Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
аграрный университет»

**Н. П. Кидяева, О. П. Митрохина**

# *ТЕОРИЯ РЯДОВ*

*Учебно-методическое пособие*

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2023

УДК 517.5
ББК 22.1
К38

**Рецензент**

*Сергей Васильевич Щитов, доктор технических наук, профессор кафедры транспортно-энергетических средств и механизации АПК Дальневосточного государственного аграрного университета*

*Рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим советом электроэнергетического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета*

К38 **Кидяева, Н. П. Теория рядов :** учебно-методическое пособие / Н. П. Кидяева, О. П. Митрохина ; Дальневост. гос. аграр. ун-т. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2023. – 88 с.

**ISBN 978-5-9642-0552-4**

Учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический материал по теме «Теория рядов», а также образцы типовых задач, задачи для практических занятий и задания для самостоятельной работы обучающихся. В пособии имеются задания для контрольной работы, которые можно использовать и для расчетно-графической работы. Пособие разработано для обучающихся инженерно-технических и экономических направлений бакалавриата всех форм обучения.

УДК 517.5
ББК 22.1

ISBN 978-5-9642-0552-4

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие «Теория рядов» предназначено для обучающихся инженерно-технических и экономических направлений бакалавриата всех форм обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано на практических занятиях и при самостоятельном изучении материала в объеме программы по дисциплине «Математика».

Учебно-методическое пособие содержит семь разделов. Первый и второй разделы рассматривают числовые знакоположительные ряды и их признаки сходимости. Третий раздел посвящен знакопеременному ряду, его признаку сходимости, абсолютной и условной сходимости рядов. В четвертом – шестом разделах рассматриваются понятия степенного ряда, разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена. Седьмой раздел посвящен рядам Фурье.

Каждый раздел включает краткую теоретическую часть, образцы решений типовых задач, заданий для практических занятий, заданий для самостоятельной работы обучающихся.

# 1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Пусть дана числовая последовательность $U_1$, $U_2$, $U_3$,…, $U_n$,….

**Определение 1.** *Выражение вида*

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad (1)$$

*называется* **числовым рядом** *или* **просто рядом**.

*Числа* $U_1$*,* $U_2$*,* $U_3$*,…* *называются* **членами ряда**, $U_n$ – **общим членом ряда**.

*Сумма первых n членов ряда называется* ***n*-ой частичной суммой ряда** и *обозначается через* $S_n$*, то есть* $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.

**Определение 2.** Е*сли существует* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$*, то ряд (1) называется* **сходящимся,** *а число S – суммой этого ряда.*

*Если* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$*, то ряд (1) называется* **расходящимся.**

**Теорема 1** (*необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

**Замечание 1.** Указанный признак не является достаточным, то есть если $U_n \to 0$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, ряд может быть сходящимся или расходящимся.

**Замечание 2.** Если же для некоторого ряда $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$ или этот предел не существует, то теорема позволяет сразу сказать, что такой ряд расходится.

**Пример 1.** Напишите первые пять членов ряда по заданному общему члену $U_n = \frac{3 \cdot n - 2}{n^2 + 1}$.

**Решение:** Если $n = 1$, то $U_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$.

Если $n = 2$, то $U_2 = \frac{3\cdot2-2}{2^2+1} = \frac{4}{5}$.

Если $n = 3$, то $U_3 = \frac{3\cdot3-2}{3^2+1} = \frac{7}{10}$.

Если $n = 4$, то $U_4 = \frac{3\cdot4-2}{4^2+1} = \frac{10}{17}$.

Если $n = 5$, то $U_5 = \frac{3\cdot5-2}{5^2+1} = \frac{13}{26}$.

Ряд можно записать в виде: $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{13}{26} + \cdots$.

**Ответ:** $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{10} + \frac{10}{17} + \frac{13}{26} + \cdots$.

**Пример 2**. Найдите общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots$.

**Решение:** Числа, стоящие в числителях дробей $\frac{a_n}{b_n}$, образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7. …. По формуле $a_n = a_1 + d\ (n-1)$ вычисляется *n*- й член этой прогрессии. Здесь $a_1 = 1$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n - 1$.

Числа, стоящие в знаменателях дробей $\frac{a_n}{b_n}$ образуют геометрическую прогрессию, *n*-й член которой $b_n = 2^n$. Следовательно, общий член ряда $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

**Ответ:** $U_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

**Пример 3**. Проверьте выполняется ли необходимое условие сходимости ряда: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots$.

**Решение:** Находим общий член ряда $U_n = \frac{1}{2n-1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$, то необходимое условие сходимости ряда выполняется.

**Пример 4**. Проверьте выполняется ли необходимое условие сходимости ряда: $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \frac{5}{9} + \cdots$.

**Решение:** Находим общий член ряда $U_n = \frac{n+1}{2n+1}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$, то необходимое условие сходимости ряда не выполняется, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, следовательно, ряд расходится.

## Практические задания

**Задание 1**. Напишите первые пять членов ряда по заданному общему члену:

1) $U_n = \frac{1}{3n+2}$;
2) $U_n = \frac{1}{(5n-2)\cdot 2^{n-1}}$;
3) $U_n = \frac{1}{(3n+1)\cdot(3n-1)}$;
4) $U_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n^2+1}$;
5) $U_n = \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^n}$;
6) $U_n = \frac{2n-1}{(3+(-1)^n)^n}$;
7) $U_n = \frac{3^n}{n\,!}$;
8) $U_n = \frac{2+(-1)^n}{(5n-2)^n}$.

**Задание 2**. Найдите общий член ряда:

1) $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \cdots$;
2) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \frac{8}{9} + \cdots$;
3) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \cdots$;
4) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$;
5) $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + \cdots$;
6) $2 + \frac{4}{2} + \frac{8}{6} + \frac{16}{24} + \frac{32}{120} + \cdots$;
7) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \cdots$;
8) $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4^3} + \frac{1}{5\cdot 4^5} + \frac{1}{7\cdot 4^7} + \cdots$.

**Задание 3.** Проверьте выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{4n^3}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4-3}{(n^2+1)^2}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{1}{n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+5}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2+2}{n^2-3}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+2}$.

## Самостоятельная работа

**Задание 1**. Напишите первые пять членов ряда по заданному общему члену:

1) $U_n = \frac{n+1}{n}$; 2) $U_n = \frac{-1+2^n}{2^n}$;

3) $U_n = \frac{(n+1)\,!}{5^n}$; 4) $U_n = (-1)^n \cdot \frac{2^{n-1}}{(3n+2)\,!}$.

**Задание 2**. Найдите общий член ряда:

1) $1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} + \frac{4}{125} + \frac{5}{625} + \cdots$; 2) $\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots$;

3) $\frac{1}{11} + \frac{2}{101} + \frac{3}{1001} + \frac{4}{10001} + \cdots$; 4) $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{3}{45} + \frac{4}{135} + \cdots$.

**Задание 3.** Проверьте выполняется ли необходимое условие сходимости ряда:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{3n-1}{2n+3}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{3n-1}}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

## 2 ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЯДОВ

**Определение 3.** *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ *называется знакоположительным, если его члены неотрицательные числа.*

### 2.1 Признаки сравнения

**Теорема 2.** *Пусть даны два знакоположительных ряда:*

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \cdots \tag{2}$$
$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n + \cdots \tag{3}$$

*причем* $U_n \le V_n$. *Тогда из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (3).*

**Теорема 3.** *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = k \neq 0$, *то оба ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

**Для сравнения применяются ряды:**

1. Гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \text{расходящийся ряд.}$$

2. Обобщенно-гармонический ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{сходящийся, при } \alpha > 1, \\ \text{расходящийся, при } \alpha < 1. \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, q^{n} \begin{cases} \text{сходящийся, при } |q| < 1, \\ \text{расходящийся, при } |q| > 1. \end{cases}$$

**Пример 5.** Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4n+1}$.

**Решение:** Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся. Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4n+1}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3\cdot n}{4n+1} =$ (по правилу Лопиталя) $= \frac{3}{4} \neq 0$.

Таким образом, по теореме 3 ряд расходящийся.

**Ответ:** ряд расходящийся.

**Пример 6**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3+n-1}$.

**Решение:** Сравним данный ряд с обобщенно-гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который является сходящимся, так как $\alpha = 2 > 1$.

Для сравнения используем теорему 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3+n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

Тогда имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2-n)\cdot n^2}{n^3+n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n^3}{n^3+n-1} =$ (по правилу Лопиталя) $= -1 \neq 0$.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n^3+n-1}$ – сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся

**Пример 7**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3n+1}$.

**Решение:** Сравним данный ряд с обобщенно-гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}$ – расходящийся, так как $\alpha = -1$.

Для сравнения используем теорему 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3}$$

Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)\cdot 3}{(3n+1)\cdot n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+6}{3n^2+n} = (\text{по правилу Лопиталя}) = 1 \neq 0.$$

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3n+1}$ – расходящийся.

**Ответ:** ряд расходящийся.

**Пример 8**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$.

**Решение:** Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ – сходящийся, так как $q = \frac{1}{2} < 1$.

**Первый способ**: для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3} = \frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

Имеем $\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$; $\frac{1}{7} < \frac{1}{4}$; $\frac{1}{11} < \frac{1}{8}$; ...

Следовательно, по теореме 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+3}$ – сходящийся.

