Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
аграрный университет»

**З. Ф. Кривуца, Н. Ф. Двойнова,
Е. С. Поликутина**

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2024

УДК 004.91
ББК 32.973.26
К82

Рецензент
Сергей Васильевич Щитов, доктор технических наук, профессор кафедры транспортно-энергетических средств и механизации АПК Дальневосточного государственного аграрного университета

Рекомендовано к использованию в учебном процессе методическим советом электроэнергетического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета

К82 **Кривуца, З. Ф. Методы планирования и обработка экспериментальных исследований с применением современных компьютерно-математических систем :** учебное пособие / З. Ф. Кривуца, Н. Ф. Двойнова, Е. С. Поликутина; Дальневост. гос. аграр. ун-т. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2024. – 72 с.

ISBN 978-5-9642-0590-6

Учебное пособие написано в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математическое моделирование эффективного использования сельскохозяйственной техники в АПК» и включает учебно-методический материал для приобретения студентами практических навыков в планировании и проведении многофакторных экспериментов с использованием математической теории планирования эксперимента, а также статистической обработки и анализа полученных данных.
Учебное пособие подготовлено в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов и предназначено для обучающихся очной и заочной форм обучения по агроинженерным направлениям бакалавриата, магистратуры и аспирантуры.

УДК 004.91
ББК 32.973.26

ISBN 978-5-9642-0590-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Основной целью проведения современного эксперимента является разработка математической модели, адекватно описывающей технологический процесс и позволяющей, в конечном результате, осуществлять управление им. При планировании эксперимента исследователь должен:

1) обеспечить надежность и четкость интерпретации результатов исследований;

2) составить четкую и последовательную логическую схему построения всего процесса исследования;

3) максимально формализовать процесс разработки модели и сопоставления экспериментальных данных различных опытов одного и того же объекта исследований с целью широкого применения компьютерной техники [2, 4, 6].

Для достоверного прогнозирования и моделирования состояния сложных технических объектов необходимо использование регрессионных закономерностей, получаемых в ходе проведения эксперимента. Преимуществом такого метода является способность описания любого объекта при полном соблюдении алгоритма активного эксперимента. Недостатком выступает отсутствие представлений о типе протекающих в системе процессов; он также неприменим вне области планирования эксперимента.

Наиболее современным и эффективным средством планирования и обработки экспериментальных исследований является полный многофакторный эксперимент, который широко используется в современной научно-исследовательской деятельности и является наиболее легко реализуемым среди многочисленных методов активного эксперимента. Целью исследователя при его использовании является определение линейной математической модели исследуемого процесса, что позволит определиться с дальнейшей стратегией проведения исследований.

1 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Планирование эксперимента – *это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для получения математической модели процесса* [6].

При этом важно учитывать: стремление к минимизации числа опытов; одновременное варьирование всех переменных, определяющих процесс; выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов. Перед проведением планирования активного эксперимента необходимо собрать дополнительную информацию об исследуемом объекте, для получения которой используются знания и навыки, приобретенные ранее в предыдущих исследованиях или описанные в литературе.

Измерением *называют сравнение физической величины с некоторым значением этой величины, принятым за единицу.* В результате измерения определяется числовое значение измеряемой величины. Различают прямые и косвенные измерения.

При **прямых измерениях** *измеряется сама физическая величина при помощи инструмента специального назначения.* К таким измерениям относятся: измерение скорости передвижения транспортного средства (спидометром), массы перевозимого груза (весами), температуры (тепловизором).

Косвенное измерение – *определение числового значения измеряемой величины на основе результатов прямых измерений величины, связанных с измеряемой величиной формулой.* Косвенным является измерение объема выполненных работ энергетического средства, коэффициента использования сцепного веса, энергетических затрат автомобиля.

Любые измерения неизбежно сопровождаются ошибкой (погрешностью). Возникновение погрешностей обусловлено рядом объективных и субъективных факторов. К объективным можно отнести ограниченность точности приборов, динамику микроклиматических параметров в процессе измерений и др. К субъективным факторам относятся несовершенство органов чувств экспериментатора, уровня его внимания, зрения и т. д.

Независимо от характера источника ошибок *принято различать три группы погрешностей: систематические, случайные и промахи.*

Систематические ошибки *являются следствием несовершенства приборов и недостатков методики измерения.* Они всегда дают отклонения от истинного значения в одну и туже сторону. Устраняют систематические ошибки путем проверки приборов и совершенствования методики измерения.

Случайные погрешности *обусловлены случайными, неконтролируемыми помехами, влияние которых на процесс измерения невозможно учесть непосредственно.* Случайные погрешности могут отклонять результаты измерения от истинного значения в обе стороны, и их влияние учитывается посредством определенной обработки результатов измерения физической величины.

Промах – *это результат измерения, который явно отличается от ранее проведенных измерений, в расчеты он не принимается.* Промахи возникают из-за невнимательности или халатности экспериментатора.

Теория погрешности, использующая законы теории вероятностей, позволяет оценить размер погрешности, учитывающий случайные ошибки прямых измерений, а также систематические ошибки, не связанные с неисправностью приборов.

1.1 Закон распределения случайных величин. Среднее арифметическое значение результата серии измерений

Обозначим измеряемую физическую величину – a. При проведении n опытов получили значения a_1, a_2, a_3, … a_n. *Появление каждого из значений* a_i

является **случайным событием**. Отличие значения a_i от истинного значения a измеряемой величины называется **истинным значением абсолютной погрешности** Δ $\boldsymbol{a_i}$. Очевидно, что имеет место:

$$a = a_1 + \Delta a_1 = a_2 + \Delta a_2 = a_3 + \Delta a_3 = \cdots = a_n + \Delta a_n \qquad (1.1)$$

Учитывая, что a_i – случайная величина, случайными являются и значения абсолютных погрешностей Δ a_i. Поскольку истинное значение a неизвестно, следовательно неизвестно и значение Δ a_i.

Немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, разработавший в XIX веке **теорию погрешностей**, в ее основу положил два предположения:

1. При достаточно большом числе измерений равные по модулю и противоположные по знаку случайные погрешности измеряемой величины равновероятны.

2. Вероятность появления погрешности данного модуля уменьшается с ростом модуля погрешности, то есть большие погрешности встречаются реже, чем малые.

Наиболее близким к истинному значению измеряемой величины принято считать **среднее арифметическое значение отдельных измерений**.

Проведя серию из n измерений и получив для одинаковых условий эксперимента различные значения a_i измеряемой величины, вычисляем ее среднее арифметическое значение $\langle a \rangle$ по формуле (1.2):

$$\langle a \rangle = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad (1.2)$$

$$\text{при этом } \langle a \rangle = a_i + \Delta\langle a \rangle_i \qquad (1.3)$$

где $\Delta\langle a \rangle_i$ – отклонение данного значения измеренной величины от среднего арифметического значения результата данной серии.

Значения $\Delta\langle a \rangle_i$, равно как и значения Δa_i, являются случайными величинами, к которым в полной мере относятся приведенные выше предположения Гаусса.

Из первого предположения Гаусса следует, что при $n \to \infty$ имеет место:

$$\langle a \rangle = a \tag{1.4}$$

То есть *среднее значение результатов бесконечного числа измерений является истинным значением измеряемой величины.*

Однако, на практике $n \ll \infty$, и равенство (1.4) не может быть точным, а экспериментатор должен оценивать величину этой неточности.

По Гауссу распределение вероятностей W отклонений $\Delta\langle a \rangle_i$ от нуля определяется **законом нормального распределения** (1.5):

$$W(\Delta\langle a \rangle_i) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta\langle a \rangle_i^{\,2}}{2S^2}} \tag{1.5}$$

где S – дисперсия, определяемая как среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения.

График функции (1.5) представлен на рисунке 1.1. Вид каждой кривой на этом рисунке соответствует сформулированным ранее предположениям.

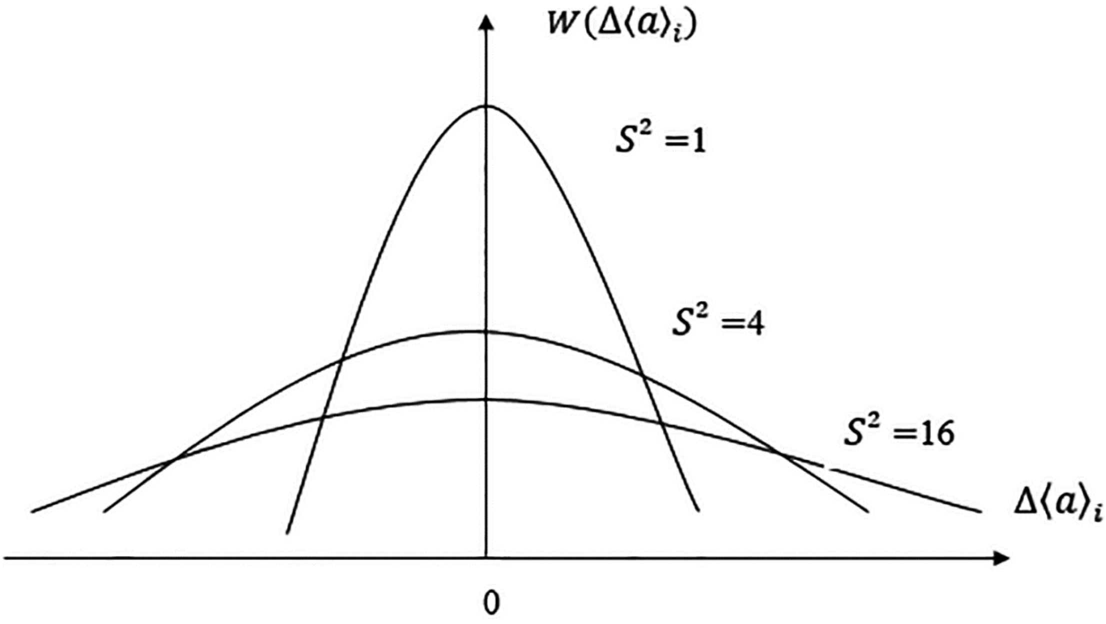


Рисунок 1.1 – Графическая интерпретация закона нормального распределения вероятностей W

Из рисунка следует, что *функция распределения вероятностей* $W(\Delta\langle a\rangle_i)$ *зависит от величины дисперсии* S^2. Численное значение дисперсии определяется всей совокупностью условий измерений (точность приборов, методика измерений, квалификация и внимательность экспериментатора и т. д.). Чем точнее проведены измерения, тем меньше дисперсия, и тем теснее группируются результаты реальных измерений вокруг среднего арифметического значения результатов данной серии, следовательно, уменьшается вероятность больших отклонений.

1.2 Способ представления погрешности измерений

Вычислив серию повторных измерений, а также среднее арифметическое значение результатов данной серии, экспериментатору необходимо оценить погрешность своих измерений. Современный уровень и унификация требуют указать интервал значений измеряемой величины, в пределах которого находится ее истинное значение с определенной и заранее выбранной вероятностью (надежностью).

Таким образом, результат серии опытов необходимо представить неравенством (1.6) с обязательным указанием выбранного значения надежности *P*:

$$\langle a\rangle - \Delta a \ll a \gg \langle a\rangle + \Delta a \tag{1.6}$$

Интервал $[\langle a\rangle - \Delta a; \langle a\rangle + \Delta a]$, *в которой с заданной вероятностью попадает истинное значение измеряемой величины, называют* **доверительным интервалом.** Величина Δa является *полушириной доверительного интервала* и называется *предельной абсолютной погрешностью результата данной серии.*

Надежностью *P* результата серии измерений *называют вероятность того, что истинное значение измеряемой величины* a *попадает в соответствующий доверительный интервал.* Логическая связь между заданной надежностью и соответствующей предельной абсолютной погрешностью очевидна: *чем шире доверительный интервал (больше предельная абсолютная погрешность), тем больше вероятность попадания искомой величины в этот интервал (больше надежность).*

Еще более проста логика взаимосвязи между предельной абсолютной погрешностью и дисперсией: *чем меньше дисперсия, тем с большей вероятностью истинное значение измеряемой величины попадает в меньший интервал значений.* Таким образом, меньшее значение дисперсии связано для одного и того же значения надежности с меньшим значением предельной абсолютной погрешности (рис. 1.1).

Удобно величину предельной абсолютной погрешности, определяющей ширину доверительного интервала, связать с квадратным корнем из дисперсии формулой (1.7):

$$\Delta a = kS \tag{1.7}$$

где k – коэффициент пропорциональности, числовое значение которого связано с числовым значением надежности P.

