + 2x + 1)} dx$; 3) $\int_{0}^{1} (x + 9)e^x dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 4$ и прямой $x = 0$.

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и прямой $y = -x + 2$.

Вариант 9

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x^3} - 4x + 6\right) dx$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x \cdot (x^2 + 1)}$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{3x + 4}{x^2 + 6x + 13}\, dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[4]{\ln x}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 4 - x^2$ и осью *OX*.

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми:

$$y = 1 - x^2; x = 0; x = \sqrt{y - 2}; x = 1.$$

Вариант 10

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{3x^3 - 6x^5 + 7}{\sqrt[5]{x^3}} dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x + 1) \cdot (x^2 + 1)}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{x + 1}{2x^2 + x + 1} dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \cos x\,; x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}, y = 0.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$.

Вариант 11

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{3x^3 - 8x + 1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$; 2) $\int\limits_0^1 x \cdot e^{-x} dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{2x-3}{x^2+4x+1}\, dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x+7}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = (x-1)^2;\ y^2 = (x-1).$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми:

$$y = 3\sin x\,; y = \sin x\,; 0 \le x \le \pi.$$

Вариант 12

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}} (3x^3 + 6x^2 - 6)\, dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos 2x\, dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{2x+7}{x^2-6x+13}\, dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = x\sqrt{8 - x^2}; y = 0; 0 < x < 2\sqrt{2}.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми $y = -x^2 + 5x + 6;\ \ y = 0.$

Вариант 13

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{(5x^6 + 7x^3 - 8)dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_0^2 x \cdot e^{2x} dx$; 3) $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 3x + 1}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = x\sqrt{4 - x^2}; y = 0; 0 \le x \le 2.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми:

$$y = 5\cos x; y = \cos x; x = 0; x > 0.$$

Вариант 14

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{x^6 - 2x^5 + 8}{\sqrt[3]{x}} dx$; 2) $\int_0^\pi x \cdot \sin 3x\, dx$; 3) $\int_0^1 \frac{(5x - 2)\, dx}{x^2 - 8x + 1}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = (x+1)^2;\ y^2 = x+1.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми $y = 2x - x^2$; $2x^2 - 4x + y = 0$.

Вариант 15

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{x^2 - 6x^5 - 7}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x dx$; 3) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_5^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 4 - x^2; y = x^2 - 2x.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной кривыми $y = (x-1)^2; y = 1$.

Вариант 16

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_1^3 (6x^3 + 8)^2 dx$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \arcsin x\, dx$; 3) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+4}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = x^2 - 4x + 4; y = 4 - x^2.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной кривыми:

$$y = x^2 + 1; y = x; x = 0; x = 1.$$

Вариант 17

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{(2x-1)\,dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^3(x-1)^2}$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{0}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{x}{x^2+1}; y = 0; x = 0.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной кривыми:

$$y = (x-1)^2; x = 0; y = 0; x = 2.$$

Вариант 18

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int\limits_0^2 \left(3x^5 - \sqrt[7]{x^3} + 5\right) dx$; 2) $\int_3^4 \frac{x^3 dx}{(x^2 - 1) \cdot (x + 1)}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx\, dx}{2 + sinx}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x - 2)^2}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = e^x; y = e^{-x}; x = 1.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной кривыми $y = x^3; y = x^2$.

Вариант 19

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{\frac{5}{3}}^1 \frac{x^5 + 2}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int\limits_4^5 \frac{dx}{(x - 1)^2(x^2 + 2)}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2 + x + 1}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{7 - x}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = (x - 2)^3; y = 4x - 8.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной параболой $y = x^2 - 2x + 1$ и прямыми $x = 2; y = 0$.

Вариант 20

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{-3}^{3}\left(2x^3-\sqrt{x}\right)^2 dx$; 2) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\cdot\cos 3x\,dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,dx}{5+3\cos x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot(\ln x)^2}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$x=4-y^2;\, x=y^2-2y.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY, ограниченной кривыми:

$$y^2=x-2;\, y=0;\, y=x^3;\, y=1.$$

Вариант 21

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_{1}^{2}\frac{\sqrt[6]{x^5}-7x+9}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int_{1}^{3} x^2\ln x\,dx$; 3) $\int_{0}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{6\sin x}{1+4\cos x}dx$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$x=(y-2)^3;\, x=4y-8.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY, ограниченной кривыми $y=x^3$; $y=x$.