**Второй способ**: для сравнения используем теорему 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \text{сходящийся}$$

Тогда имеем:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+3} = (\text{по правилу Лопиталя}) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{2^n \cdot \ln 2} = 1 \neq 0.$

Следовательно, по теореме 3 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+3}$ – сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся.

## 2.2 Признак Даламбера

**Теорема 4.** *Если для ряда с положительными членами существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n - \begin{cases} \text{сходится, при } l < 1, \\ \text{расходится, при } l > 1. \end{cases}$

**Замечание 3:**

1. Если $l = 1$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, требуется исследовать ряд с помощью других методов.

2. Если $l = \infty$, то ряд расходится.

3. Признак Даламбера удобно применять тогда, когда общий член ряда содержит знак факториала (!).

**Пример 9**. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{7}{4} + \ldots + \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}} + \cdots$$

**Решение:** По условию имеем $U_n = \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$.

Составим $U_{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)-1}{\sqrt{2^{n+1}}}$.

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2-1)\cdot\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^{n+1}}\cdot(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot\sqrt{2^n}}{\sqrt{2^n}\cdot\sqrt{2}\cdot(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Следовательно, ряд сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся.

**Пример 10**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n\,!}{n^n}$.

**Решение:** По условию имеем $U_n = \frac{5^n\cdot n\,!}{n^n}$.

Составим $U_{n+1} = \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot(n+1)\,!\ \cdot\ n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 5^n\cdot n\,!} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5\cdot n\,!\ \cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot(n+1)\cdot 5^n\cdot n\,!} =$$

$$= 5\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} =$$

$$5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = 5\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = 5\cdot e^{-1} = \frac{5}{e} > 1$$

Следовательно, ряд расходящийся.

**Ответ:** ряд расходящийся.

**Пример 11.** Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+2^n}{n!}$.

**Решение:** По условию имеем $U_n = \frac{5^n+2^n}{n\,!}$.

Составим $U_{n+1} = \frac{5^{n+1}+2^{n+1}}{(n+1)\,!}$.

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{(5^{n+1}+2^{n+1})\cdot n\,!}{(n+1)\,!\cdot\ (5^n+2^n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(5^n\cdot 5+2^n\cdot 2)\cdot n\,!}{n\,!\cdot(n+1)\cdot(5^n+2^n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot\left(5+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{(n+1)\cdot 5^n\cdot\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n}{(n+1)\cdot\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)} = 0$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, а величина $(n+1)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Поскольку, $l = 0 < 1$, то ряд сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся.

## 2.3 Признак Коши

**Теорема 5.** *Если для ряда с положительными членами* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$*, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n - \begin{cases} \text{сходится, при } l < 1, \\ \text{расходится, при } l > 1. \end{cases}$

**Замечание 4:**

1. Если $l = 1$, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя, требуется исследовать ряд с помощью других методов.

2. Если $l = \infty$, то ряд расходится.

3. Признак Коши удобно применять тогда, когда из общего члена ряда легко извлекается корень *n*-ой степени.

**Пример 12**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}$.

**Решение:** Имеем $U_n = \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}$. По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right)^{3} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}\right)^{3} = 2^3 = 8 > 1.$$

Следовательно, ряд расходящийся.

**Ответ:** ряд расходящийся.

**Пример 13**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

**Решение:** Имеем $U_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$. По признаку Коши:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

Следовательно, ряд сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся.

### 2.4 Интегральный признак Коши

**Теорема 6.** *Пусть дан ряд* $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, *члены которого являются значениями некоторой функции* $f(x)$, *положительной, непрерывной и убывающей на полуинтервале* $[1, +\infty)$.

*Тогда если* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$*; если же* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *расходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ *также расходится.*

**Пример 14**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ .

**Решение:** Имеем $U_n = \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$.

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-2}}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b (3x-2)^{-\frac{1}{2}}\, dx =$$

$$= \left/ \begin{matrix} 3\text{x} - 2 = t \\ 3dx = dt \;\; \Rightarrow \;\; dt = \dfrac{dt}{3} \\ t_{\text{н}} = 1, \;\; t_{\text{в}} = 3b - 2 \end{matrix} \right/ = \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{3} \int_2^{3b-2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \lim_{b \to +\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_1^{3b-2} =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{b \to +\infty} \sqrt{t}\, \Big|_1^{3b-2} = \frac{2}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(\sqrt{3b-2} - 1\right) = \infty$$

Так как несобственный интеграл расходится, то и заданный ряд тоже расходится.

**Ответ:** ряд расходящийся.

**Пример 15**. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot ln^3(n+1)}$.

**Решение:**

$$\int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\cdot ln^3(x+1)}dx = = \lim_{b\to+\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{(x+1)\cdot ln^3(x+1)}dx =$$

$$= \left/ \begin{array}{c} \ln(x+1) = t \\ \frac{dx}{x+1} = dt \quad \Rightarrow \quad dx = (x+1)\,dt \\ t_{\text{н}} = \ln 2, \quad t_{\text{в}} = \ln(b+1) \end{array} \right/ = \lim_{b\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln(b+1)} t^{-3}dt == \lim_{b\to+\infty} \left. \frac{t^{-2}}{-2} \right|_{\ln 2}^{\ln(b+1)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \left. \frac{1}{t^2} \right|_{\ln 2}^{\ln(b+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty} \left( \frac{1}{\ln^2(b+1)} - \frac{1}{\ln^2 2} \right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{\ln^2 2}\right) = -\frac{1}{2\ \ln^2 2}$$

Так как несобственный интеграл сходится, то и заданный ряд сходящийся.

**Ответ:** ряд сходящийся.

## Практические задания

**Задание 4.** Исследуйте на сходимость ряды по признакам сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3}{5^n+2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+3}{3^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^2-2}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{lnn}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+2^{2n}}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+3n-1}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n+1}$.

**Задание 5.** Исследуйте на сходимость ряды по признаку Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+1)!}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{2n-1}}{4^{n+3}}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$;

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!\,2^{n+1}}$.

**Задание 6.** Исследуйте на сходимость ряды по признаку Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(1+2n)^n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{n}\right)^{n}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

**Задание 7.** Исследуйте на сходимость ряды по интегральному признаку:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+3}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\,(3n+1)}$;
3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{7+n^2}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+1}}$;
7) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$.

## Самостоятельная работа

**Задание 4.** Исследуйте на сходимость ряды по признакам сравнения:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{2n^3-n-25}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{2^n-1}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n-1}{9^n+4}$.

**Задание 5.** Исследуйте на сходимость ряды по признаку Даламбера:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n\cdot n!}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^{n}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

**Задание 6.** Исследуйте на сходимость ряды по признаку Коши:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+4}\right)^{n}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n^2+5}\right)^{n}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;  4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$.

**Задание 7.** Исследуйте на сходимость ряды по интегральному признаку:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$;  4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot ln^2 n}$.

## 3 ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

### 3.1 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница

**Определение 4.** *Ряд вида* $U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \ldots + (-1)^{n+1}U_n + \cdots$ *называется* **знакочередующимся.**

**Теорема 7 (признак Лейбница):**

*Знакочередующийся ряд называется сходящимся если:*

*1) члены ряда по абсолютной величине монотонно убывают, то есть:*

$$|U_1| > |U_2| > |U_3| > \ldots > |U_n| > \cdots$$

*2) общий член ряда стремится к нулю, то есть* $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$.

**Пример 16**. Исследуйте на сходимость ряд:

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n\,(n-1)}+\cdots$$

**Решение:** Данный ряд является знакочередующимся, поэтому исследуем его на сходимость по признаку Лейбница:

1) $\frac{1}{2}>\frac{1}{6}>\frac{1}{12}>\frac{1}{20}>\frac{1}{30}>\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\ (n-1)} = 0.$

Следовательно, данный ряд сходящийся.

**Пример 17**. Исследуйте на сходимость ряд:

$$3{,}1 - 3{,}01 + 3{,}001 - 3{,}0001 + \cdots.$$

**Решение:** Ряд знакочередующийся с общим членом:

$$U_n = (-1)^{n+1}\left(3 + \frac{1}{10^n}\right)$$

Применим признак Лейбница:

1) $3{,}1 > 3{,}01 > 3{,}001 > 3{,}0001 > \cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3 + \frac{1}{10^n}\right) = 3 \neq 0.$

Следовательно, данный ряд расходящийся.

### 3.2 Абсолютная и условная сходимость рядов

**Определение 5.** *Ряды, члены которых имеют разные знаки, называются знакопеременными, то есть:*

$$U_1 - U_2 - U_3 + U_4 - U_5 + U_6 + U_7 + \cdots \tag{4}$$

С каждым рядом (4) связан ряд с неотрицательными членами, составленный из абсолютных величин данного ряда, то есть ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n| \tag{5}$$

**Определение 6.** *Если ряд (5) сходится, то сходится и ряд (4). Ряд (4) в этом случае называется* **абсолютно сходящимся.**

**Определение 7.** *Если ряд (4) сходится, а ряд (5) расходится, то ряд (4) называется* **условно сходящимся.**

**Пример 18**. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

**Решение:**

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$

Ряд имеет вид: $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\cdots$.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots$$

Исследуем его на сходимость по признаку Даламбера.

Имеем $U_n=\frac{1}{n!}$, составим $U_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

Следовательно, ряд сходящийся. Таким образом, исходный ряд абсолютно сходящийся.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$.

Ряд имеет вид: $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21}+\cdots$.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{21}+\cdots$$

Исследуем его на сходимость по признаку сравнения.