В теории вероятностей доказывается, что квадратичный корень из дисперсии S практически равен среднеквадратичной погрешности $\sigma_{\langle a\rangle}$ результата серии изменений. При $n > 30$ имеет место равенство (1.8):

$$S = \sigma_{\langle a\rangle} \tag{1.8}$$

Данное равенство можно считать вполне строгим.

Под **среднеквадратичной погрешностью из *n* повторных измерений** *понимают величину, определяемую выражением (1.9)*:

$$\sigma_{\langle a\rangle} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta\langle a\rangle_i^{\,2}} \tag{1.9}$$

В реальных условиях приходится иметь дело с небольшим числом измерений в серии ($n < 30$), поэтому формулой (1.9) пользоваться нельзя, а, следовательно, нельзя оценить полуширину доверительного интервала, применяя формулу (1.7), так как величина S неизвестна.

Английский математик и химик Уильям Сили Госсет, печатавшийся под псевдонимом Стьюдент, предложил преобразовать формулы (1.7) и (1.8) для оценки полуширины доверительного интервала к виду:

$$\Delta a = t\sigma_{\langle a \rangle} \tag{1.10}$$

В. Госсет заменил коэффициент k, зависящий только от выбора надежности P, коэффициентом t (коэффициентом Стьюдента), зависящим не только от надежности P, но и от числа повторов опытов.

При этом В. Госсет рассчитал значения коэффициентов t в широком диапазоне значений P и n (приложение А).

Таким образом, определение ширины доверительного интервала в зависимости от надежности и числа опытов сводится к вычислению абсолютной погрешности по формуле (1.10).

Однако абсолютная погрешность сама по себе не дает никакого представления о точности, с которой определена измеряемая величина, потому что вывод о точности измерения можно сделать на основании сравнения абсолютной погрешности с числовым значением самой величины. О точности измерения можно судить по величине относительной погрешности.

Относительная погрешность $\boldsymbol{\varepsilon}$ – *это отношение предельной абсолютной погрешности к среднему значению измеряемой величины.* Она определяется по выражению (1.11):

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{\langle a \rangle} \tag{1.11}$$

Абсолютная погрешность – именованное число, не зависящее от среднего значения результата измерений и выражающееся в тех же единицах, что и среднее значение результата данной серии.

Относительная погрешность – безразмерная величина, зависящая от среднего значения результата измерений и выражающая долю среднего значения результата, содержащуюся в величине абсолютной погрешности. При необходимости относительная погрешность может быть выражена в процентах.

В случае, когда результат косвенных измерений вычисляется однократно по средним значениям прямых измерений, полученных в результате нескольких повторов, необходимо определять **приборную ошибку.** *При прямом измерении абсолютная погрешность результата равна половине цены деления измеряемого прибора.*

Пример 1.

1. Диаметр проволоки измерили штангенциркулем с ценой деления нониуса 0,1 мм и получили результат ряда измерений: $\langle d \rangle = 1{,}5$ мм.

Абсолютная приборная ошибка измерения составляет $\Delta\, d = 0{,}05$ мм.

Относительная приборная ошибка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} = \frac{0{,}05}{1{,}5} = 0{,}033 = 3{,}3\%$$

2. Диаметр той же проволоки измерили микрометром с ценой деления 0,01 и получили результат: $\langle d \rangle = 1{,}52$ мм.

Абсолютная приборная ошибка измерения составляет $\Delta\, d = 0{,}005$ мм.

Относительная приборная ошибка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} = \frac{0{,}005}{1{,}52} = 0{,}00329 = 0{,}329\%$$

Приборная погрешность результата косвенных измерений складывается из ошибок прямых измерений и ошибок табличных величин. Абсолютной ошибкой табличной величины или константы, взятой с некоторым приближением, принято считать пять единиц десятичного разряда, следующего за младшим разрядом в принятом приближении.

Пример 2.

1. Число π чаще всего принимают равным $\pi = 3{,}14$.

Абсолютная ошибка такого приближения $\Delta\,\pi = 0{,}005$.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}005}{3{,}14} = 0{,}00159 = 0{,}159\%$$

2. Используя число $\pi = 3{,}142$ с тремя десятичными знаками, получаем:

Абсолютная ошибка такого приближения $\Delta\,\pi = 0{,}0005$.

Относительная погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{0{,}0005}{3{,}142} = 0{,}0001591 = 0{,}01591\%$$

Таким образом, *увеличение точности измерений приводит к значительному снижению относительной погрешности.*

В теории погрешности доказывается, что если:

$$a = a(X_1, X_2, \dots\dots, X_j, \dots\dots, X_m),$$

то **абсолютная приборная погрешность** определяется по формуле (1.12), а **относительная приборная погрешность** формулой (1.13):

$$\Delta a_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial a}{\partial X_j}\right)^2 \Delta X_j^2}, \tag{1.12}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial ln a}{\partial X_j}\right)^2 \Delta X_j^2} \tag{1.13}$$

Формулы (1.12) и (1.13) используются для вычисления приборной ошибки любой величины a, зависящей так или иначе от ряда переменных X_j, являющихся результатами прямых измерений или табличными величинами.

Практически в случаях, когда определяемая в эксперименте величина $\langle a \rangle$ вычисляется по результатам серии прямых измерений, вычисляют относительную приборную погрешность по формуле (1.13), а затем вычисляют абсолютную погрешность по формуле (1.14):

$$\Delta a_n = \varepsilon \langle a \rangle \tag{1.14}$$

2 ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

2.1 Планирование многофакторного эксперимента

При использовании метода активного планирования весь эксперимент обычно разбивается на несколько этапов. Информация, полученная после каждого этапа, используется для планирования исследований на последующем этапе.

Для решения поставленной задачи с заданной точностью прежде всего необходимо провести **планирование многофакторного эксперимента**, *то есть процедуру выбора числа опытов и условий их проведения, необходимых и достаточных для получения математической модели процесса* [6].

При этом необходимо учитывать **требования при формировании процесса экспериментальных исследований:**

1) все факторы должны изменяться одновременно по определенным зависимостям при исследовании технологических процессов;

2) выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов;

3) максимальное снижение числа опытов;

4) продуктом проведения многофакторного эксперимента является математическая модель исследуемой функции.

Планирование полного факторного эксперимента включает следующие этапы [2]:

1) сбор и анализ априорной информации;

2) выбор входных и выходных переменных, а также области экспериментирования;

3) выбор математической модели, с помощью которой будут представляться экспериментальные данные;

4) выбор критерия оптимальности и плана эксперимента;

5) определение метода анализа данных;

6) проведение эксперимента;

7) проверка статистических предпосылок для полученных экспериментальных данных;

8) обработка результатов;

9) интерпретация результатов и подготовка рекомендаций.

При сборе и анализе априорной информации необходимо провести анализ научной литературы по направлению своих научных исследований, подготовить план будущих экспериментальных изысканий.

Современные технологические процессы характеризуются наличием значительного числа разнообразных факторов, оказывающих на них влияние. Если представить исследуемый процесс в виде «черного ящика», то все многообразие действующих на его входе факторов можно показать в виде схемы (рис. 2.1).

Рисунок 2.1 – Схема технологического процесса

Учитывая все многообразие действующих факторов, прежде всего необходимо исследовать $\vec{X}$ – управляемые факторы, которые можно измерять и целенаправленно изменять. Область возможных значений X_1, X_2, X_3,…, X_k создают факторное пространство.

Выбор входных и выходных переменных заключается в определении факторов, определяющих состояние объекта, то есть его $\vec{Y}$ функции. Основным требованием к факторам является их управляемость, что означает установление необходимого значения уровня фактора и поддержание его в течение всего опыта. В этом состоит особенность активного эксперимента.

Факторы различаются на качественные и количественные. Примерами качественных факторов могут служить способы лечения, методики преподавания, различные катализаторы и др., которым не соответствует числовая шкала, и их порядок не играет роли. При этом количественным факторам обязательно соответствует числовая шкала, позволяющая однозначно определить массу, температуру, давление, концентрацию и т. д.

При формировании процесса экспериментальных исследований необходимо учитывать следующие **требования к выбору факторов:**

1) для любой пары факторов должно выполняться условие совместимости;

2) факторы должны быть независимыми;

3) факторы должны быть однозначны;

4) факторы должны непосредственно воздействовать на параметр оптимизации;

5) факторы должны быть определены операционно (точное определение терминов, используемых в исследовании);

6) точность установления граничных значений факторов должна быть максимально высокой.

Под выходными переменными понимаются реакции (отклики) на воздействие входных переменных. Отклик зависит от специфики исследования и может быть экономическим (прибыль, рентабельность), технологическим (выход, надежность), психологическим, статистическим и т. д. *Параметр оптимизации должен быть эффективным с точки зрения достижения цели, универсальным, количественным, выражаемым числом, имеющим физический смысл, быть простым и легко вычисляемым.*

Планирование эксперимента позволяет варьировать ряд факторов и получать одновременно количественные оценки всех проявляющихся эффектов. При этом, в отличие от классического регрессионного анализа, оно дает возможность избежать корреляции между коэффициентами уравнения регрессии. При статистическом подходе математическая модель объекта или процесса представляется в общем виде полиномом *n*-степени, то есть отрезком ряда Тейлора, в который разлагается неизвестная функция:

$$\begin{gathered} Y(X_i..,X_k) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} b_{ij} X_i X_j + \\ + \sum_{\substack{i,j,u=1 \\ i \neq j \neq u}}^{k} b_{iju} X_i X_j X_u + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} X_i^2 + \cdots \end{gathered} \tag{1.11}$$

где b_0 – свободный член;

b_i – линейные эффекты;

b_{ij} – эффекты парного взаимодействия;

b_{iju} – эффекты тройного взаимодействия.

Планирование эксперимента начинают с *выбора* **центра плана***, то есть точки, соответствующей начальному значению всех используемых в эксперименте факторов, в окрестностях которой в дальнейшем ставится серия планируемых опытов.* Очевидно, начальным значениям факторов будет соответствовать начальное значение функции отклика Y_0. На основе априорных сведений о процессе выбирается центр плана. При отсутствии таковых целесообразно в качестве центра плана выбрать центр исследуемой области.

Значение факторов в каждом опыте отличается от начального их значения на величину интервала варьирования ΔZ. **Интервалом варьирования факторов** *называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижние уровни* *фактора.* Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнем. Таким образом, задача выбора уровней сводится к более простой задаче выбора интервала варьирования.

Прогнозировать оптимальную величину интервала варьирования довольно трудно. Рекомендуемый интервал варьирования выбирается в пределах от 0,05 до 0,3 от диапазона варьирования исследуемого фактора.

Для удобства обработки результатов опытов необходимо провести преобразование значений входящих экспериментальных факторов к безразмерным величинам, используя выражение (2.2):

$$X_i = \frac{Z_i - Z_{0i}}{\Delta Z_i} \qquad (2.2)$$

где X_i – безразмерная величина i-го фактора;
Z_i – текущее значение i-го фактора;
Z_{0i} – начальное значение i-го фактора в центре плана;
ΔZ_i – значение интервала варьирования i-го фактора.

Таким образом, если координаты центра плана совпадают с началом координат в безразмерной системе координат, то верхний уровень факторов будет составлять единицу, нижний соответственно минус единицу.

2.2 Определение доминирующих факторов с помощью метода ранговой корреляции

Проанализируем основные методы, позволяющие с минимальными затратами выделить из большого числа факторов доминирующие (то есть оказывающие наибольшее существенное влияние на ход процесса). Также проведем предварительное отсеивание несущественных факторов.

Метод ранговой корреляции *позволяет в ряде случаев сравнительно просто отбросить несущественные технологические факторы, основываясь* *на опросе мнения специалистов, работающих в данной области.* Поэтому с него следует начинать эксперимент, особенно для начинающего исследователя, априорные сведения которого об исследуемом процессе, как правило, незначительны.

Процедура определения степени влияния технологических факторов на выходной параметр этим методом сводится к **следующим этапам:**

1. На основе анализа литературных источников об исследуемом технологическом процессе составляется перечень факторов, которые, по сведениям этих источников, могут оказывать влияние на интересующий выходной параметр процесса.