Вариант 22

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \left(7x^3 - \sqrt[5]{x^2}\right) dx$; 2) $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \, dx}{1 + \sin x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^2 \frac{x \, dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = 2x - x^2; y = -x.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OY,* ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x - 1}; y = 0; y = 1; x = 0{,}5.$$

Вариант 23

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{(2x - x^3)^2 dx}{x^3}$; 2) $\int_1^3 \ln x dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 3x dx}{1 + \cos 3x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^2}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = (x - 1)^2;\ y^2 = x - 1.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX*, ограниченной кривыми $y = x^2 - 2x + 2; y = 2 + 6x - x^2$.

Вариант 24

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-2x}{x^4}dx$; 2) $\int_0^4 x\cdot e^{2x}dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5+4\cos x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-x-2}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2; y=x+1.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY, ограниченной кривыми $y=\ln x$; $x=2$; $y=0$.

Вариант 25

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int_1^e x^2 \ln x\, dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sin 3x\, dx}{2-\cos 3x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln^4 x}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y=\frac{1}{1+x^2}; y=\frac{1}{2}x^2.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y=\sqrt{x}e^x$, $x=1$, $y=0$.

Вариант 26

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^2 \frac{(3x^4-2)^2dx}{\sqrt{x}}$; 2) $\int_1^2 x\cdot 4^x dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2+\sin x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^1 x^3\cdot \ln x dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y^2=9x; y=x+2.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривыми:

$$y=\frac{1}{4}x^2; y=\frac{1}{8}x^3.$$

Вариант 27

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+1}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{xdx}{(x-1)\cdot(x+2)}$; 3) $\int\limits_{\frac{\pi}{15}}^{\frac{\pi}{10}} \frac{\cos 5x dx}{1+\sin 5x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_1^3 \frac{xdx}{(x-2)^3}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$x=0; x=2; y=2^x; y=2x-x^2.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривыми $y=2-x^4$, $y=x^2$.

Вариант 28

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^1 \frac{2x - 4\sqrt{x} + 3\sqrt[5]{x}}{x^3} dx$; 2) $\int_2^3 \frac{7x^2 dx}{x^3 - 1}$; 3) $\int\limits_2^3 \frac{2x dx}{x \cdot (x^2 + 3)}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x - 1}}.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2; y = 6 - x.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной кривыми $y = 3 - x^2$, $y = 2x, y = 0$.

Вариант 29

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_0^3 \left(2x^4 - \sqrt[5]{x}\right)^2 dx$; 2) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(1 + x^2) \cdot x}$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\cos 3x dx}{9 + 4\sin 3x}$.

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-x^2} dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{1}{2}(x - 3)^2; y = 7 - x.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси OY, ограниченной кривыми $y = x^3$; $y = \sqrt{x}$.

Вариант 30

Задание 1. Вычислите определенный интеграл:

1) $\int_1^3 \left(3x^7 - \sqrt{x}\right)^2 dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+5)\cdot(x^2+4)}$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot 2^x dx.$

Задание 2. Вычислите несобственный интеграл:

$$\int_2^{\infty} (x+1)\ln x \; dx.$$

Задание 3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2; y = 2 - x.$$

Задание 4. Найдите объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси *OX,* ограниченной кривыми:

$$y = xe^x; x = 1; y = 0.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – М. : Юрайт, 2020. – 401 с.

2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 439 с.

3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 320 с.

4. Высшая математика : учебник и практикум / под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – М. : Юрайт, 2020. – 478 с.

5. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. – М. : Юрайт, 2020. – 204 с.

6. Элементы дискретной математики : учебное пособие / А. М. Емельянов [и др.]. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2014. – 106 с.

Учебное издание

Кидяева Наталья Петровна

кандидат технических наук, доцент

Митрохина Олеся Павловна

кандидат технических наук, доцент

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 27.06.2023 г.
Формат 60х90/16. Уч.-изд. л – 0,90. Усл. печ. л. – 3,45.
Тираж по требованию. Заказ 39.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86