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходящийся.

Для сравнения используем теорему 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n-3};\ \sum_{n=1}^{\infty} V_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U_n}{V_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Следовательно, ряд расходящийся.

Проверим на сходимость исходный ряд по признаку Лейбница.

1) $1 > \frac{1}{5} > \frac{1}{9} > \frac{1}{13} > \frac{1}{17} > \frac{1}{21} > \cdots;$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n-3} = 0$, согласно признаку, ряд является сходящимся.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$ – условно сходящийся.

**Ответ:** 1) ряд абсолютно сходящийся; 2) ряд условно сходящийся.

## Практические задания

**Задание 8.** Исследуйте ряды на сходимость (по признаку Лейбница):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{ln\,(n+2)}$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot(-1)^{n+1}}{n^2+1}$;
4) $\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \frac{10}{11} + \cdots$;
5) $\frac{2}{3} - \frac{4}{8} + \frac{8}{15} - \cdots$;
6) $-\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \cdots$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n+1}$.

**Задание 9.** Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{3n^2-1}{5+2n^2}$;
3) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} + \cdots$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(2n+1)^2}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{3n-2}{(2n+1)!}$;
7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n^n}{(2n+1)^n}$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2n+1}{n\cdot(n+1)}$.

**Самостоятельная работа**

**Задание 8.** Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}{2n^2+3}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}}{(4n-1)!}$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot\sqrt[3]{n+1}}{2n+5}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{2n^2-1}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{(3n-1)^3}$.

# 4 СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

**Определение 8.** *Ряд вида:*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \tag{6}$$

*называется* **степенным рядом.**

Ч*исла* $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ *называются* **коэффициентами степенного ряда.**

Часто рассматриваются степенные ряды более общего вида:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots \\ + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-a)^n \end{gathered} \tag{7}$$

Частным случаем таких рядов при $a = 0$ являются обычные степенные ряды (6). С другой стороны, каждый степенной ряд вида (7) с помощью замены переменной $y = x - a$ сводится к ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ вида (6).

**Интервалом сходимости** *действительного степенного ряда вида (6) называется такой интервал* $(-R;\ R)$ *(для ряда (7) –* $(a_0 - R;\ a_0 + R)$*), что в* *каждой его точке* **ряд сходится абсолютно,** *а в каждой точке, лежащей вне отрезка* $[-R;\ R]$ *(для ряда (7) –* $[a_0 - R;\ a_0 + R]$*),* **ряд расходится.**

*На границах интервала сходимости, то есть в точках* $x = \pm\ R$ *(соответственно для ряда (7) – в точках* $x = a_0 \pm\ R$*), ряд может, как сходиться, так и расходиться. Число R называется* **радиусом сходимости действительного степенного ряда.**

В частности, $R$ может равняться нулю – в этом случае область сходимости ряда состоит из одной точки 0 (соответственно для ряда (7) – $a_0$), или $+\infty$ – в этом случае областью сходимости является вся числовая прямая (такой ряд называется также всюду сходящимся).

Интервал сходимости ряда, как правило, определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, примененных к знакоположительному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ (или $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x-a)^n|$), составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости $R$ степенного ряда применяются также формулы (8), (9), в тех случая, когда указанные пределы существуют:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \qquad (8)$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad (9)$$

**Нахождение области сходимости степенного ряда производится в следующей последовательности:**

1. Находим радиус сходимости степенного ряда по формулам (8), (9) или признаку Даламбера (Коши). Определяем интервал сходимости.

2. Если $R \neq 0$ и $R \neq \infty$, проверяем поведение ряда на концах интервала.

3. Записываем ответ.

**Пример 19.** Найдите область сходимости рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n\,!}$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)! \cdot (x+7)^n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^n}{3^n \sqrt[4]{n}}$.

**Решение:**

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n \cdot n\,!}$;

Найдем радиус сходимости.

Имеем: $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n\,!}$. Составим: $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{(-1)^n \cdot (-1)}{2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n \cdot 2^n \cdot 2 \cdot n! \cdot (n+1)}{2^n \cdot n! \cdot (-1)^n \cdot (-1)}\right| = 2\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

Так как $R = \infty$, то областью сходимости ряда является вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

**Ответ:** $(-\infty; +\infty)$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+3)! \cdot (x+7)^n$;

Решаем аналогичным образом.

Пусть $x+7=t$, получили ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)! \cdot t^n$.

Найдем радиус сходимости.

Имеем: $a_n = (2n+3)!$. Составим: $a_{n+1} = (2n+5)!$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)!}{(2n+5)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)!}{(2n+3)! \cdot (2n+4) \cdot (2n+5)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+4)\cdot(2n+5)} = 0$$

Так как $R = 0$, то $t = 0$.

Отсюда $x + 7 = 0$, следовательно $x = -7$.

**Ответ:** $x = -7$– точка сходимости ряда.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n x^n}{3^n \sqrt[4]{n}}$.

*Найдем радиус сходимости.*

Имеем:

$$a_n = \frac{9^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \frac{3^n}{\sqrt[n]{n}}$$

Составим:

$$a_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{3^{n+1} \cdot \sqrt[4]{n+1}} = \frac{9^n \cdot 9}{3^n \cdot 3 \cdot \sqrt[4]{n+1}} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n} \cdot 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n \cdot \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[4]{n} \cdot 3^n \cdot 3} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \sqrt[4]{\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{3}$$

Получили интервал сходимости $\left(-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

*Проверяем поведение ряда на концах интервала.*

При $x = -\frac{1}{3}$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot (-1)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}} =$$

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \cdots$$

Получили знакочередующийся ряд.

Составим ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \cdots$$

Исследуем этот ряд на сходимость по признаку сравнения. Это обобщенно-гармонический ряд. Так как $\alpha = \frac{1}{4} < 1$, то ряд – расходящийся.

Исследуем его на сходимость по теореме Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{\sqrt[4]{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}} > \frac{1}{\sqrt[4]{4}} > \ldots$
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$

оба условия выполняются, ряд сходящийся.

Таким образом, ряд в точке $x = -\frac{1}{3}$ условно сходящийся.

При $x = \frac{1}{3}$ ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

Имеем обобщенно-гармонический ряд. Так как $\alpha = \frac{1}{4} < 1$, то ряд – расходящийся.

Отсюда следует, что в точке $x = \frac{1}{3}$ – ряд расходится.

Итак, область сходимости ряда $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

**Ответ:** $\left(-\frac{1}{3}; \ \frac{1}{3}\right)$.

## Практические задания

**Задание 10.** Найдите область сходимости рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{2n+1}}$;

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot n$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^n \cdot x^n$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot x^{2n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$;

7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (x+1)^n}{4n^2+3}$;

8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(3n+2)\cdot\sqrt{n+1}}$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^2}{9^{2n+1}}$;

10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(3n+2)\cdot 5^n}$;

11) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n!}{3^{n^2}} \cdot (x-1)^n$;

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(1+3/n)^{n^2}}$;

13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}(x+2)^n}{3^{3n+1}}$;  14) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (x-5)^n}{\sqrt[4]{3n+2}}$;

15) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{(2n+1)\,!}$;  16) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^{2n+3}}$.

## Самостоятельная работа

**Задание 9.** Найдите область сходимости рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{2n-1}}$;  2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^n}$;

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)\,!}$;  4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n+1) \cdot (x-4)^n}{5^{n+1}}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{(3n+2)! \cdot (n+1)}$;  6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^{3n+1}}$;

7) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n+1} \cdot (x+2)^n$;  8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(2n-1)^2}$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1)!}$;  10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot \sqrt{3n+1}}$.

# 5 РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

**Определение 9.** *Степенной ряд вида:*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1\,!} \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2\,!} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!} \cdot (x - x_0)^n \ldots \qquad (10)$$

*где* $x \neq 0$ *– некоторое постоянное число, называется* **рядом Тейлора** *для бесконечно дифференцируемой функции* $f\,(x)$ *в окрестности точки* $x_0$.

**Замечание 5.** Если в ряде (10) $x_0 = 0$, то полученный ряд:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1\,!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2\,!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3\,!} \cdot x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n\,!} \cdot x^n + \cdots \qquad (11)$$

называется **рядом Маклорена** для бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

**Для разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора необходимо:**

1) найти производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,…;

2) вычислить значения производных в точке $x_0$;

3) записать ряд Тейлора для заданной функции и найти его интервал сходимости;

4) найти интервал $(-R;\ R)$, в котором остаточный член ряда Тейлора $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если такой интервал существует, то в нем функция $f(x)$ и сумма ряда Тейлора совпадают.