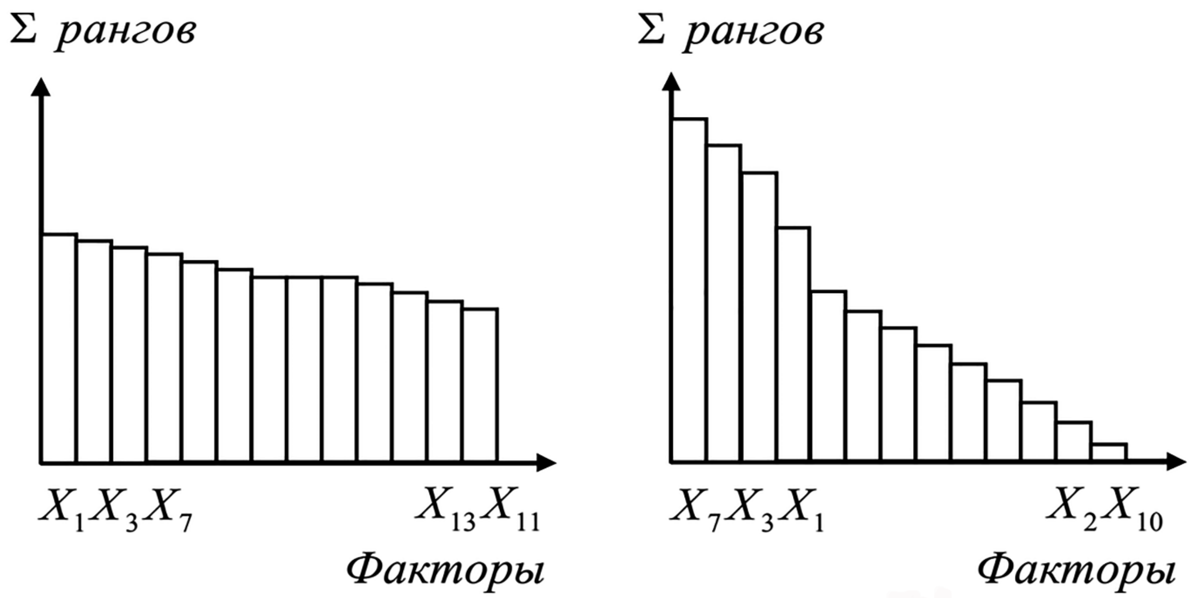
2. Определяется степень влияния факторов на выбранный выходной параметр. Для этого используется таблица рангов (табл. 2.1).

Таблица 2.1 – Матрица рангов

Исследователь	**Фактор**				
	X_1	X_2	X_3	X_i	X_k
1 2 3 … … *n*	a_{11} a_{21} a_{31} … … a_{n1}	a_{12} a_{22} a_{32} … … a_{n2}	a_{13} a_{23} a_{33} … … a_{n3}	a_{1i} a_{2i} a_{3i} … … a_{ni}	a_{1k} a_{2k} a_{3k} … … a_{nk}
Сумма рангов фактора: $\sum_{j=1}^{n} a_{ji}$	…	…	…	…	…
Среднее арифметическое значение суммы рангов: $\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}$	…	…	…	…	…
Абсолютное значение отклонение суммы рангов от их среднего арифметического значения: $\left\lvert\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} a_{ji} - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\right\rvert$	…	…	…	…	…

При составлении таблицы для каждого фактора указывается его значение a_{ji} по степени влияния на выходной параметр. Наиболее существенному фактору присваивается первое место $a_{ji} = 1$. По мере уменьшения влияния фактора величина ранга a_{ji} возрастает.

3. По полученной матрице рангов строят диаграмму рангов (рис. 2.2).



а) б)

а) равномерное распределение; б) экспоненциальное уменьшение

Рисунок 2.2 – Диаграммы рангов

В соответствии с построенной диаграммой определяют доминирующие факторы. В случае равномерного распределения факторов (рис. 2.2, а) в матрице рангов, целесообразно все факторы включить в эксперимент. При экспоненциальном уменьшении степени влияния факторов (рис. 2.2, б) появляется возможность отбросить ряд факторов, имеющих наименьшую сумму рангов.

2.3 Разработка модели технологического процесса

Планирование эксперимента желательно начинать с предположения, что модель исследуемого процесса является линейной и ее можно описать полиномом первого порядка (2.3):

$$Y(X_i, X_j) = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{k} b_{ij} X_i X_j \tag{2.3}$$

В соответствии с полиномом первого порядка в многофакторном эксперименте необходимо учитывать влияние на функцию отклика не только каждого рассматриваемого в эксперименте фактора в отдельности, но и их взаимодействий.

Допустим, что при построении матрицы многофакторного эксперимента в исследуемом процессе учитываются только два фактора X_1 и X_2. При выборе линейной модели функция имеет вид выражения (2.4):

$$Y(X_1, X_2) = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2 \tag{2.4}$$

где b_0 – значение Y в центре плана;

b_1, b_2 – коэффициенты, характеризующие степень влияния факторов X_1 и X_2 на функцию Y;

$b_{12}X_1X_2$ – учитывает эффект влияния взаимодействия первого и второго факторов на функцию Y;

b_{12} – коэффициент, характеризующий степень совместного влияния двух факторов.

Количество опытов N при многофакторном эксперименте определяется формулой (2.5):

$$N = n^k \tag{2.5}$$

где n – количество уровней;

k – число факторов.

При статистическом методе планирования эксперимента необходимо придерживаться правила, согласно которому *число уровней варьирования должно быть на единицу больше порядка полинома.*

В соответствии с формулой (2.5) для двухуровневого многофакторного эксперимента необходимо провести 2^k опытов. Уровни факторов представляют собой границы исследуемой области по выбранному параметру (минимальное и максимальное значения фактора). Поэтому определить координаты центра плана, то есть основного уровня z_i^0 и интервала варьирования Δz_i не составляет труда, зная максимальное z_i^{max} и минимальное z_i^{min} значения технологического параметра (фактора) по формулам системы уравнений (2.6):

$$\left.\begin{aligned} z_i^0 &= \frac{z_i^{max} + z_i^{min}}{2} \\ \Delta z_i &= \frac{z_i^{max} - z_i^{min}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

где z_i^0 – координата центра плана;
z_i^{max} – максимальное значение технологического фактора;
z_i^{min} – минимальное значение технологического фактора;
Δz_i – интервал (шаг) варьирования;
$i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

При **выборе верхнего и нижнего уровней факторов** *необходимо учитывать ограничения, связанные со свойствами объекта исследования* [4]:

1. *Принципиальные ограничения* (например, если исследуемый фактор температура, то ее нижний предел не может быть ниже абсолютного нуля).

2. *Ограничения, связанные с условиями деградации процесса либо деструкцией изучаемого материала* (параметры процесса после его полного завершения; свойства жидкости после ее испарения, свойства композиции после ее разрушения).

3. *Ограничения, связанные с фазовыми переходами вещества либо составляющих его компонентов* (при достижении веществом температуры плавления; при условиях абляции либо сублимации добавок; а также плавления добавок).

4. *Ограничения, связанные с условиями соблюдения техники безопасности* при изучении данного процесса.

5. *Ограничения, связанные с изменением экологической ситуации* (использование веществ свыше предельно допустимой концентрации; проведение экспериментов, повлекших за собой ухудшение экологической ситуации).

6. *Ограничения, связанные с технико-экономическими соображениями* (дефицитность отдельных элементов, стоимость сырья и т. д.).

На выбор интервала варьирования также накладываются ограничения: *интервал не может быть меньше ошибки, с которой экспериментатор фиксирует уровень фактора, и не может быть настолько большим, что верхний и нижний уровни оказались за пределами области определения.*

В безразмерной системе координат расположение экспериментальных точек в факторном пространстве для полного факторного эксперимента при числе факторов, соответствующим двум, показано на рисунке 2.3.

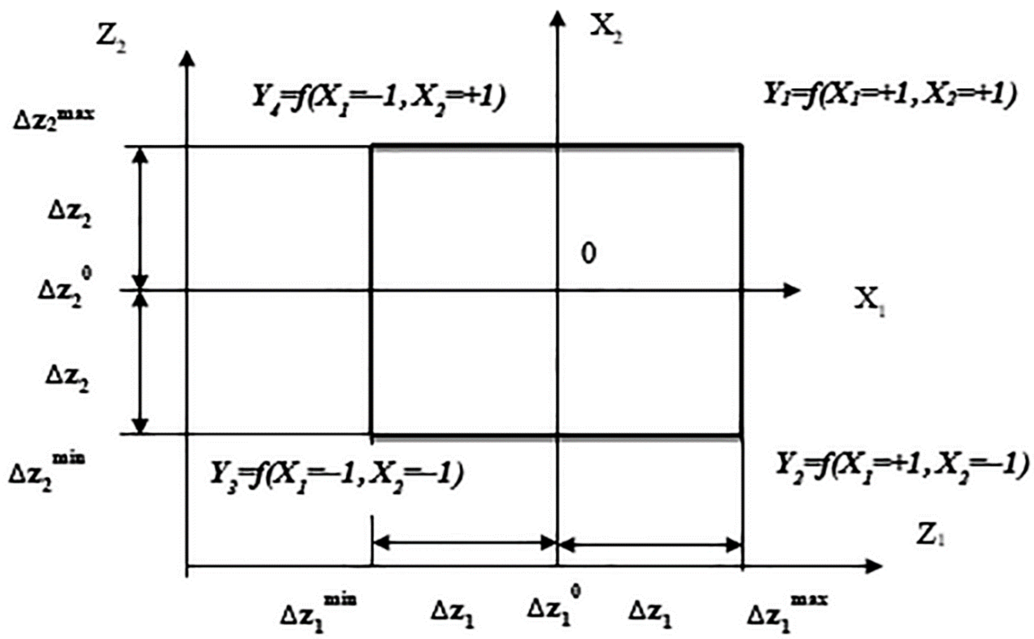


Рисунок 2.3 – Расположение экспериментальных точек для двух независимых факторов, варьируемых на двух уровнях

В соответствии с представленным рисунком, точки плана 2^2 задаются координатами вершин квадрата.

При **построении матрицы планирования многофакторного эксперимента** *для рассматриваемого случая необходимо соблюдать следующие правила [6]:*

1. Первая строка матрицы в столбцах, соответствующих рассматриваемым в эксперименте факторам (X_1 , X_2), заполняется безразмерным символом, соответствующим нижнему уровню значений фактора, то есть символом (–).

2. Продолжение заполнения столбца, соответствующего первому фактору, проводится последовательным чередованием противоположных знаков.

3. Все последующие столбцы, соответствующие другим пронумерованным факторам, заполняются с частотой смены знаков вдвое меньшей, чем для предыдущего столбца.

4. Нумерация факторов выбирается произвольно.

5. Заполнение столбцов, учитывающих взаимодействие факторов, производится как результат перемножения знаков соответствующих факторов в каждой строке.

Порядок столбцов матрицы *следующий:*

1) в первом столбце указывают нумерацию опытов;

2) во втором столбце приводятся значения фиктивной переменной $X_0 = +1$, соответствующей коэффициенту b_0;

3) в последнем столбце заносятся экспериментальные значения Y, полученные в результате проведения каждого эксперимента.

Для проведения независимой оценки коэффициентов полинома *необходимо учитывать, что построенная матрица планирования должна отвечать* **требованиям ортогональности**, *то есть сумма произведений значений коэффициентов, приведенных в каждой строке двух любых столбцов матрицы, равна нулю.*

Оценим матрицу планирования, приведенную в таблице 2.2, на условие ортогональности.

В соответствии с результатами, представленными в таблице 2.3, очевидна независимость столбцов матрицы планирования, что соответствует требованиям ортогональности.

Таблица 2.2 – Матрица планирования многофакторного эксперимента типа 2^2

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Y_i
1	+1	–1	–1	+1	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	Y_3
4	+1	+1	+1	+1	Y_4

Таблица 2.3 – Проверка матрицы планирования многофакторного эксперимента на ортогональность

Номер опыта	X_1	X_2	X_1X_2
1	–1	–1	+1
2	+1	–1	–1
3	–1	+1	–1
4	+1	+1	+1
			$\sum X_1X_2 = 0$

В случае экспериментального исследования технологического процесса тремя факторами и предположения, что модель является линейной, выражение (2.1) имеет следующий вид:

$$Y(X_1, X_2, X_3) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \\ +b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 \quad (2.7)$$

Если число опытов в соответствии с формулой (2.5) будет равно 8, то матрица планирования имеет следующий вид (табл. 2.4).

Таблица 2.4 – Матрица планирования многофакторного эксперимента типа 2^3

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y_i
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	Y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	Y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	Y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8

2.4 Проведение эксперимента

Каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка повторных (или параллельных) опытов не дает полностью совпадающих результатов, потому что всегда существует ошибка опыта (ошибка воспроизводимости). Эту ошибку и нужно оценить по параллельным опытам.

При выполнении эксперимента необходимо свести к минимуму влияние случайных параметров исследуемого процесса, в связи с тем, что функция отклика в каждом опыте носит случайный характер из-за наличия неконтролируемых параметров.