**Замечание 6**. В интервале сходимости степенного ряда остаточный член стремится к нулю при $n \to \infty$. Остаточный член имеет вид:

1) для ряда Тейлора:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \text{где } x_0 < c < x$$

2) для ряда Маклорена:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)\,!} \cdot x^{n+1}, \text{где } 0 < c < x$$

**Приведем таблицу, содержащую разложения в ряд Маклорена некоторых элементарных функций (эти разложения следует запомнить):**

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \cdots + \frac{x^n}{n\,!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

$$\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

**Пример 20.** Разложите функцию $f(x) = e^{3x}$ в ряд по степеням $x + 2$.

**Решение:** Из условия имеем: $x_0 = -\,2$.

1. Найдем производные данной функции:

$$f(x) = e^{3x};\ f'(x) = 3e^{3x};\ f''(x) = 3^2 e^{3x}; f'''(x) = 3^3 e^{3x};$$

$$f^{(4)}(x) = 3^4 e^{3x}; \ldots;\ f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}; f^{(n+1)}(x) = 3^{n+1} e^{3x}; \ldots$$

2. Вычислим значения производных при $x_0 = -\,2$, то есть найдем коэффициенты ряда Тейлора:

$$f(-2) = e^{-6}; f'(-2) = 3e^{-6}; f''(-2) = 3^2 e^{-6};\ \ f'''(-2) = 3^3 e^{-6};$$

$$f^{(4)}(-2) = 3^4 e^{-6}; \ldots;\ f^{(n)}(-2) = 3^n e^{-6}; \ldots$$

3. Подставляем найденные коэффициенты в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Получим ряд:

$$e^{3x} = e^{-6} + \frac{3e^{-6}}{1!} \cdot (x+2) + \frac{3^2 e^{-6}}{2!} \cdot (x+2)^2 + \cdots + \frac{3^n e^{-6}}{n!} \cdot (x+2)^n + \cdots$$

4. Докажем, что полученный ряд сходится и его суммой является функция $f(x) = e^{3x}$.

Для этого покажем, что $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Составим остаточный член полученного ряда:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot e^{3c}}{(n+1)!} \cdot (x+2)^{n+1}$$

Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}\cdot e^{3c}}{(n+1)!}\cdot(x+2)^{n+1} = e^{3c}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{(3(x+2))^{n+1}}{(n+1)!} = e^{3c}\cdot 0 = 0$$

Следовательно, по теореме о сходимости ряда Тейлора при любом значении *x* делаем вывод, что составленный ряд является рядом Тейлора для функции $f(x) = e^{3x}$, то есть имеем:

$$e^{3x} = e^{-6} + 3e^{-6}\cdot(x+2) + \frac{3^2 e^{-6}}{2!}\cdot(x+2)^2 + \cdots + \frac{3^n e^{-6}}{n!}\cdot(x+2)^n + \cdots$$

**Пример 21**. Запишите ряд Тейлора для функции $f(x) = \ln(7+3x)$ в окрестности точки $x_0 = -2$ и исследуйте его сходимость.

**Решение:** Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида:

$$f(x_0) + \frac{f'(x)}{1\,!}\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x)}{2\,!}\cdot(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}\cdot(x-x_0)^n + \cdots$$

Найдем производные данной функции и выведем выражение для $n$-ой производной:

$$f(x) = \ln(7+3x);$$

$$f'(x) = \frac{3}{7+3x} = 3\cdot(7+3x)^{-1};$$

$$f''(x) = (3\cdot(7+3x)^{-1})' = (-1)\cdot 3^2\cdot(7+3x)^{-2};$$

$$f'''(x) = \left((-1)\cdot 3^2\cdot(7+3x)^{-2}\right)' = (-1)\cdot(-2)\cdot 3^3\cdot(7+3x)^{-3}; \ldots;$$

$$f^n(x) = (-1)\cdot(-2)\ldots[-(n-1)]\cdot 3^n\cdot(7+3x)^{-n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot 3^n\cdot(n-1)\,!\ \cdot\ (7+3x)^{-n}$$

Вычислим значения данной функции и ее производных в точке $x_0 = -2$ и запишем коэффициенты ряда Тейлора:

$$f(-2) = \ln 1 = 0; f'(-2) = 3;\ f''(-2) = -3^2\cdot 1!;$$

$$f^{(n)}(-2) = (-1)^{n-1}\cdot 3^n(n-1)\,!, \ldots$$

Подставим найденные коэффициенты в ряд Маклорена:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

В результате получим ряд:

$$\ln(7+3x) = 0 + \frac{3}{1!}\cdot(x+2) - \frac{3^2\cdot 1!}{2!}\cdot(x+2)^2 + \frac{3^3\cdot 2!}{3!}\cdot(x+2)^3 - \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3^n\cdot(n-1)!}{n!}\cdot(x+2)^n + \cdots = \ln(7+3x) = 0 + \frac{3}{1!}\cdot(x+2) -$$

$$-\frac{3^2\cdot 1!}{2!}\cdot(x+2)^2 + \frac{3^3\cdot 2!}{3!}\cdot(x+2)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{3^n\cdot(n-1)!}{n!}\cdot(x+2)^n + \cdots =$$

$$= 0 + 3(x+2) - \frac{3^2}{2}\cdot(x+2)^2 + \frac{3^3}{3}\cdot(x+2)^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{3^n}{n}\cdot(x+2)^n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n}{n}\cdot(x+2)^n$$

Найдем интервал сходимости, применяя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 3^{n+1}(x+2)^{n+1}}{n+1} : \frac{(-1)^{n-1}3^n(x+2)^n}{n}\right| = 3\,|x+2| < 1$$

Имеем $|x+2| < \frac{1}{3}$, следовательно $-\frac{1}{3} < x+2 < \frac{1}{3}$;$-\frac{7}{3} < x < -\frac{5}{3}$.

При $x = -\frac{7}{3}$ получаем расходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

При $x = -\frac{5}{3}$ получаем сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Область сходимости данного ряда $\left(-\frac{7}{3},\ \frac{5}{3}\right]$.

**Пример 22.** Разложите данные функции в ряд Маклорена:

1) $f(x) = \ln(5+x)$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} = (1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$.

**Решение:**

1) $f(x) = \ln(5+x)$

Данную функцию запишем в виде:

$$\ln(5+x) = \ln 5\cdot\left(1+\frac{x}{5}\right) = \ln 5 + \ln\left(1+\frac{x}{5}\right)$$

Используем известное разложение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots;\ -1 < x \le 1$$

В этом разложении заменим $x$ на $\frac{x}{5}$. Получим:

$$\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)=\frac{x}{5}-\frac{x^2}{5^2\cdot 2}+\frac{x^3}{5^3\cdot 3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{5^n\cdot n}+\cdots;\ -1<\frac{x}{5}\le 1$$

Следовательно, ряд Маклорена для данной функции:

$$\ln(5+x)=\ln 5+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{5^n\cdot n};\ -1<\frac{x}{5}\le 1 \text{ или } -5<x\le 5$$

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=(1+x^3)^{-\frac{1}{2}}$

**Решение:** Используем разложение:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x+\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\cdots\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n\,!}\cdot x^n+\cdots$$

При $-1<\alpha<0$ ряд сходится в промежутке $-1<x\le 1$.

В этом разложении вместо $x$ подставим $x^3$, а вместо $\alpha$ подставим $-\frac{1}{2}$

Получим искомое разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=1-\frac{1}{2}x^3+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}x^6-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}x^9+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n}+\cdots;\ -1<x^3\le 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{3n};\ -1<x^3\le 1$$

## Практические задания

**Задание 11.** Разложите в ряд Тейлора функции:

1) $f(x)=x^3-2x^2-5x-2$ по степеням $x+4$;

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням $x-1$;

3) $f(x)=\sqrt[3]{x+2}$ по степеням $x+1$;

4) $f(x)=\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$ по степеням $x+3$;

5) $f(x) = \sqrt{x^3}$
по степеням $x - 1$;

6) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$
по степеням $x - 2$;

7) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5$
по степеням $x + 1$;

8) $f(x) = \frac{1}{1-x}$
по степеням $x - 2$;

9) $f(x) = 10^{2x}$
по степеням $x + 3$;

10) $f(x) = \ln(2x - 1)$
по степеням $x - 3$.

**Задание 12.** Разложите в ряд Маклорена функции:

1) $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \cos\frac{x}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+2x}}$;

3) $f(x) = \frac{x - arctg2x}{2}$;

4) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-4x}$;

5) $f(x) = x \cdot \ln(1 + x^2)$;

6) $f(x) = \sin^2 x$;

7) $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$

8) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$;

9) $f(x) = \frac{3}{4-x}$;

10) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

## Самостоятельная работа

**Задание 10.** Разложите в ряд Тейлора функции:

1) $f(x) = \sqrt{x}$
по степеням $x - 4$;

2) $f(x) = \ln(1 + 5x)$
по степеням $x - 1$;

3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 3$
по степеням $x + 2$;

4) $f(x) = \frac{1}{x-4}$
по степеням $x + 2$;

5) $f(x) = 5^{2x+1}$
по степеням $x + 2$;

6) $f(x) = (3 + e^{-x})^2$
по степеням $x - 0$.

**Задание 11.** Разложите в ряд Маклорена функции:

1) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{1-5x}$; 2) $f(x) = \frac{\ln(1-x^2)}{x}$;

3) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$; 4) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

5) $f(x) = \ln(1+2x^2)$; 6) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

## 6 ПРИМЕНЕНИЕ РЯДОВ В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Степенные ряды могут быть использованы для приближенного вычисления значений различных функций, определенных интегралов и др.

**Пример 23.** Вычислите интеграл $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Решение:** Заменим в подынтегральном выражении $e^x$ его разложением в степенной ряд:

$$\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x} dx = \int_0^{0,1} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots - 1}{x} dx =$$

$$= \int_0^{0,1} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x} dx = \int_0^{0,1} \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{0,1} == 0,1 + \frac{0,1^2}{4} + \frac{0,1^3}{18} + \ldots =$$

$$= 0,1 + \frac{0,01}{4} + \frac{0,001}{18} + \frac{0,0001}{96} + \cdots = 0,1 + 0,003 + 0,00006 + \cdots$$

Так как $0,00006 < 0,001$, то $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}\, dx \approx 0,1 + 0,003 = 0,103$.

**Ответ:** $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x} dx \approx 0,103$.

**Пример 24.** Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{4}\, dx$ с точностью до 0,001.

**Решение:** Заменим подынтегральное выражение его разложением в степенной ряд:

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

$$cos\frac{x^2}{4} = 1 - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^6}{6!} + \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^8}{8!} - \cdots$$

Отсюда:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{4}\ dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^4}{4^2 \cdot 2!} + \frac{x^8}{4^4 \cdot 4!} - \frac{x^{12}}{4^8 \cdot 6!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^5}{4^2 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{4^4 \cdot 9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{4^8 \cdot 13 \cdot 6!} + \ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 2!} + \frac{1}{2^9 \cdot 4^4 \cdot 9 \cdot 4!} - \cdots = 0{,}5 - \frac{1}{2^{10} \cdot 5} + \frac{1}{2^{13} \cdot 3^3} - \cdots =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}0002 + 0{,}000005 - \cdots$$

Так как $0{,}0002 < 0{,}001$, то $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\ \frac{x^2}{4}\ dx \approx 0{,}5$.

**Ответ:** $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos\frac{x^2}{4} dx \approx 0{,}5$.

**Пример 25.** Вычислите $\sqrt[3]{500}$ с точностью до 0,001.

**Решение:**

Представим $\sqrt[3]{500}$ в виде:

$$\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{512 - 12} = \sqrt[3]{512 \cdot \left(1 - \frac{12}{512}\right)} = 8 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{3}{128}} =$$

$$= 8 \cdot \left(1 - \frac{3}{128}\right)^{\frac{1}{3}} = 8 \cdot \left(1 + \frac{-3}{128}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Так как после проведенного преобразования $x = -\frac{3}{128}$ входит в область сходимости $(-1;\ 1)$ биномиального ряда, то при $x = -\frac{3}{128}$, $m = \frac{1}{3}$ получим:

$$\sqrt[3]{500} = 8\left(1 + \frac{-3}{128}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}\left(-\frac{3}{128}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!} \cdot \left(-\frac{3}{128}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{128} - \frac{2 \cdot 3^2}{9 \cdot 2! \cdot 128^2} - \frac{10 \cdot 3^3}{27 \cdot 3! \cdot 128^3} + \cdots\right) = 8 \cdot \left(1 - \frac{1}{128} - \frac{1}{128^2} - \frac{5}{3 \cdot 128^3} + \cdots\right) =$$

$$= 8 \cdot (1 - 0{,}008 - 0{,}00006 - 0{,}0000008 + \cdots)$$

Так как $0{,}00006 < 0{,}001$, то $\sqrt[3]{500} \approx 8 \cdot (1 - 0{,}008) = 7{,}936$.

**Ответ:** $\sqrt[3]{500} \approx 7{,}936$.

**Пример 26.** Вычислите $\ln 1{,}8$ с точностью до 0,01.

**Решение:** Запишем ряд Маклорена для функции:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Так как $\ln 1{,}8 = \ln(1 + 0{,}8)$, то $x = 0{,}8$ входит в область сходимости ряда $(-1;\ 1]$.

Подставляя значение $x = 0{,}8$ в ряд, получим:

$$\ln 1{,}8 = \ln(1 + 0{,}8) = 0{,}8 - \frac{0{,}8^2}{2} + \frac{0{,}8^3}{3} - \frac{0{,}8^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{0{,}8^{n+1}}{n+1} + \cdots =$$

$$= 0{,}8 - 0{,}32 + 0{,}171 - 0{,}1024 + 0{,}0655 - 0{,}0437 + 0{,}02996 - 0{,}0209 +$$

$$+0{,}0149 - 0{,}0107 + 0{,}0078 - \cdots =/\ 0{,}0078 < 0{,}01\ /= 0{,}8 - 0{,}32 + 0{,}171 -$$

$$-0{,}1024 + 0{,}0655 - 0{,}0437 + 0{,}02996 - 0{,}0209 + 0{,}0149 - 0{,}0107 = 0{,}58$$

Так как $0{,}0078 < 0{,}01$, то $\ln 1{,}8 \approx 0{,}58$.

**Ответ**: $\ln 1{,}8 \approx 0{,}58$.

## Практические задания

**Задание 13.** Вычислите с точностью до $\delta$:

1) $\int_0^{0,2} e^{-2x^3} dx, \delta = 0{,}001;$

2) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \delta = 0{,}01;$

3) $\int_0^1 x\sin\frac{x^3}{2} dx, \delta = 0{,}001;$

4) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \delta = 0{,}001;$

5) $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1+\sqrt{x})\, dx, \delta = 0{,}001;$

6) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\, dx, \delta = 0{,}001;$

7) $\sqrt[6]{68}, \delta = 0{,}001;$

8) $\sqrt[10]{1027}, \delta = 0{,}0001;$

9) $\sqrt[3]{30}, \delta = 0{,}0001;$

10) $\sqrt[3]{0{,}98}, \delta = 0{,}0001;$

11) $\sqrt[8]{516}, \delta = 0{,}0001;$

12) $\sqrt[6]{10}, \delta = 0{,}0001;$

13) $\sin 9^0,\ \delta = 0{,}0001;$

14) $\cos 50^0,\ \delta = 0{,}001;$

15) $\mathrm{ctg}\, 35^0,\ \delta = 0{,}001;$

16) $\mathrm{tg}\, 14^0,\ \delta = 0{,}001;$

17) $\ln 0{,}6, \delta = 0{,}0001;$

18) $\ln 1{,}3, \delta = 0{,}001.$

## Самостоятельная работа

**Задание 12.** Вычислите с точностью до $\delta$:

1) $\cos 18^0,\ \delta = 0{,}0001;$

2) $\sin 27^0,\ \delta = 0{,}001;$

3) $\sqrt[4]{19}, \delta = 0{,}001;$

4) $\sqrt{2000}, \delta = 0{,}0001;$

5) $\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx, \delta = 0{,}001;$

6) $\int_0^{0,5} \left(1 - \frac{sin2x}{x}\right) dx, \delta = 0{,}01;$

7) $\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x} cos^2 x\, dx, \delta = 0{,}001;$

8) $\ln 1{,}4, \delta = 0{,}001.$

# 7 РЯДЫ ФУРЬЕ

**Рядом Фурье функции $f(x)$, определенной на сегменте $[-\pi, \pi]$, называется ряд:**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\,x + b_n \cdot \sin n\,x), \tag{12}$$

$$\text{где } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx, \tag{13}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot cosn\ x\ dx\ (n = 1;\ 2;\ 3; \dots), \tag{14}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot sinn\ x\ dx\ (n = 1;\ 2;\ 3; \dots) \tag{15}$$

**Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.** Функцию $f(x)$ в каком-либо замкнутом интервале $[a, b]$ длины $2\pi$ можно представить в виде ряда Фурье, если:

1) во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$ заданная функция ограничена;

2) в замкнутом интервале $[a, b]$ заданная функция $f(x)$ изменяется монотонно или имеет конечное число максимумов и минимумов;

3) функция $f(x)$ непрерывна во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$, кроме, может быть, конечного числа его точек.

Эти условия носят название **условий Дирихле**.

Если $x_0$ – точка разрыва первого рода функции $f(x)$, то сумма ряда Фурье определит функцию, совпадающую в точках непрерывности с функцией $f(x)$ и равную $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в указанной точке разрыва первого рода.

Если функция $f(x)$ задана в сегменте $[-l;\ \ l]$, где $l$ – произвольное число, то при выполнении на сегменте $[-l;\ \ l]$ условий Дирихле указанная функция может быть представлена в виде суммы ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2}+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{16}$$

$$\text{где } a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\ dx, \tag{17}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\ \frac{n\pi x}{l}dx, \tag{18}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\ f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}\ \ dx \tag{19}$$

*Если* $f(x)$ – **четная функция**, *то ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы:*

$$f(x)=\ \frac{a_0}{2}+\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{20}$$

$$\text{причем } a_0=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\ dx, \tag{21}$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cdot\cos\ \frac{n\pi x}{l}dx, \tag{22}$$

$$b_n=0 \tag{23}$$

*Если* $f(x)$ – **нечетная функция**, *то ее ряд Фурье содержит только синусы:*

$$f(x)=\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{24}$$

$$\text{причем } a_0=a_n=0, \tag{25}$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}\ f(x)\ \sin\frac{n\pi x}{l}\ \ dx \tag{26}$$

Если функция $f(x)$ задана в сегменте $[0;\ l]$, то для разложения в ряд Фурье достаточно ее доопределить в сегменте $[0;\ l]$ произвольным способом, а затем разложить в ряд Фурье, считая ее заданной в сегменте $[-l;\ l]$.

Наиболее целесообразно функцию доопределить так, чтобы ее значения в точках $[-l;\ 0]$ находились из условий $f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x)$. В первом случае функция $f(x)$ в сегменте $[-l;\ l]$ будет четной, а во втором случае – нечетной. При этом коэффициенты разложения такой функции ($a_n$ – в первом случае и $b_n$ – во втором случае) можно определять по вышеприведенным формулам для коэффициентов четных и нечетных функций.

**Пример 27**. Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $(-\pi;\pi)$ уравнением $f(x) = x$.

**Решение:** Функция $f(x) = x$ кусочно-монотонная и ограничена на интервале $(-\pi;\pi)$, то есть может быть разложена в ряд Фурье (рис.1).