Для **уменьшения влияния неконтролируемых параметров на конечный результат эксперимента** *необходимо соблюдать следующие правила:*

1) проводить не менее трех опытов при одних и тех же условиях, предусмотренных соответствующей строкой матрицы планирования;

2) минимизировать или в лучшем случае компенсировать влияние неконтролируемых параметров.

В этом случае получают усредненные значения функции отклика, соответствующие данным условиям эксперимента по формуле (2.8):

$$< Y_\tau > = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \qquad (2.8)$$

где $< Y_\tau >$ – усредненное значение функции отклика τ-го номера опыта;

τ – номер опыта по порядку, установленному первым столбцом матрицы;

i – номер параллельного опыта в строке;

Y_i – значение функции отклика i-му параллельному опыту в τ-м номере опыта;

n – число параллельных опытов.

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность между Y_i и $< Y_\tau >$. Наличие отклонения свидетельствует об изменчивости, вариации значений повторных опытов.

Для измерения этой изменчивости используют дисперсию. **Дисперсией** *называется среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения.* Дисперсия обозначается s^2 и выражается формулой (2.9):

$$S_\tau^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(Y_{i\tau} - < Y_\tau >\right)^2}{n-1} \qquad (2.9)$$

где n – количество значений функции $Y_{i\tau}$, полученных в результате проведения n параллельных опытов.

Таким образом, для дальнейшего анализа многофакторного эксперимента необходимо в матрицу планирования добавить справа столбцы с вносимыми значениями выборочных дисперсий экспериментальных значений и теоретические значения функции отклика, подсчитанные из предлагаемой модели исследуемого процесса для условий τ-го номера опыта.

2.5 Дробный многофакторный эксперимент

Дробный многофакторный эксперимент *целесообразно применять в тех случаях, когда при большом числе учитываемых факторов на результат исследовательского процесса, взаимодействия факторов (особенно высокого порядка) не влияют на выходной параметр.*

Определим математическую модель технологического процесса при трех учитываемых факторах X_1, X_2, X_3.

В соответствии с формулой (2.5) необходимо провести восемь опытов. Число опытов не должно быть меньше числа коэффициентов полинома. Поэтому математическая модель представляется выражением (2.7). Но если взаимодействие между факторами X_1, X_2, X_3 отсутствует, можно ограничиться четырьмя опытами. В этом случае оправдано составление матрицы планирования для двух факторов X_1 и X_2, заменив в ней обозначение X_1X_2 на X_3 (на верхнем и нижнем уровнях). Чередование знаков в этом столбце соответствует результату перемножения факторов X_1 и X_2, то есть остается неизменным после замены символов в матрице планирования, которая после введения в нее третьего фактора остается ортогональной.

Таким образом, математическая модель упрощается и имеет вид полинома первого порядка, не учитывающего взаимодействия факторов (2.10):

$$Y(X_1, X_2, X_3) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 \tag{2.10}$$

Применение дробного многофакторного эксперимента позволяет сократить количество опытов наполовину и называется **полурепликой от многофакторного эксперимента типа 2^k**. Принято условное обозначение такого плана 2^{k-m}, где m – число взаимодействий замененных факторов, учитываемых в эксперименте.

Составим матрицу планирования многофакторного эксперимента типа 2^{3-1}, заменив $X_1X_2 = X_2$ (табл. 2.5).

Таблица 2.5 – Матрица планирования многофакторного эксперимента типа 2^{3-1}

Номера опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	$Y\tau$
1	+1	–1	–1	+1	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	Y_3
4	+1	+1	+1	+1	Y_4

В соответствии с полиномом (2.10) необходимо при обработке и анализе результатов определить коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3, предполагая, что коэффициенты b_{12}=0; $b_{13} = 0$; $b_{23} = 0$ и b_{123}=0.

Поэтому составление такой матрицы планирования эксперимента возможно лишь в том случае, если полностью отсутствует или пренебрежимо мало влияние на функцию отклика эффектов взаимодействия факторов исследуемого процесса.

При использовании в исследовании процесса дробного многофакторного эксперимента в матрице планирования коэффициентов b_1, b_2, b_3 по экспериментальным значениям функции отклика будут включать значения коэффициентов, учитывающих эффект влияния взаимодействия факторов на функцию отклика.

Поэтому определенные значения коэффициентов полинома (2.10) будут иметь составляющую влияния коэффициентов b_{12}, b_{13}, b_{123}:

$$b_1^{'} = b_1 + b_{23};\ b_2^{'} = b_2 + b_{13};\ b_3^{'} = b_3 + b_{12} \tag{2.11}$$

где b_1, b_2, b_3 – действительные значения полинома;

$b_1^{'}, b_2^{'}, b_3^{'}$ – полученные из эксперимента значения при наличии влияния взаимодействия факторов.

Таким образом, для получения математической модели вида (2.10), адекватной исследуемому процессу, необходимо быть уверенным в отсутствии эффекта влияния взаимодействия факторов на экспериментальное значение функции отклика.

2.6 Центральные композиционные планы

При большом числе учитываемых факторов многофакторный эксперимент становится громоздким и занимает очень большое время для своего проведения. *Оптимизировать число опытов позволяют* **центральные композиционные планы**, *основой которых являются линейные ортогональные планы.*

Преимущество этих планов заключается в том, что если в результате анализа экспериментальных планов не подтверждается гипотеза о линейности математической модели, достаточно добавить несколько дополни-

тельно спланированных точек для получения плана, который будет соответствовать полиному второго порядка. Поэтому ядром центральных композиционных планов являются линейные ортогональные планы.

Рассмотрим применение центральных композиционных планов на примере с тремя независимыми переменными X_1, X_2 и X_3. Для нахождения линейной модели используем многофакторный эксперимент типа 2^3, экспериментальные точки которого находятся в вершинах куба (рис. 2.4) [8].

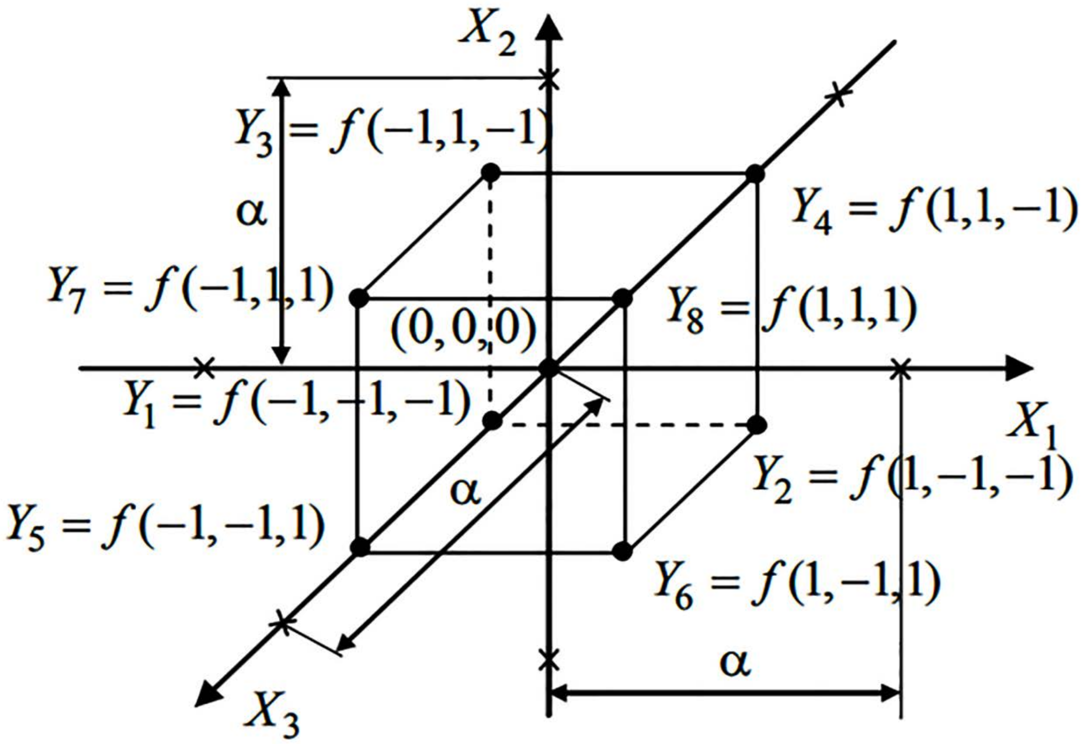


Рисунок 2.4 – Расположение экспериментальных точек в плане, соответствующем полиному второго порядка для трех независимых переменных

В результате анализа экспериментальных данных установлено, что имитационная математическая модель в виде полинома первого порядка неадекватна исследуемому процессу.

Для рассматриваемого случая в центре плана, соответствующего начальному значению всех учитываемых в эксперименте факторов, проводится опыт, условия которого в матрице планирования отображаются нулями для безразмерных величин всех факторов. Для повышения достоверности полученного экспериментального значения Y_0 в центре плана опыт повторяют при неизменных нулевых значениях факторов. Подсчитанное среднее значение $<Y_0>$ сравнивают с теоретическим значением b_0, которое получают из линейной модели процесса в результате ранее проведенного многофакторного эксперимента 2^3 и анализа его результатов.

По разности между b_0 и $<Y_0>$ оценивают «кривизну» поверхности отклика. При подтверждении неадекватности линейной модели ставятся дополнительные опыты для значений факторов, превышающих их абсолютные значения по верхнему и нижнему уровням (в безразмерных величинах). Эти значения должны быть больше единицы по абсолютным значениям, установленным в предыдущем плане многофакторного эксперимента.

Поэтому необходимо к проведенным восьми опытам добавить еще семь (включая опыт в центре плана), шесть из которых соответствуют «звездным» точкам (рис. 2.4).

Звездные точки представляют собой два уровня варьирования каждым из трех факторов, значения которых лежат за пределами граней куба.

В соответствии с рисунком 2.4, дополнительные точки лежат на поверхности сферы радиусом (звездное плечо) $\alpha > \pm 1$ от центра плана.

Таким образом, число опытов при использовании центральных композиционных планов при k факторах составит:

$$N = 2^k + 2k + m_0 \qquad (2.12)$$

где 2^k – число дополнительных точек;
m_0 – число опытов в центре плана.

Учитывая преимущество центральных композиционных планов в теории планирования эксперимента для получения моделей второго порядка наибольшее распространение получили *ортогональный и рототабельный планы.*

2.7 Центральный композиционный ортогональный план

Преимущество **центрального композиционного ортогонального плана** *заключается в проведении только одного опыта, условия которого соответствует начальным значениям всех учитываемых факторов, принимая что* $m_0 = 1$.

Тогда для центрального композиционного ортогонального плана выражение (2.12) имеет следующий вид:

$$N = 2^k + 2k + 1 \tag{2.13}$$

При составлении матрицы планирования для модели исследуемого процесса второго порядка при k=3, включается 15 опытов, тогда как при центральном композиционном плане в соответствии с формулой (2.5) необходимо будет проводить 27 опытов.

При этом следует учитывать, что условие ортогональности матрицы выполняется только для линейных членов соответствующего полинома второго порядка, имеющего следующий вид:

$$\begin{gathered} Y(X_1, X_2, X_3) = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + \\ +b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2\,X_3 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + \ b_{33}X_3^2 \end{gathered} \tag{2.14}$$

Анализ таблицы 2.6 показывает, что условие ортогональности не выполняется для столбцов, соответствующих квадратичным членам полинома (2.7). Очевидно:

$$\sum_{\tau=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} X_{i\tau}X_{i\tau}^2 \neq 0; \ \sum_{\tau=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} X_iX_jX_{i\tau} \neq 0; \ \sum_{\tau=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} X_{i\tau}^2X_{j\tau}^2 \neq 0 \tag{2.15}$$

где $X_{j\tau}^2$ – безразмерное квадратичное значение i-го фактора, соответствующее τ-му опыту.

Таблица 2.6 – Матрица центрального композиционного ортогонального плана [1]

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$Y\tau$
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	+1	+1	+1	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	+1	+1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	Y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	+1	+1	+1	Y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	+1	+1	+1	Y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	+1	+1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
9	+1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	0	0	Y_9
10	+1	$+\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	0	0	Y_{10}
11	+1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	0	Y_{11}
12	+1	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	0	Y_{12}
13	+1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	Y_{13}
14	+1	0	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	0	$+\alpha^2$	Y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y_{15}

Для того, чтобы привести матрицу планирования к ортогональному виду необходимо провести преобразования квадратичных членов $X_{j\tau}^2$ по формуле (2.16):

$$X_{j\tau n}^2 = X_{i\tau}^2 - \langle X_i^2 \rangle = X_{i\tau}^2 - \frac{1}{N}\sum_{\tau}^{N} X_{i\tau}^2 \tag{2.16}$$

где $X_{j\tau n}^2$ – преобразованное безразмерное квадратичное значение i-го фактора, соответствующее τ-му опыту.