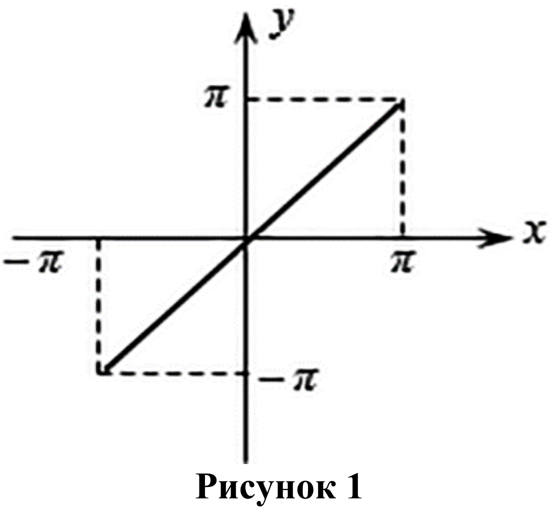


**Рисунок 1**

В силу нечетности функции $f(x) = -f(x)$ на интервале $(-\pi;\pi)$ коэффициенты ряда Фурье находим по формулам:

$$a_0 = a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin n\,x\,dx$$

Ряд Фурье запишем в виде:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\,x$$

Таким образом:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ dV = \sin nx dx & V = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int\limits_0^{\pi}\cos nx dx\right] == -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cos n\pi + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\sin nx|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \int_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\sin nx$$

$$\text{или } f(x) = 2\sin x - \frac{2}{2}\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x - \frac{2}{4}\sin 4x + \cdots$$

$$f(x) = 2\cdot\left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right]$$

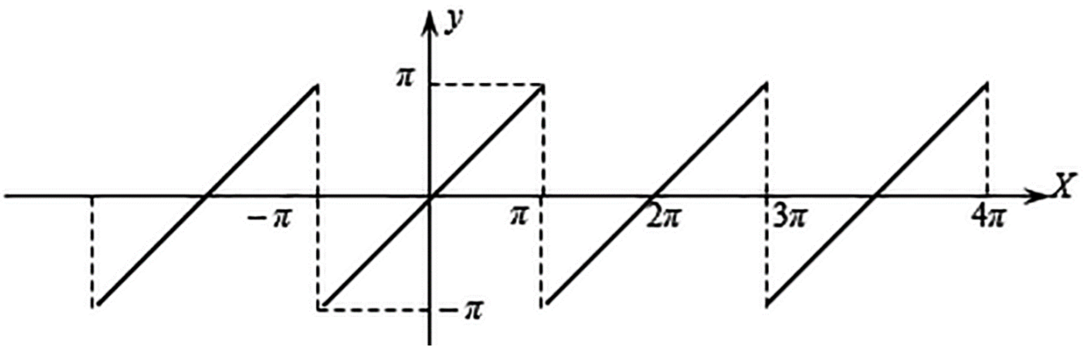


**Рисунок 2**

Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье $2\pi$-периодическая функция, которая совпадает с функцией $f(x) = x$ в точках непрерывности интервала $(-\pi;\pi)$, а затем периодически продолжает функцию $f(x) = x$ на всю числовую ось (рис. 2). На концах интервала$(-\pi; \pi)$ и в точках разрыва функция $S(x)$ принимает значение:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

**Ответ:** $f(x) = 2 \cdot \left[\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \cdots\right]$.

**Пример 28**. Разложите в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x \text{ при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ является $2l$-периодической $(l = 1)$ функцией. Она кусочно-монотонна и ограничена на интервале $(0; 2)$, то есть допускает разложение в ряд Фурье (рис. 3).

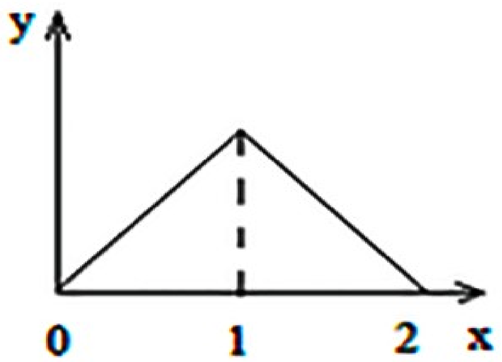


**Рисунок 3**

Коэффициенты ряда Фурье находим по формулам:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos\frac{n\,\pi\,x}{l}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\,\pi\,x}{l}dx$$

Ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Таким образом:

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^1 xdx + \frac{1}{1}\int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{(2-x)^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$a_n = \int_0^1 x\cos n\pi x dx + \int_1^2 (2-x)\cos n\pi x dx = \frac{x}{n\pi}\sin n\pi x|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x|_0^1 +$$

$$+\frac{(2-x)}{n\pi}\sin n\pi x|_1^2 - \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x|_1^2 = \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) - \frac{1}{n^2\pi^2}(1 - \cos n\pi) =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 \text{ при } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} \text{ при } n = 2k-1; \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^1 x\sin n\pi x dx + \int_1^2 (2-x)\sin n\pi x dx = -\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x|_0^1 -$$

$$- \frac{(2-x)}{n\pi}\cos n\pi x|_1^2 - \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x|_1^2 = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi = 0$$

Следовательно, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi x}{1} + \frac{\cos 3\pi x}{9} + \frac{\cos 5\pi x}{25} + \cdots\right)$$

$$\text{или } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$$

Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье непрерывна и $2l$-периодична ($l = 1$); во всех точках числовой оси совпадает с функцией $f(x)$ (рис. 4).

**Ответ:** $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}$.

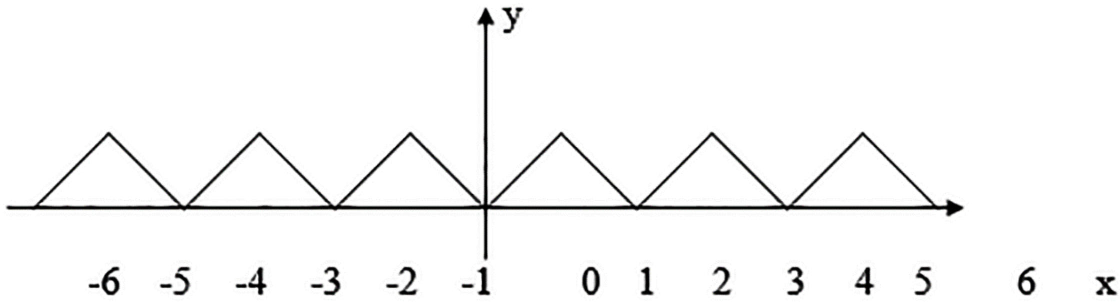


**Рисунок 4**

**Пример 29.** Разложите функцию, заданную на отрезке $[0;\pi]$ уравнением $f(x) = x + 2$, в ряд Фурье по косинусам.

**Решение:**

Продолжим функцию $f(x)$ четным образом на промежуток $[-\pi\,;\ 0)$, то есть выберем $f(x) = -x + 2$ на промежутке $[-\pi;\ 0)$. Тогда:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ x + 2 \text{при } 0 \le x \le \pi, \end{cases}$$

$$\text{или } f(x) = |x| + 2 \text{ для всех } x \in [-\pi;\ \pi]$$

Полученная продолжением функция $f(x)$ является четной кусочно-монотонной, ограниченной функцией, то есть допускает разложение в ряд Фурье (рис. 5).

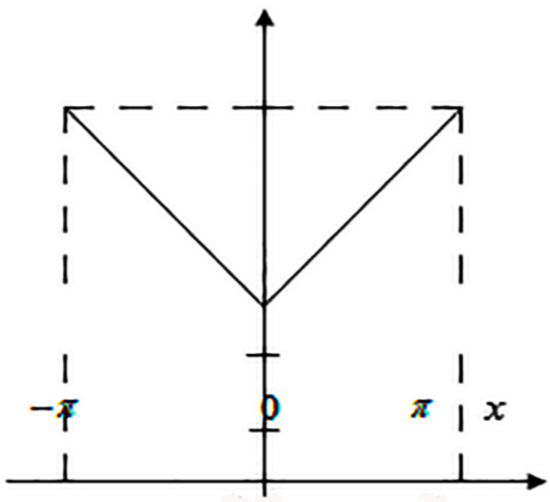


**Рисунок 5**

Коэффициенты находим по формулам:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cdot\cos n\,x\,dx$$

$$b_n = 0$$

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Таким образом:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+2)dx = \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{(x+2)^2}{2}\right|_0^\pi = \pi + 4$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+2)\cos n\,x\,dx = \Bigg/ \begin{matrix} U = x+2 & dU = dx \\ dV = \cos n x\,dx & V = \dfrac{1}{n}\sin n x \end{matrix} \Bigg/ =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x+2}{n}\sin nx\Big|_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin nx dx\right] = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0 \text{ при } n = 2k, \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} \text{ при } n = 2k-1; \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

Тогда:

$$f(x) = \frac{\pi+4}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right)$$

$$\text{или } f(x) = \frac{\pi+4}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

Сумма $S(x)$ полученного ряда Фурье является непрерывной $2\pi$-периодической функцией, которая во всех точках отрезка $[0, \pi]$ совпадает с функцией $f(x)$ (рис. 6).