Следующим необходимым условием ортогональности матрицы центрального композиционного ортогонального плана является выбор величины звездного плеча α:

$$\left.\begin{array}{r} \text{при } k < 5 \ \rightarrow \ \alpha^4 + 2^k\alpha^2 - \ \alpha^{k-1}(k+0{,}5) = 0, \\ \text{при } k \geq 5 \ \rightarrow \ \alpha^4 + 2^{k-1}\alpha^2 - \ \alpha^{k-2}(k+0{,}5) = 0 \end{array}\right\} \tag{2.17}$$

Расчетные значения звездного плеча в соответствии с формулой (2.17) представлены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 – Значения звездного плеча

k	2	3	4	5	6	7
α	1,000	1,215	1,414	1,547	1,724	1,885

Таким образом, при $k < 5$ ядро центрального композиционного ортогонального плана составляет многофакторный эксперимент типа 2^k, тогда как при $k \geq 5$ целесообразно перейти к дробному многофакторному эксперименту, поскольку полуреплика от многофакторного эксперимента обеспечивает возможность независимой оценки линейных членов полинома (2.14) и членов, учитывающих эффект взаимодействия факторов.

Учитывая формулы (2.16) и (2.17), преобразуем матрицу центрального композиционного ортогонального плана (табл. 2.6) в матрицу, соответствующую условию ортогональности (табл. 2.8).

Таблица 2.8 – Матрица центрального композиционного ортогонального плана, отвечающая требования ортогональности [1]

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	X_1^2	X_2^2	X_3^2	Y_T
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	Y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	Y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	Y_5
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	Y_6
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	Y_8
9	+1	–1,215	–0,15	–0,15	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	Y_9
10	+1	+1,215	+0,15	+0,15	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	Y_{10}
11	+1	0	–1,215	0	0	0	0	0	–0,73	+0,75	–0,73	Y_{11}
12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	0	–0,73	+0,75	–0,73	Y_{12}
13	+1	0	0	–1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	+0,75	Y_{13}
14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	+0,75	Y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	–0,73	–0,73	–0,73	Y_{15}

Однако для матрицы, соответствующей таблице 2.8, необходимо определить коэффициент b'_0 по формуле (2.18):

$$b'_0 = b_0 - \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \langle X_i^2 \rangle \tag{2.18}$$

С учетом условия ортогональности модель имеет вид выражения (2.19):

$$\begin{gathered} Y(X_1, X_2, X_3) = b'_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + b_{12} X_1 X_2 + \\ + b_{13} X_1 X_3 + b_{23} X_2 X_3 + b_{123} X_1 X_2 X_3 + \\ + b_{11}(X_1^2 - \langle X_1^2 \rangle) + b_{22}(X_2^2 - \langle X_2^2 \rangle) + b_{33}(X_3^2 - \langle X_3^2 \rangle) \end{gathered} \tag{2.19}$$

Если выполняется условие (2.16), целесообразно использовать полином второго порядка в общем виде (2.1) для произвольного числа учитываемых факторов.

2.8 Центральный композиционный рототабельный план

Преимущество **центрального композиционного рототабельного плана** *заключается в построении информационной поверхности, приближающейся к сферической, что обусловливает точность значений функции Y.*

Во всех направлениях от центра планирования на одинаковом расстоянии *R* становится практически одинаковой. Это позволяет значительно снизить погрешности в определении функции *Y*, возникающие с неадекватностью представления результатов в виде полинома второго порядка. Достигается это тем, что выбираемые удаленные от центра плана «звездные» точки на осях координат дополняются информацией из центра плана, представляющей собой сферу с нулевым радиусом, то есть информацией равноточной во всех направлениях.

Удельный вес этой информации в общем объеме информации увеличивается за счет увеличения числа опытов (m_0) в центре плана. Ставя несколько экспериментов в центре плана, увеличиваем информацию в центр плана, приближая информационные поверхности к сферам.

В соответствии с числом учитываемых в эксперименте факторов изменяется число опытов в центре плана. Если $k = 3$, следовательно, число опытов в центре плана составляет шесть. Это безусловно приводит к увеличению числа опытов (по сравнению с центральным композиционным ортогональным планом), но обеспечивает непрерывность информационной поверхности и ее идентичность независимо от поворота осей координат.

Следующим преимуществом реализации ротатабельных планов является возможность отказаться от параллельных опытов для оценки воспроизводимости экспериментов, что уменьшит общее число опытов по сравнению с центральным композиционным ортогональным планом. Дисперсия экспериментальных значений функции Y в параллельных опытах может быть оценена в этом случае по экспериментам в центре плана.

Необходимо учитывать, что композиционный план является ротатабельным, тогда и только тогда, когда величина звездного плеча α выбирается из условий (2.20):

$$\left.\begin{aligned} \text{при } k < 5 \ \rightarrow \ \alpha = 2^{\frac{k}{4}}, \\ \text{при } k \geq 5 \ \rightarrow \ \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}} \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Таким образом, при реализации ротатабельных планов можно воспользоваться таблицей 2.9 для выбора значения звездного плеча α и числа центральных опытов m_0 в зависимости от числа учитываемых факторов k.

Для $k=3$ и $m_0 = 6$ число опытов составляет:

$$N = 2^3 + 2 \cdot 3 + 6 = 20$$

В соответствии с формулой (2.20) для реализации ротатабельных планов с тремя учитываемыми факторами количество дополнительных опытов увеличивается на 5 по сравнению с 15 опытами в случае применения центрального композиционного ортогонального плана. Дополнительные пять опытов проводятся в центре плана, то есть для безразмерных значений всех факторов $X_i = 0$.

Таблица 2.9 – Значения звездного плеча и числа центральных опытов от числа учитываемых факторов

k	2	3	4	5	6	7
α	1,41	1,68	2,00	2,00	2,38	2,83
m_0	5	6	7	8	9	14

При построении матрицы центрального композиционного рототабельного плана столбцы, соответствующие взаимодействию линейных факторов, не учитывают, поскольку их произведение будет равно нулю. Следовательно, они не оказывают влияния на оценку значимости соответствующего взаимодействия коэффициента в полиноме (табл. 2.10).

Таблица 2.10 – Матрица центрального композиционного рототабельного плана

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$Y\tau$
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	Y_1
2	+1	+1	–1	–1	+1	+1	+1	Y_2
3	+1	–1	+1	–1	+1	+1	+1	Y_3
4	+1	+1	+1	–1	+1	+1	+1	Y_4
5	+1	–1	–1	+1	+1	+1	+1	Y_5
6	+1	+1	–1	+1	+1	+1	+1	Y_6
7	+1	–1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_7
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
9	+1	$-\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	0	Y_9
10	+1	$+\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	0	Y_{10}
11	+1	0	$-\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	Y_{11}
12	+1	0	$+\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	0	Y_{12}
13	+1	0	0	$-\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	Y_{13}
14	+1	0	0	$+\alpha$	0	0	$+\alpha^2$	Y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	*0*	Y_{15}

3 ОБРАБОТКА И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1 Статистическая проверка гипотез о свойствах эксперимента

Для повышения достоверности полученных результатов исследователю необходимо провести n параллельных экспериментов, исходя из конкретных условий, характера исследуемого объекта и выбранного плана эксперимента. При этом исследователь должен быть уверен в том, что все полученные в n опытах значения Y_{11}, $Y_{12}, \ldots Y_{1n}$ являются результатом случайного рассеяния, а не влияния доминирующего действия какого-либо неконтролируемого и неуправляемого воздействия. Если при проведении эксперимента отсутствует такое доминирующее воздействие, то при возрастании числа параллельных опытов распределение экспериментальных значений функции отклика будет подчиняться закону Гаусса.

Соответствие экспериментального распределения случайной величины предполагаемому теоретическому закону распределения можно оценить с помощью нескольких критериев: Кохрена, Фишера, Стьюдента. Простейшими являются критерии Кохрена и Фишера; более строгим – критерий Стьюдента.

3.2 Критерий Кохрена

Критерий Кохрена применяют только при равном числе повторов каждого эксперимента и если сравниваемое количество выборочных дисперсий больше двух, а также одна из них значительно превышает остальные.

При использовании критерия необходимо провести сравнения полученных дисперсий экспериментальных значений функции отклика в каждой строке матрицы планирования эксперимента и выявить максимальное значение. Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов. При этом подсчитывается дисперсия в каждой горизонтальной строке матрицы по формуле (2.9).

Экспериментальное значение критерия Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий. Для реализации критерия необходимо определить наибольшее значение критерия Кохрена по формуле (3.1):

$$G_{\text{кр}} = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^{n} S_i^2} \tag{3.1}$$

Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения, приведенного в приложении Б. Используя определенные значения коэффициента риска ($\beta = 0{,}1; 0{,}05; 0{,}01$), определяют $G_{\text{кр}}$ в столбце, соответствующем числу параллельных опытов и строке, соответствующей числу номеров опыта.

3.3 Критерий Фишера

С целью проверки гипотезы о равенстве двух дисперсий одной и той же измеряемой величины при Гауссовом законе распределения случайной величины оправдано использовать **критерий Фишера (F-критерий)**.

Для применения критерия Фишера необходимо вычислить F-параметр, который показывает во сколько раз дисперсия S_1^2 случайной величины, имеющей степень свободы γ_1, больше дисперсии S_2^2 случайной величины со степенью свободы γ_2 (при условии $S_1^2 \geq S_2^2$):

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 1 \tag{3.2}$$

Число степеней свободы – это разность между числом экспериментов и числом значений независимых случайных величин, полученных в результате этих экспериментов, которые не позволяют оцениваемой в результате данных экспериментов величине (например, среднему значению) принимать какое-либо другое значение, отличное от полученного по окончании их проведения. В большинстве случаев $\gamma = n - 1$.

Найденное экспериментальное значение F-параметра сравнивается с критическим значением ($F_{кр}$), соответствующим максимальному значению отношения двух дисперсий, при котором еще можно считать гипотезу о равенстве рассматриваемых дисперсий справедливой.

По заданному коэффициенту риска ($\beta = 1 - \alpha$) и числу степеней свободы (по таблице приложения В) устанавливают критическое значение ($F_{кр}$). Значение числа степеней свободы γ_1 дисперсии определяет критическое значение по столбцу, значение γ_2 – по строке. *Гипотеза о равенстве выборочных дисперсий справедлива при условии $F \leq F_{кр}$. В противном случае рассматриваемые дисперсии относятся к различным генеральным совокупностям исследуемой величины.*

Пример. Разберем использование критерия Фишера для результатов двух серий измерений расхода топлива автомобиля КАМАЗ грузоподъемностью 7 тонн, во время движения на скорости 80 км/ч в теплый период (табл. 3.1).

Таблица 3.1 – Результаты измерений расхода топлива *G*

В литрах на 100 километров пробега

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Первая серия опытов	30,3	31,0	29,1	31,7	29,2	31,2	29,4	29,6	30,0	29,9
Вторая серия опытов	30,5	29,4	29,6	30,0	29,9	30,3	31,0	29,4	31,3	29,8

Среднее арифметическое значение расхода топлива в первой серии опытов составит $\langle G_1 \rangle = 30{,}14$ л/100 км; дисперсия случайной величины S_1^2=0,800 ($\gamma_1 = 9$).

Среднее арифметическое значение расхода топлива во второй серии опытов составит $\langle G_2 \rangle = 30{,}12$ л/100 км; дисперсия случайной величины S_2^2=0,424 ($\gamma_2 = 9$).

Тогда в соответствии с формулой (3.2) экспериментальное значение F-параметра равно:

$$F = \frac{0{,}800}{0{,}424} = 1{,}88 \geq 1$$

Пользуясь таблицей приложения В определяется критическое значение ($F_{\text{кр}}$). Для рассматриваемого примера при коэффициенте риска $\beta = 0{,}05$ критическое значение составит 3,18. Следовательно, $F \leq F_{\text{кр}}$ (1,88 <3,18) и дисперсии равнозначны.

3.4 Критерий Стьюдента

При выполнении серии экспериментов одной и той же величины возникает необходимость провести сравнение их среднеарифметических значений с целью определения достоверности измерений. **Критерий Стьюдента** *позволяет объективно проверить гипотезу о равенстве двух выборочных среднеарифметических значений.*

По формулам (3.4) и (3.5) определяем значения первой и второй серии опытов:

$$S_1^2(X_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_{1i} - < X_1 >\right)^2}{n_1 - 1}, \tag{3.3}$$

$$S_2^2(X_2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_{2i} - < X_2 >\right)^2}{n_2 - 1} \tag{3.4}$$

Величину стандартного отклонения разности ($< X_1 > - < X_2 >$) определяем по выражению (3.5):

$$S(<X>) = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2(X_1)+(n_2-1)S_2^2(X_2)}{(n_1-1)+(n_2-1)}} \qquad (3.5)$$

Таким образом, для оценки доверительного интервала необходимо определить коэффициент Стьюдента по формуле (3.6):

$$t = \frac{<X_1> - <X_2>}{S(<X>)}\sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1+n_2}} \qquad (3.6)$$

Пример. Применим критерий Стьюдента для результатов двух серий измерений расхода топлива автомобиля КАМАЗ грузоподъемностью 7 тонн, во время движения на скорости 80 км/ч в теплый период (табл. 3.2).

Таблица 3.2 – Результаты измерений расхода топлива *G*

В литрах на 100 километров пробега

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Первая серия опытов	30,3	31,0	29,1	31,7	29,2	31,2	29,4	29,6	30,0	29,9
Вторая серия опытов	30,5	29,4	29,6	30,0	29,9	30,3	31,0	–	–	–

Для первой серии опытов при n_1=10: $\langle G_1 \rangle = 30{,}14$ л/100 км; дисперсия случайной величины S_1^2=0,800.

Для второй серии опытов при n_2=7: $\langle G_2 \rangle = 30{,}1$ л/100 км; дисперсия случайной величины S_2^2=0,3.

Используя формулу (3.5), определяем величину стандартного отклонения разности:

$$S(<X>) = \sqrt{\frac{9 \cdot 0{,}800 + 6 \cdot 0{,}3}{9+6}} = 0{,}775$$

Коэффициент Стьюдента вычисляем по формуле (3.6):

$$t = \frac{30{,}14 - 30{,}1}{0{,}775}\sqrt{\frac{10 \cdot 7}{10+7}} = 0{,}106.$$

Пользуясь таблицей приложения А, вычисленное значение t сравниваем с табличным значением коэффициента для заданной надежности P. Табличное значение числа серии опытов определяется:

$$n = n_1 + n_2 - 1$$

$$n = 10 + 7 - 1 = 16$$

Поэтому при P равном 0,75, табличное значение коэффициента Стьюдента составит 0,69.

Расчеты показали, что $t < t_{P,n}$ или $0{,}106 < 0{,}69$, следовательно, результаты двух серий измерений практически совпадают; в противном случае результаты измерений нельзя считать равнозначными.

С целью определения значимости коэффициентов полинома применяется критерий Стьюдента. После вычисления коэффициентов имитационной модели, представленной в виде линейного полинома, оценивается их значимость для определения степени влияния различных факторов на выходной параметр. Основой оценки значимости коэффициентов является сопоставление абсолютного значения коэффициента b_i и дисперсии ошибки его определения $S^2(b_i)$.

При помощи критерия Стьюдента проверяется гипотеза о незначимости рассматриваемого коэффициента, то есть гипотеза о том, что $b_i = 0$ (проверка нуль-гипотеза). При подсчете экспериментального значения t-параметра в числитель ставится абсолютное значение рассматриваемого коэффициента, а в знаменатель – дисперсия ошибки его определения:

$$t_i = \frac{b_i}{\sqrt{S^2(b_i)}} \tag{3.7}$$

При ортогональном планировании эксперимента дисперсии ошибок каждого из коэффициентов равны между собой, следовательно:

$$S^2(b) = \frac{S^2(Y)}{n \cdot N} \tag{3.8}$$

где N – число номеров опытов, определяемых в соответствии с матрицей планирования условий проведения эксперимента;

n – число параллельных опытов для каждого номера опыта.

Дисперсию воспроизводимости определяют по формуле (3.9):

$$S^2(Y) = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{S_\tau^2}{N} \tag{3.9}$$

Коэффициент b_i признается незначительным, если коэффициент Стьюдента $t < t_{P,n}$ для числа степеней свободы $n \cdot N$ (приложение А).

3.5 Порядок статистической обработки и анализ результатов полного факторного эксперимента

Проведем статистическую обработку и проанализируем результаты полного многофакторного эксперимента. **Обработка и анализ результатов производится в следующем порядке:**

1. Оцениваются дисперсии среднего арифметического в каждой строке матрицы по формуле (3.10):

$$S_\tau^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\tau=1}^{n} (Y_{\tau n} - < Y_\tau >)^2 \tag{3.10}$$

2. Проверяются однородности дисперсий.

Так как даже одна грубая ошибка может исказить результаты исследования, проведенного при небольшом числе экспериментов, необходим контроль воспроизводимости результатов исследования, который осуществляется с помощью критерия Кохрена.

Если проверка показала, что эксперименты воспроизводимы, то их результаты можно использовать для оценки коэффициентов регрессии; если же эксперименты невоспроизводимы, то неконтролируемые и неуправляемые факторы создают на выходе слишком большой уровень «шума». В этом случае необходимо проверять следующие точки. Поэтому определяются все точки, в которых эксперимент не воспроизводится.

3. Подбирается математическая модель технологического процесса с проверкой статистической значимостью коэффициентов полинома с использованием формулы (3.11):

$$b_i = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{X_{\tau i} < Y_\tau >}{N} \tag{3.11}$$

где $X_{\tau i}$ принимает значение единицы или минус единицы в соответствии с матрицей планирования.

Значимость коэффициентов для определения степени влияния различных факторов на выходной параметр оценивается по критерию Стьюдента. Коэффициент является значимый при выполнении условия: $t < t_{P,n}$.

4. Проверяется адекватность математической модели, которая заключается в достаточно объективном описании свойств исследуемого объекта. Поэтому некоторой подобласти, в которую входят и координаты выполненных опытов, предсказанное с помощью модели значение отклика не должно отличаться от фактического более чем на некоторую заранее заданную величину.

Для проверки адекватности достаточно оценить отклонение предсказанного имитационной моделью значения выходного параметра $Y_{\tau i}$ от результатов эксперимента $< Y_\tau >$ в точке X_τ факторного пространства. Для этой цели определяем дисперсию адекватности математической модели, применяя формулу (3.12):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{N-d} \sum_{\tau=1}^{N} (< Y_\tau > - Y_{\tau i})^2 \tag{3.12}$$

где d – число членов аппроксимирующего полинома.

Математическая модель является адекватна при условии, если дисперсия $S_{\text{ад}}^2 \leq S^2(Y)$.

В противном случае проверка гипотезы об адекватности проводится с помощью критерия Фишера при степени свободы ($\gamma_{\text{ад}} = N - d$; $\gamma = N(n-1)$) и с использованием формулы (3.13):

$$F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_Y^2} \tag{3.13}$$

Математическая модель является адекватной, если $F \leq F_{\text{кр}}$. **Если полученная модель адекватна, то возможны следующие ситуации:**

1. Все линейные коэффициенты значимы. Полученную модель можно использовать для управления процессом и оптимизации его путем движения в направлении к экстремуму.

2. Один из коэффициентов резко выделяется по абсолютной величине. В этом случае движение по градиенту функции выродится в обычный однофакторный эксперимент. Поэтому следует повторить эксперимент, уменьшив интервал варьирования этого фактора или увеличив его для других факторов.

3. Некоторые из линейных коэффициентов незначимы. Ими можно пренебречь, если соответствующие факторы действительно не оказывают влияния на выходной параметр. Если в этом уверенности нет, то необходимо поставить новую серию опытов, расширив интервалы варьирования у соответствующих факторов.

4. Некоторые или все линейные коэффициенты незначимы, но значимы коэффициенты взаимодействия b_{ij}. Такое положение может возникнуть из-за неудачного выбора интервалов варьирования, поэтому нужно поставить новую серию опытов, увеличив интервалы варьирования у соответствующих факторов. Причиной подобной ситуации может быть и то, что эксперимент ставился в области, в которой линейное приближение является неудачной моделью поверхности отклика. В этом случае переходят к нахождению математической модели более высокого порядка.

3.6 Обработка и анализ результатов центрального композиционного ортогонального плана

Обработка и анализ результатов центрального композиционного ортогонального плана проводится аналогично обработке и анализу полного факторного эксперимента по формулам для оценки дисперсий среднеарифметического (3.10) и адекватности математической модели (3.12). Однако при расчете статистической значимости коэффициентов полинома формулы (3.11) и (3.8) неприменимы.

Учитывая ортогональность матрицы центрального композиционного ортогонального плана, все коэффициенты имитационной модели в виде полинома второго порядка определяются, как и для полного факторного эксперимента, независимо друг от друга. **Расчет коэффициентов полинома** выполняется по формуле (3.14):

$$b_i = \frac{\sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau} Y_\tau}{\sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}^2} \tag{3.14}$$

где $i = 1, \dots, k$.

Это означает, что при определении коэффициентов полинома по формуле (3.14), значение знаменателя для различных групп коэффициентов будет различным. Для непреобразованной матрицы в соответствии с таблицей 2.5 для b_0 знаменатель формулы (3.14) определяется:

$$\sum_{\tau=1}^{15} X_{i0\tau}^2 = 15$$

Для группы коэффициентов при линейных членах X_i полинома соответственно:

$$\sum_{\tau=1}^{15} X_{i\tau}^2 = 8 + 2\alpha^2$$

Для группы коэффициентов X_iX_j или X_1, X_2, X_3, учитывающих взаимодействие факторов:

$$\sum_{\tau=1}^{15} \left(X_iX_j\right)_\tau^2 = 8$$

Для коэффициентов при квадратичных членах X_i^2 полинома:

$$\sum_{\tau=1}^{15} (X_i)_\tau^2 = 8 + 2\alpha^4$$

Расчет дисперсии воспроизводимости эксперимента $S^2(Y)$ при оценке дисперсий коэффициентов полинома определяется также по формуле (3.9). *Однако в центральном композиционном ортогональном плане дисперсия будет различной для их различных групп, в то время как для линейной модели она постоянна.*

Для непреобразованной матрицы оценку дисперсии для всех групп коэффициентов легко получить, учитывая приведенные выше значения знаменателя в формуле (3.14). Для приведенной матрицы центрального композиционного ортогонального плана (табл. 2.6) оценка дисперсии различных коэффициентов в общем виде может быть представлена выражением (3.15):

$$S^2(b_0) = \frac{S^2(Y)}{n \cdot N} \tag{3.15}$$

При $k < 5$, дисперсия центрального композиционного ортогонального плана, базирующегося на полном факторном эксперименте 2^k, определяется по выражениям (3.16), (3.17), (3.18):

$$S^2(b_i) = \frac{S^2(Y)}{n(2^k + 2\alpha^2)}, \tag{3.16}$$

$$S^2\left(b_{ij}\right) = \frac{S^2(Y)}{n \cdot 2^k}, \tag{3.17}$$

$$S^2(b_{ii}) = \frac{S^2(Y)}{n[2^k(1 - < X_i >^2)^2 + 2(\alpha^2 - < X_i >^2)^2 + < X_i >^4]}, \tag{3.18}$$

$$\text{где } < X_i >^2 = \frac{1}{N}\sum_{\tau=1}^{N} X_\tau^2 \tag{3.19}$$

Значение коэффициента Стьюдента, рассчитанное по формуле (3.7) в соответствии с формулами (3.16)–(3.18), будет отличаться знаменателем для различных групп коэффициентов полинома. А это означает, что в отличие от линейного приближения, при ортогональном планировании на базе полинома второго порядка оценка значимости найденных коэффициентов полинома будет проводиться с различной точностью и изменяться при повороте координат.

Изменение дисперсии ошибок определения коэффициентов полинома при повороте координат приводит к тому, что в центральном композиционном ортогональном плане точность предсказания выходной величины (значения функции отклика) в различных направлениях факторного пространства различна. Это означает, что точность определения математической модели исследуемого процесса (ее конкретный вид зависит от точности определения коэффициентов полинома) во всех направлениях факторного пространства неодинакова. Различие в точности оценок коэффициентов полинома при описании областей, близких к экстремуму, особенно нежелательно, так как исследователю при планировании экстремальных экспериментов необходимо иметь высокую точность описания процесса именно в этих областях. В этом случае более удачным является центральный композиционный ортогональный план, который позволяет обеспечить практически одинаковую точность определения функции отклика Y во всех направлениях факторного пространства на одинаковом расстоянии R от центра планирования.