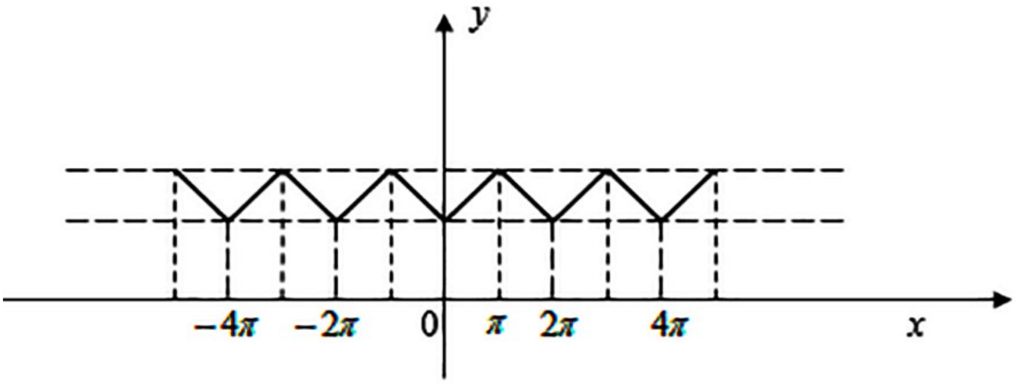


**Рисунок 6**

**Ответ:** $f(x) = \frac{\pi+4}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$.

## Практические задания

**Задание 14.** Разложите в ряд Фурье функции:

1) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ 2x \text{ при } 0 \le x \le \pi \end{cases}$;

2) $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi \le x \le 0, \\ x + 1 \text{ при } 0 < x \le \pi \end{cases}$;

3) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -2 < x < 0, \\ 3 \text{ при } 0 < x < 2 \end{cases}$;

4) $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } -1 \le x < 0, \\ x \text{ при } 0 \le x \le 1 \end{cases}$;

5) $f(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } 0 < x < \pi, \\ 4 \text{ при } \pi < x < 2\pi \end{cases}$;

6) $f(x) = \begin{cases} -1 \text{ при } -\pi \le x < 0, \\ 1 \text{ при } 0 \le x \le \pi \end{cases}$;

7) $f(x) = \frac{x^2}{2}$
на сегменте $[-3; 3]$;

8) $f(x) = 2x$
на сегменте $(0; 1)$;

9) $f(x) = 10 - x$
на сегменте $(5; 15)$;

10) $f(x) = \begin{cases} x \text{ при } 0 \le x \le 1, \\ 1 \text{ при } 1 < x < 2, \\ 3 - x \text{ при } 2 \le x \le 3. \end{cases}$

**Задание 15.** Разложите в ряд Фурье функцию, заданную на сегменте $[0;\pi]$ уравнением $f(x)=\pi-2x$:

1) продолжив ее на $[-\pi;\ 0]$ четным образом;

2) продолжив ее на $[-\pi;\ 0]$ нечетным образом.

## Самостоятельная работа

**Задание 13.** Разложите в ряд Фурье функции:

1) $f(x)=x$ на сегменте $[-\pi;\pi]$;

2) $f(x)=x^2$ на сегменте $[-1;1]$;

3) $f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } -\pi<x<0,\\ x \text{ при } 0\le x<\pi\end{cases}$;

4) $f(x)=\begin{cases}\frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \text{ при } -\pi<x<0,\\ \frac{2a}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ при } 0\le x<\pi\end{cases}$;

5) $f(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\le x<1,\\ 2-x \text{ при } 1\le x\le 2\end{cases}$;

6) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{e} \text{ при } 0\le x\le\frac{e}{2},\\ 0 \text{ при } \frac{e}{2}<x<e\end{cases}$;

7) $f(x)=1-2x$ на сегменте $(-\pi;\ \pi)$;

8) $f(x)=\frac{1}{2}x-3$ на сегменте $(-\pi;\pi)$.

# ИЗ ИСТОРИИ РЯДОВ

Установить, когда впервые в математике появились ряды, очевидно, невозможно. Уже вавилонские математики (VII век до н. э.) умели суммировать арифметическую и геометрическую прогрессии. Великий древнегреческий ученый Архимед (III век до н. э.) в «Квадрате параболы» приводит бесконечный ряд. Ряды Грегори (по имени шотландского математика и астронома Джеймса Грегори (1638–1675) и Лейбница (по имени великого немецкого математика Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716) для $\frac{\pi}{4}$ были найдены в Индии примерно в 1550 году. Важные результаты по теории рядов получили итальянские ученые Пьетро Менголи (1625–1686) и Эванжелиста Торричелли (1608–1647), а также голландец Николаус Меркатор (настоящая фамилия Кремер) (1512–1594) и англичанин Джон Валлис (1616–1703).

В 1664 году принципиальный шаг в создании теории сделал знаменитый английский ученый Исаак Ньютон (1643–1727). Его мемуары «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов» (1669) посвящены квадратурам различных кривых; и все они сводятся к интегралам (в современном обозначении) $\int ax^{\frac{m}{n}}dx = \frac{an}{m+n} \cdot x^{\frac{m+n}{n}}$, для чего Ньютон указал приемы разложения дробей и корней в степенные ряды.

Другие ряды и интегралы Ньютону не понадобились. В самом деле, тригонометрические функции были введены только великим Леонардом Эйлером (1707–1783), аналитического задания показательной функции не существовало до XVIII века. Поэтому понятно, что Ньютон считал основным способом задания функции ее разложение в степенной ряд. Например, имея в распоряжении только биномиальный ряд и интеграл от степенной функции, Ньютон мог найти ряд для $\arcsin x$; обращение этого ряда дает ряд для $\sin x$; интегрируя последний ряд почленно, можно легко получить разложение $\cos x$. Подобным образом Ньютон получил ряды для $\arcsin x$, $\sin x$, $\cos x$, $e^x$, $\ln(1+x)$. Разложение в ряд с помощью метода флюксий излагается в изданной после смерти Ньютона книге «Метод флюксий и бесконечные ряды» (1736).

Примерно к тому же времени относятся открытия Меркатора (1667), Валлиса (1668), Грегори (1670). Результат Меркатора в современной записи выглядит так: $\int_x^x \ln(1+b)\,db = \frac{1}{1\cdot 2}x^2 - \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \cdots$ Валлис заметил, что это разложение справедливо при $0 \le x < 1$. Грегори знал биномиальный ряд раньше Ньютона. Получив некоторые сведения о методе Ньютона, он сумел найти разложения для $\operatorname{arctg} x$; $\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$и некоторых других функций.

В XX веке вскрылось, что Грегори использовал «ряд Тейлора» (1672). Все его результаты были использованы в переписке и не могли быть известны, например, шотландскому математику Колину Маклорену (1698–1746), который заново открыл многие из них, и опубликовал через 70 лет.

Первые открытия Лейбница в теории рядов – разложение для $\operatorname{arctg} x$ и вычисление $\frac{\pi}{4}$ относятся к 1673 году. Они были опубликованы в 1682 году. Название его статьи «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов» (1686) показывает, что он также высоко ценил метод, как и Ньютон.

**Ряд Тейлора** был опубликован в 1715 году в книге «Методы приращения, прямая и обратная» английского математика и философа Брука Тейлора (1685–1731).

**Ряд Маклорена** встречается впервые в 1717 году у шотландского математика Джеймса Стирлинга (1692–1770), а в 1742 году – в работе другого шотландского математика Колина Маклорена (1698–1746) с указанием, что это частный случай ряда Тейлора. Вопрос о разложимости функции в ряд Тейлора до XVIII века даже не ставился. Французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857) впервые установил условия сходимости ряда Тейлора и условия сходимости его к данной функции.

Первые **тригонометрические** ряды встречаются у Ньютона в 1676 году. Интерес к тригонометрическим рядам повысился в XVIII веке в связи с «Решением задачи о колебании струны».

Большой вклад в развитие теории тригонометрических рядов внесли французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830), русский ученый Николай Иванович Лобачевский (1742–1856), немецкие математики Петер Густав Лежен Дирихле (1805–1859) и Георг Фридрих Бернхард Риман (1826–1866).

В 1811 году Фурье сформулировал теорему о том, что произвольно заданная функция может быть представлена тригонометрическим рядом.