3.7 Обработка и анализ результатов центрального композиционного рототабельного плана

Обработка и анализ результатов центрального композиционного рототабельного плана *будут отличаться от ранее рассмотренных в подразделе 3.6 только в подсчете коэффициентов полинома и их дисперсий.*

При реализации рототабельных планов с целью уменьшения общего числа проводимых опытов обычно не проводят параллельных опытов для оценки воспроизводимости экспериментов. Дисперсию воспроизводимости в этом случае оценивают по экспериментам в центре плана, число которых значительно больше, чем в ортогональном плане.

Формулы для расчета коэффициентов полинома (3.20)–(3.23) и их дисперсий (3.24)–(3.27) в данном случае значительно сложнее, чем при ортогональном планировании [8]:

$$b_0 = \frac{A}{N}\left[2\lambda^2\left(k + 2(0y) - 2\lambda c\sum_{i=1}^{k}(ii)\right)\right], \tag{3.20}$$

$$b_i = \frac{c}{N}(iy), \tag{3.21}$$

$$b_{ij} = \frac{c^2}{N\lambda}(ij), \tag{3.22}$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N}\left[c^2\big((k+2)\lambda - k\big)(ij) + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}(ii) - 2\lambda c(0y)\right], \tag{3.23}$$

$$S^2(b_0) = \frac{2A\lambda^2(k+2)S^2(Y)}{N\cdot n}, \tag{3.24}$$

$$S^2(b_i) = \frac{cS^2(Y)}{N\cdot n}, \tag{3.25}$$

$$S^2(b_{ii}) = \frac{A[(k+1)\lambda - (k-1)]c^2S^2(Y)}{N\cdot n}, \tag{3.26}$$

$$S^2\big(b_{ij}\big) = \frac{c^2S^2(Y)}{\lambda N\cdot n} \tag{3.27}$$

В формулах (3.20)–(3.27) приняты следующие значения:

$$c = N \Big/ \sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}^2\,; A = 1/2\lambda[(k+2)\lambda - k]\,;$$

$$\lambda = kN/(k+2)n_1\,;\; n_1 = N - m_0;$$

$$(0y) = \sum_{\tau=1}^{N} X_{0\tau}Y_\tau; (ii) = \sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}^2 Y_\tau;$$

$$(iy) = \sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}Y_\tau;\; (ij) = \sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}X_{j\tau}Y_\tau.$$

Таким образом, обработка результатов при реализации центральных композиционных планов предполагает статистические проверки гипотез воспроизводимости результатов экспериментов, значимости коэффициентов и адекватности моделей.

В заключение рассмотрения центрального композиционного рототабельного плана следует отметить, что несмотря на то, что его матрица является не ортогональной, она позволяет минимизировать ошибки в определении Y, связанные с неадекватностью представления результатов исследования полиномом второго порядка. Полученная модель второго порядка может быть использована для нахождения оптимальных технологических режимов.

.

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ»

Выполнение лабораторной работы предполагает **следующую последовательность действий:**

1. Установить факторы, влияющие на исследуемый объект.

2. Выявить и обосновать постоянные и переменные факторы исследуемого процесса.

3. Обосновать уровни варьирования переменных факторов.

4. Выбрать выходной (выходные) параметр (параметры) процесса.

5. Построить методическую сетку проведения эксперимента.

6. Выбрать план эксперимента и провести кодирование факторов.

7. Провести эксперимент и свести первичные результаты опытов в табличном виде.

8. Статистически обработать полученные экспериментальные данные.

9. Вывести уравнение регрессии и проверить его адекватность.

10. Проанализировать результаты эксперимента:

1) выявить степень влияния выбранных переменных факторов на выходную (выходные) величину (величины);

2) получить уравнение регрессии в натуральном обозначении факторов (виде);

3) построить графики зависимостей выходного (выходных) фактора (факторов) от переменных величин.

С целью автоматизации вычислений, связанных с обработкой экспериментальных данных, возможно применение приложения Microsoft Excel, которое предлагает широкий спектр возможностей по статистической обработке и графической визуализации полученных результатов.

Цель работы: *изучение планирования и возможностей реализации полного факторного эксперимента для многофакторных моделей.*

Пример. *Проведите исследование влияния различных факторов на использование машинно-тракторного агрегата на бороновании.*

Задача. *Установите зависимость глубины обработки почвы (h) от скорости движения (V), угла подъема (β), ширины захвата дисковой бороны (с).*

На основе экспериментальных исследований и проверки факторов на значимость по методике отсеивающего эксперимента в качестве независимых факторов определены:

X_1 (V) – скорость движения, км/час;

X_2 (c)– ширина захвата дисковой бороны, м;

X_3 (β) – угол подъема, град.

Порядок выполнения работы:

1. Определите пределы варьирования факторов.

Вводим обозначение факторов буквенными символами. При этом данные таблицы 1 указывают:

Таблица 1 – Исходные данные эксперимента

Номер опыта	Скорость движения, км/час	Ширина захвата дисковой бороны, м	Угол подъема, град.	Глубина обработки почвы, см		
1	10	2,6	30	11,2	11,1	10,8
2	11	3,2	26	14,7	14,5	14,6
3	9	3,0	25	16,2	16,1	16,0
4	6	4,0	6	10,6	10,4	10,5
5	7	4,6	10	11,3	11,2	11,3
6	5	5,2	12	12,4	12,3	12,2
7	7	6,0	8	14,3	14,2	14,1
8	3	2,6	9	10,4	10,3	10,2
9	8	4,0	12	11,1	11,3	11,2
10	9	5,2	5	14,6	14,5	14,7
11	4	3,0	6	10,3	10,2	10,4
12	9	3,0	25	11,2	11,1	10,8

для скорости движения: максимальное значение $V_{max} = 11$ км/ч; минимальное значение $V_{min} = 3$ км/ч, поэтому пределы варьирования 11–3 км/ч;

для ширины захвата дисковой бороны: максимальное значение $c_{max} = 5{,}2$ м; минимальное значение $c_{min} = 2{,}6$ м; пределы варьирования – 5,2–2,6 м;

для угла подъема максимальное значение $\beta_{max} = 30$ град.; минимальное значение $\beta_{min} = 5$ град.; пределы варьирования – 30–5 град.

2. Составьте обобщенную формулу зависимости в соответствии с формулой (2.19).

С учетом условия ортогональности модель имеет вид:

$$\begin{gathered} Y(X_1, X_2, X_3) = b_0' + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + \\ + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 + b_{123}X_1X_2X_3 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2 + b_{33}X_3^2 \end{gathered} \quad (1)$$

3. Проверьте все факторы на значимость по методике отсеивающего эксперимента (подраздел 2.2).

Получим три значимых фактора.

4. Определите пределы изменений факторов и занесите результаты в таблицу 2.

Таблица 2 – Вводимые обозначения, факторы и уровни их варьирования

Факторы	***V*, км/час**	***c*, м**	**β, град.**	***h*, см**
Обозначение	X_1	X_2	X_3	Y
Верхний уровень (+1)	11	6,0	30	16
Основной уровень (0)	7	4,3	17,5	13
Нижний уровень (–1)	3	2,6	5	10

Нижнему пределу присваиваем значение минус единицы, среднему – нуля, верхнему – единицы.

5. Составьте матрицу (табл. 2.8) проведения центрального композиционного ортогонального плана, отвечающую требованию ортогональности.

Результат составления матрицы приведен в таблице 3.

Таблица 3 – Матрица проведения центрального композиционного ортогонального плана, отвечающая требования ортогональности

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	$X_1^2 - \langle X_1^2 \rangle$	$(X_2^2 - \langle X_2^2 \rangle$	$(X_3^2 - \langle X_3^2 \rangle$	Y_1	Y_2	Y_3
1	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	11,2	11,1	10,8
2	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	14,7	14,5	14,6
3	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	16,2	16,1	16,0
4	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	10,6	10,4	10,5
5	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	0,27	0,27	0,27	11,3	11,2	11,3
6	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	12,4	12,3	12,2
7	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	–1	0,27	0,27	0,27	14,3	14,2	14,1
8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,27	0,27	0,27	10,4	10,3	10,2
9	+1	–1,215	–0,15	–0,15	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	11,1	11,3	11,2
10	+1	+1,215	+0,15	+0,15	0	0	0	0	0,75	–0,73	–0,73	14,6	14,5	14,7
11	+1	0	–1,215	0	0	0	0	0	–0,73	+0,75	–0,73	10,3	10,2	10,4
12	+1	0	+1,215	0	0	0	0	0	–0,73	+0,75	–0,73	11,2	11,1	10,8
13	+1	0	0	–1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	+0,75	14,7	14,5	14,6
14	+1	0	0	+1,215	0	0	0	0	–0,73	–0,73	+0,75	16,2	16,1	16,0
15	+1	0	0	0	0	0	0	0	–0,73	–0,73	–0,73	10,6	10,4	10,5

6. Произведите оценку дисперсии среднего арифметического в каждой строке матрицы по формуле (2):

$$S_\tau^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{\tau=1}^{n}(Y_{\tau n} - \langle Y_\tau \rangle)^2 \tag{2}$$

Использование статистической функции ДИСП табличного процессора Microsoft Excel позволяет определить выборочную дисперсию для диапазона или массива ячеек (рис. 1).

№оп.	x_0	x_1	x_2	x_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	y_1	y_2	y_3	$\langle Y_\tau \rangle$	S_τ^2
1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,04333
2	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	14,7	14,5	14,6	14,60000	0,01000
3	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	16,2	16,1	16,0	16,10000	0,01000
4	1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	10,6	10,4	10,5	10,50000	0,01000
5	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	11,3	11,2	11,3	11,26667	0,00333
6	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	12,4	12,3	12,2	12,30000	0,01000
7	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	14,3	14,2	14,1	14,20000	0,01000
8	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	10,4	10,3	10,2	10,30000	0,01000
9	1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	11,1	11,3	11,2	11,20000	0,01000
10	1	1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	14,6	14,5	14,7	14,60000	0,01000
11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	10,3	10,2	10,4	10,30000	0,01000
12	1	0	1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,04333
13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	14,7	14,5	14,6	14,60000	0,01000
14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	16,2	16,1	16,0	16,10000	0,01000
15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	10,6	10,4	10,5	10,50000	0,01000

Рисунок 1 – Определение дисперсии среднего арифметического глубины обработки почвы

7. Выполните контроль воспроизводимости результатов исследования с помощью критерия Кохрена.

Экспериментальное значение критерия Кохрена представляет отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий:

$$G_{\text{кр}} = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^{N} S_i^2} \tag{3}$$

Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения, то есть $G \leq G_{\text{кр}}$ (приложение Б).

Примем коэффициент риска $\beta = 0{,}1$ и определим $G_{\text{кр}}$ в столбце, соответствующем числу параллельных опытов, и строке, соответствующей числу номеров опыта. Расчеты проведем в Microsoft Excel (рис. 2).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	X 1	X 2	X 3	X 1 X 2	X 1 X3	X 2X3	X 1X 2X3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	Y_1	Y_2	Y_3	$< Y_\tau >$	S_τ^2
2	–1	–1	–1	1	1	1	–1	0,27	0,27	0,27	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,043333
3	1	–1	–1	–1	–1	1	1	0,27	0,27	0,27	14,7	14,5	14,6	14,6	0,01
4	–1	1	–1	–1	1	–1	1	0,27	0,27	0,27	16,2	16,1	16	16,1	0,01
5	1	1	–1	1	–1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	10,6	10,4	10,5	10,5	0,01
6	–1	–1	1	1	–1	–1	1	0,27	0,27	0,27	11,3	11,2	11,3	11,26667	0,003333
7	1	–1	1	–1	1	–1	–1	0,27	0,27	0,27	12,4	12,3	12,2	12,3	0,01
8	–1	1	1	–1	–1	1	–1	0,27	0,27	0,27	14,3	14,2	14,1	14,2	0,01
9	1	1	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	10,4	10,3	10,2	10,3	0,01
10	–1,215	–0,15	–0,15	0	0	0	0	0,75	– 0,73	– 0,73	11,1	11,3	11,2	11,2	0,01
11	1,215	0,15	0,15	0	0	0	0	0,75	– 0,73	– 0,73	14,6	14,5	14,7	14,6	0,01
12	0	–1,215	0	0	0	0	0	– 0,73	0,75	– 0,73	10,3	10,2	10,4	10,3	0,01
13	0	1,215	0	0	0	0	0	– 0,73	0,75	– 0,73	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,043333
14	0	0	–1,215	0	0	0	0	– 0,73	– 0,73	0,75	14,7	14,5	14,6	14,6	0,01
15	0	0	1,215	0	0	0	0	– 0,73	– 0,73	0,75	16,2	16,1	16	16,1	0,01
16	0	0	0	0	0	0	0	– 0,73	– 0,73	– 0,73	10,6	10,4	10,5	10,5	0,01
17														$\sum S_j^2$	*0,21*
18														$S_{j\ max}^2$	0,043333
19														*G*	0,206349
20														*n-1*	2
21														*N*	15
22														$G_{кр}$	0,3346
23														$G – G_{кр}$	-0,12825
24														*Вывод*	дисп.
25														$(G < G_{кр})$	однор.