Название **«Ряды Фурье»** предложил Риман в 1857 году. Оно стало общепринятым к 80-м годам XIX века и является знаком признания трудов великого математика.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 1

### Вариант 1

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{2n!}{\sqrt{2^n+3}}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак: $\frac{1}{11}+\frac{2}{21}+\frac{3}{31}+\cdots+\frac{n}{10n+1}+\cdots$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+2}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$$

## Вариант 2

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{4}+\frac{2}{9}+\frac{3}{16}+\frac{4}{25}\dots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак: $\frac{3}{4}+\frac{6}{7}+\frac{9}{10}+\cdots+\frac{3n}{3n+1}+\cdots$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+1}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\cdots$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{5n+2}\right)^n$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+9n^2}$$

## Вариант 3

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n+1}{2^n(n^2+1)}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак: $\frac{1}{10} + \frac{3}{28} + \cdots + \frac{n}{9n+1} + \cdots$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{7^n + 1}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{7}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 + n^2}$$

## Вариант 4

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{2}{4} + \frac{3}{9} + \frac{4}{16} + \frac{5}{25} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{3n+2}{10^n \cdot n^2}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак: $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{2n}{2n+1} + \cdots$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n+2}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)\cdot(n+2)}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+5}$$

**Вариант 5**

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{3}{2}+\frac{4}{4}+\frac{5}{8}+\frac{6}{16}+\frac{7}{32}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{n-1}{(\sqrt{3})^n}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{5n-4}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+1}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)\cdot 5^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{4}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2+5}$$

## Вариант 6

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $1+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\frac{6}{32}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)^2}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6n-1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+9}$$

## Вариант 7

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{5}+\frac{\sqrt[3]{2}}{11}+\frac{\sqrt[3]{3}}{29}+\frac{\sqrt[3]{4}}{83}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 3^n}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(5n-1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

### Вариант 8

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{n}{(\sqrt{2})^{n}}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\ln 4}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n(3n+1)}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{8n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$$

## Вариант 9

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\frac{8}{17}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n!}{2^{n^2}}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3n^2}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n \ln 7}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n^2+2}$$

## Вариант 10

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{3}{2}+\frac{9}{5}+\frac{27}{10}+\frac{81}{17}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{n+1}{n!}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n^3+1}{4n^3-1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\ln 3}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^n\frac{5}{n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

## Вариант 11

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{3}{5}+\frac{7}{9}+\frac{11}{13}+\frac{15}{17}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{1}{(2n-1)^2}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{8n+1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $1+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}+\frac{1}{\sqrt[5]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(2n+1)}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n^2+3}$$

## Вариант 12

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{10}{8}+\frac{17}{16}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{3^n}{\sqrt[n]{n}}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+7}{15n-11}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:
$1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[4]{n}} + \cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$$

## Вариант 13

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{10} + \frac{2}{26} + \frac{3}{50} + \frac{4}{82} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n^n}{n!}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n(n+1)}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:
$\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{9n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

## Вариант 14

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{5} + \frac{9}{9} + \frac{25}{17} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2+1}{(n+3)(n+1)}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+3)}{3^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{4n+3}\right)^{\frac{n}{2}}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(2n+1)}$$

## Вариант 15

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}+\frac{10}{11}+\frac{17}{18}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{1}{n\ln(n+1)}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n+1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 6^2}+\frac{1}{3\cdot 6^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 6^n}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{3n^2+2n+1}\right)^n$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$$

## Вариант 16

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{3}{11}+\frac{4}{14}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\ln\frac{n^3}{n^3+1}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{n^2(n+7)}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1\cdot 9}+\frac{1}{2\cdot 9^2}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 9^n}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

## Вариант 17

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{2}{3}+\frac{9}{10}+\frac{28}{29}+\frac{65}{66}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{4n+3}{n^2+1}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{8n-3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 5^2}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 5^n}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$$

## Вариант 18

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $3 + \frac{4}{2} + \frac{5}{6} + \frac{6}{24} + \frac{7}{120} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n}{(n+1)^2 + 1}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n-1}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^n$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)[\ln(n+2)]}$$

## Вариант 19

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n+1}{2n+3}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7n+3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{2\cdot 7^2} + \frac{1}{3\cdot 7^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 7^n} + \cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n+1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}$$

## Вариант 20

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{1}{n^2-\ln n}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{8n^2-3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{2\cdot 3^3}+\frac{1}{2\cdot 3^4}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{7}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+3}}$$

## Вариант 21

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n}{n!}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^5 - 1}{7n^3 + 3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 4^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 4^n} + \cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^5}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n(2n+1)}$$

## Вариант 22

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{11} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{n}{3n - 1}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4-1}{7n^5+3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения: $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\cdots$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+7)\ln^2(n+7)}$$

## Вариант 23

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу *n*-го члена ряда по указанным членам: $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{2\ln 3}+\frac{1}{3\ln 4}+\cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n=\frac{n}{(\sqrt{4})^n}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^6+3}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n \ln 7}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(n+1)}{5^n}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n-1}}$$

## Вариант 24

**Задание 1.** Напишите простейшую формулу $n$-го члена ряда по указанным членам: $\frac{3}{5} + \frac{7}{9} + \frac{11}{13} + \frac{15}{17} + \cdots$

**Задание 2**. Напишите пять членов ряда по заданному общему члену:

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$$

**Задание 3.** Исследуйте сходимость ряда, применяя необходимый признак:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 1}{5n + 7}$$

**Задание 4**. Исследуйте сходимость ряда, применяя признаки сравнения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n \ln 5}$$

**Задание 5.** С помощью признака Даламбера исследуйте ряд на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}$$

**Задание 6.** Исследуйте ряд на сходимость с помощью признака Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

**Задание 7.** Исследуйте ряд на сходимость, пользуясь интегральным признаком Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{1+n^2}$$

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ № 2

### Вариант 1

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 x\cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + y^2 - e^x, y(0) = 0$$

### Вариант 2

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = 2x - 3\ln y + y, y(0) = 1$$

### Вариант 3

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = x^3 - 3x$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 y + e^y + x, y(0) = 0$$

## Вариант 4

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = -e^{-2x} + y^2, y(0) = 0$$

## Вариант 5

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \cos\frac{x}{2}$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,2} \frac{\sin x}{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = xe^x + y^2 + 1, y(0) = 0$$

### Вариант 6

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x - \text{a})$:

$$f(x) = \ln x \text{ по } (x - 1)$$

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} x\ln(1 + \sqrt{x})dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = 2x^3 - y^2 - 2x, y(0) = 1$$

### Вариант 7

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = 3^x$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + \sin y + 1, y(0) = 0$$

## Вариант 8

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = e^{-x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} xe^{-\sqrt{x}}dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0$$

## Вариант 9

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = x^3 - 3x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x\cos\sqrt{2x}dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = e^{-2x} + 3y^2, y(0) = 0$$

## Вариант 10

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \cos 2x$ в ряд Тейлора по степеням $(x-\pi)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = 2x^2 + 3y\cos x + 2, y(0) = 0$$

## Вариант 11

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = x^4 - 4x^2$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^3 + y^2 - e^x, y(0) = 1$$

## Вариант 12

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = e^{-2x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 3)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}\, dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = \sin 2x + xy, y(0) = 1$$

## Вариант 13

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sin 3x$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = cosx + l^y + x, y(0) = 0$$

## Вариант 14

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 e^{-0,1x^3} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = \mathrm{tg}x + xy^2 - e^x, y(0) = 1$$

## Вариант 15

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 x^2 \cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = \ln(x+1) + e^y, y(0) = 0$$

## Вариант 16

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ в ряд Тейлора по степеням $(x-1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = xe^{-x} + \ln y, y(0) = 1$$

## Вариант 17

**Задание 1**. Разложите функцию в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + y\ln y - y, y(0) = 1$$

## Вариант 18

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = 4^x$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = \cos 2x - x - y^2, y(0) = 0$$

## Вариант 19

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^3}}$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^3 - \mathrm{tg} y + 1, y(0) = 0$$

## Вариант 20

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x-4)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin 5x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 + y^2 + e^x, y(0) = 0$$

## Вариант 21

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = e^{-2x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{1-\cos x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 y + y^2, y(0) = 1$$

## Вариант 22

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \sin\frac{x}{3}$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1-\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y'' = (2x - 1) \cdot y - 1, y(0) = 0$$

### Вариант 23

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \ln(1 - x + x^2)$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = e^{xy} + y, y(0) = 1$$

### Вариант 24

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = \sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 4)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\ln(x+1)}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = xy + y^3, y(0) = 1$$

## Вариант 25

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = \ln(2 - 3x + x^2)$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = y^2 + x, y(0) = 1$$

## Вариант 26

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = e^{-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{x}\, e^{-x^2} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = xy + y^2, y(0) = 1$$

## Вариант 27

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = e^{-4x}$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x + 2y^2, y(0) = 0$$

## Вариант 28

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$ в ряд Тейлора по степеням $x$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\sin 3x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y' = x^2 y + y^3, y(0) = 1$$

## Вариант 29

**Задание 1.** Разложите функцию $f(x) = e^{6x}$ в ряд Тейлора по степеням $(x + 2)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y'' - xy^2 = 0, y(0) = 1;\ y'(0) = 1$$

**Вариант 30**

**Задание 1**. Разложите функцию $f(x) = \sin\frac{3x}{2}$ в ряд Тейлора по степеням $\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

**Задание 2.** Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x^2}{x} dx$ с точностью до 0,001.

**Задание 3.** При указанных начальных условиях найдите три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд функции $y = f(x)$, являющейся решением заданного дифференциального уравнения:

$$y'' = x + y^2, y(0) = 0;\ y'(0) = 1$$

# СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – М. : Юрайт, 2020. – 401 с.

2. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 439 с.

3. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Ч. 2 : учебное пособие / Н. В. Богомолов. – М. : Юрайт, 2020. – 320 с.

4. Высшая математика : учебник и практикум / под общей редакцией М. Б. Хрипуновой, И. И. Цыганок. – М. : Юрайт, 2020. – 478 с.

5. Гисин, В. Б. Математика. Практикум : учебное пособие / В. Б. Гисин, Н. Ш. Кремер. – М. : Юрайт, 2020. – 204 с.

6. Элементы дискретной математики : учебное пособие / А. М. Емельянов [и др.]. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2014. – 106 с.

*Учебное издание*

*Кидяева Наталья Петровна*

*кандидат технических наук, доцент*

*Митрохина Олеся Павловна*

*кандидат технических наук, доцент*

**ТЕОРИЯ РЯДОВ**

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 27.06.2023 г.
Формат 60х90/16. Уч.-изд. л – 1,68. Усл. печ. л. – 5,06.
Тираж по требованию. Заказ 40.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86