Рисунок 2 – Проверка воспроизводимости результатов исследования с помощью критерия Кохрена

8. Рассчитайте коэффициенты полинома, используя формулы (4), (5):

$$b_i = \frac{\sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau} Y_\tau}{\sum_{\tau=1}^{N} X_{i\tau}^2}, \tag{4}$$

$$b_0' = b_0 - \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \langle X_i^2 \rangle \tag{5}$$

где $X_{\tau i}$ принимает значения единицы или минус единицы в соответствии с матрицей планирования.

Расчет коэффициентов полинома показан на рисунке 3.

9. Установите значимость коэффициентов для определения степени влияния различных факторов на выходной параметр, используя критерий Стьюдента. Коэффициент является значимым при выполнении условия:

$$\mathrm{t} < \mathrm{t}_{\mathrm{P,n}}$$

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
4		№оп.	x_0	x_1	x_2	x_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$
5		1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1
6		2	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1
7		3	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1
8		4	1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1
9		5	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1
10		6	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1
11		7	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1
12		8	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1
13		9	1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0
14		10	1	1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0
15		11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0
16		12	1	0	1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0
17		13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0
18		14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0
19		15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0
20		∑xi*ycp	188,6	8,3	-1,0	6,7	0,7	-5,9	7,9	0,0	-0,8	-14,1
21		∑xi^2	15	11,0	11,0	11,0	4,4	4,4	4,4	8	8	8
22		bi	12,40	0,76	-0,09	0,61	0,16	-1,35	1,82	0,00	-0,10	-1,76

Рисунок 3 – Расчет коэффициентов полинома

При подсчете экспериментального значения t-параметра в числитель ставится абсолютное значение рассматриваемого коэффициента, а в знаменатель подставляется дисперсия ошибки его определения (6):

$$t_i = \frac{b_i}{\sqrt{S^2(b_i)}} \tag{6}$$

При ортогональном планировании эксперимента дисперсии ошибок каждого из коэффициентов равны между собой, следовательно:

$$S^2(b) = \frac{S^2(Y)}{n \cdot N} \tag{7}$$

где N – число номеров опытов, определяющих в соответствии с матрицей планирования условия проведения эксперимента;

n – число параллельных опытов для каждого номера опыта.

Дисперсию воспроизводимости определяют по формуле (8):

$$S^2(Y) = \sum_{\tau=1}^{N} \frac{S_\tau^2}{N} \tag{8}$$

Коэффициент b_i признается незначительным, если коэффициент Стьюдента $t < t_{P,n}$ для числа степеней свободы $n \cdot N$ (приложение А) (рис. 4, табл. 1).

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
2																		
3																		
4			№оп.	x_0	x_1	x_2	x_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	y_1	y_2	y_3	$\langle Y_\tau \rangle$	S_τ^2
5			1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,04333
6			2	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	14,7	14,5	14,6	14,60000	0,01000
7			3	1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	16,2	16,1	16,0	16,10000	0,01000
8			4	1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	10,6	10,4	10,5	10,50000	0,01000
9			5	1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	-1	1	11,3	11,2	11,3	11,26667	0,00333
10			6	1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	1	-1	12,4	12,3	12,2	12,30000	0,01000
11			7	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	-1	-1	14,3	14,2	14,1	14,20000	0,01000
12			8	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	1	1	1	10,4	10,3	10,2	10,30000	0,01000
13			9	1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	11,1	11,3	11,2	11,20000	0,01000
14			10	1	1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	0	0	14,6	14,5	14,7	14,60000	0,01000
15			11	1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	10,3	10,2	10,4	10,30000	0,01000
16			12	1	0	1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	0	0	11,2	11,1	10,8	11,03333	0,04333
17			13	1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	14,7	14,5	14,6	14,60000	0,01000
18			14	1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	0	0	16,2	16,1	16,0	16,10000	0,01000
19			15	1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	10,6	10,4	10,5	10,50000	0,01000
20			∑xi*yср	188,6	8,3	-1,0	6,7	0,7	-5,9	7,9	0,0	-0,8	-14,1				$\sum S_j^2$	0,21000
21			∑xi^2	15	11,0	11,0	11,0	4,4	4,4	4,4	8	8	8				$S_j^2{}_{max}$	0,04333
22			bi	12,40	0,76	-0,09	0,61	0,16	-1,35	1,82	0,00	-0,10	-1,76				G	0,20635
23																	$n-1$	2,00000
24	S_y^2	0,0	$S^2\{b_i\}$	0,004	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001				N	15,00000
25	γ	0,95	$S\{b_i\}$	0,06	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02				$G_{кр}$	0,33460
26	f_1	30	t_i	203,0	36,7	4,5	29,7	4,8	41,4	55,5	0,2	4,3	73,0				$G-G_{кр}$	-0,12825
27	t_T	2,04	$t_i-t_{кр}$	200,9	34,7	2,42	27,70	2,76	39,38	53,5	-1,9	2,3	70,93				*Вывод*	дисп.

Рисунок 4 – Проверка значимости коэффициентов регрессии по факторной обработке показателя глубины обработки почвы

Таблица 4 – Проверка значимости коэффициентов регрессии по факторной обработке показателя глубины обработки почвы (*Y*)

Коэффициенты регрессии	Проверка коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента				
	численное значение	$S^2(b_i)$	$t_{P,n}$	табличное значение коэффициента Стьюдента	проверка значимости
b_0	12,40	0,0611	202,952	2,0400	значимый
b_1	0,76	0,0206	36,7026	2,0400	значимый
b_2	–0,09	0,0206	4,4631	2,0400	значимый
b_3	0,61	0,0206	29,7353	2,0400	значимый
b_{12}	0,00	0,0242	0,1725	2,0400	незначимый
b_{13}	–0,10	0,0242	4,3129	2,0400	значимый
b_{23}	–1,76	0,0242	72,9744	2,0400	значимый
b_{123}	2,633	0,0242	102,0	2,0400	значимый
b_{11}	0,16	0,0327	4,7964	2,0400	значимый
b_{22}	–1,35	0,0327	41,4225	2,0400	значимый
b_{33}	1,82	0,0327	55,4992	2,0400	значимый

10. Запишите уравнение регрессии в кодированном виде в соответствии с формулой (1).

Уравнение регрессии в кодированном виде приобретет следующий вид:

$$h = 12{,}40 + 0{,}76X_1 - 0{,}09X_2 + 0{,}61X_3 - 0{,}10X_1X_3 - \\ -1{,}76X_2X_3 + 2{,}633X_1X_2\,X_3 + 0{,}16\mathrm{X}_1^2 - 1{,}35\mathrm{X}_2^2 + 1{,}82\mathrm{X}_2^2 \qquad (9)$$

11. Проверьте адекватность математической модели (9).

Адекватность модели заключается в достаточно объективном описании свойств исследуемого объекта. Для ее проверки достаточно оценить отклонение предсказанного имитационной моделью значения выходного параметра $Y_{\tau i}$ от результатов эксперимента $< Y_{\tau} >$ в точке X_{τ} факторного пространства. Для этой цели определяем дисперсию адекватности математической модели по формуле (10):

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{N-d}\sum_{\tau=1}^{N}(< Y_{\tau} > -Y_{\tau i})^2 \qquad (10)$$

где d – число членов аппроксимирующего полинома.

	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
28													
29													
30			x_0	x_1	x_2	x_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	$x_2\,x_3$	$\bar{y}$		
31			1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	1	11,0	12,1	0,011
32			1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	1	14,6	10,9	0,140
33			1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	-1	16,1	15,8	0,097
34			1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	10,5	14,6	0,165
35			1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	-1	11,3	14,1	0,080
36			1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	-1	12,3	12,9	0,032
37			1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	1	14,2	10,7	0,119
38			1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	1	10,3	9,5	0,061
39			1	-1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	11,2	11,3	0,003
40			1	1,215	0	0	0,746	-0,73	-0,73	0	14,6	13,1	0,023
41			1	0	-1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	10,3	10,1	0,059
42			1	0	1,215	0	-0,73	0,746	-0,73	0	11,0	9,8	0,014
43			1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	14,6	13,9	0,052
44			1	0	0	1,215	-0,73	-0,73	0,746	0	16,1	15,4	0,053
45			1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	10,5	11,9	0,021
46			12,40	0,76	-0,09	0,61	0,16	-1,35	1,82	-1,76			0,929
47												Sад^2	0,0
48												Fkp(Фиш)	2,139927
49												vad=15-3-	11
50												Fkp (табл)	2,1
51												vb=15*(3-1	30
52												F-Fkp=	0,039927
53												F<Fkp	

Рисунок 5 – Проверка адекватности математической модели с помощью критерия Фишера

Математическая модель является адекватна при условии, если дисперсия $S_{\text{ад}}^2 \leq S^2(Y)$.

В противном случае проверка гипотезы об адекватности проводится с помощью критерия Фишера при степени свободы $\gamma_{\text{ад}} = N - d$; $\gamma = N(n-1)$:

$$F = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_Y^2} \tag{11}$$

Математическая модель является адекватной, если $F \leq F_{\text{кр}}$ (рис. 5).

В нашем примере полученное уравнение регрессии адекватно описывает процесс в пределах исследуемой области.

12. Проведите раскодирование уравнения регрессии (9) и запишите уравнение в раскодированном виде.

Учитывая (12)–(14), получим уравнение в раскодированном виде (15):

$$X_1 = \frac{V-7}{4} = 0{,}24V - 1{,}75, \tag{12}$$

$$X_2 = \frac{c-4{,}3}{1{,}7} = 0{,}59\text{c} - 2{,}53, \tag{13}$$

$$X_3 = \frac{\beta - 17{,}5}{12{,}5} = 0{,}08\beta - 1{,}4, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} h = 12{,}40 + 0{,}76(0{,}24V - 1{,}75) - 0{,}09(0{,}59\text{c} - 2{,}53) + \\ +0{,}61(0{,}08\beta - 1{,}4) - 0{,}10(0{,}24V - 1{,}75)(0{,}08\beta - 1{,}4) - \\ -1{,}76(0{,}59\text{c} - 2{,}53)(0{,}08\beta - 1{,}4) + \\ +2{,}633(0{,}24V - 1{,}75)(0{,}59\text{c} - 2{,}53)(0{,}08\beta - 1{,}4) - \\ -1{,}35(0{,}59\text{c} - 2{,}53)(0{,}59\text{c} - 2{,}53) + \\ +1{,}82(0{,}08\beta - 1{,}4)(0{,}08\beta - 1{,}4) \end{gathered} \tag{15}$$

После проведения математических преобразований выражение (15) принимает вид выражения (16):

$$\begin{gathered} h = 15{,}674 - 2{,}158V - 1{,}289c + 3{,}907\beta + 0{,}126V\beta + \\ +0{,}137c\beta - 0{,}0298cV\beta + 0{,}522Vc - 0{,}47c^2 + 0{,}99V^2 + 2{,}2\beta^2 \end{gathered} \tag{16}$$

13. Постройте поверхности отклика по полученным уравнениям регрессии. При построении необходимо фиксировать каждый из трех факторов на нулевом уровне (табл. 2): V = 7 км/ч, с = 4,3 м, $\beta = 17{,}5$ град.

Для выполнения работы подставим указанные значения в раскодированное уравнение регрессии (16) и получим три уравнения с двумя факторами.

Построенные по полученным уравнениям поверхности отклика представлены на рисунках 6–8.

При фиксированном значении ширины захвата дисковой бороны уравнение имеет вид:

$$h = 1{,}454 + 0{,}087V + 4{,}497\beta + 0{,}99V^2 + 1{,}2\beta^2 \quad (17)$$

При фиксированном значении скорости движения уравнение имеет вид:

$$h = 5{,}425 + 4{,}943c + 4{,}789\beta - 0{,}0716c\beta - 0{,}47c^2 + 2{,}2\beta^2 \quad (18)$$

Уравнение регрессии при фиксированном значении угла подъема будет иметь следующий вид:

$$h = 83{,}924 - 2{,}158V + 10{,}244c - 0{,}525Vc - 0{,}47c^2 + 0{,}99V^2 \quad (19)$$

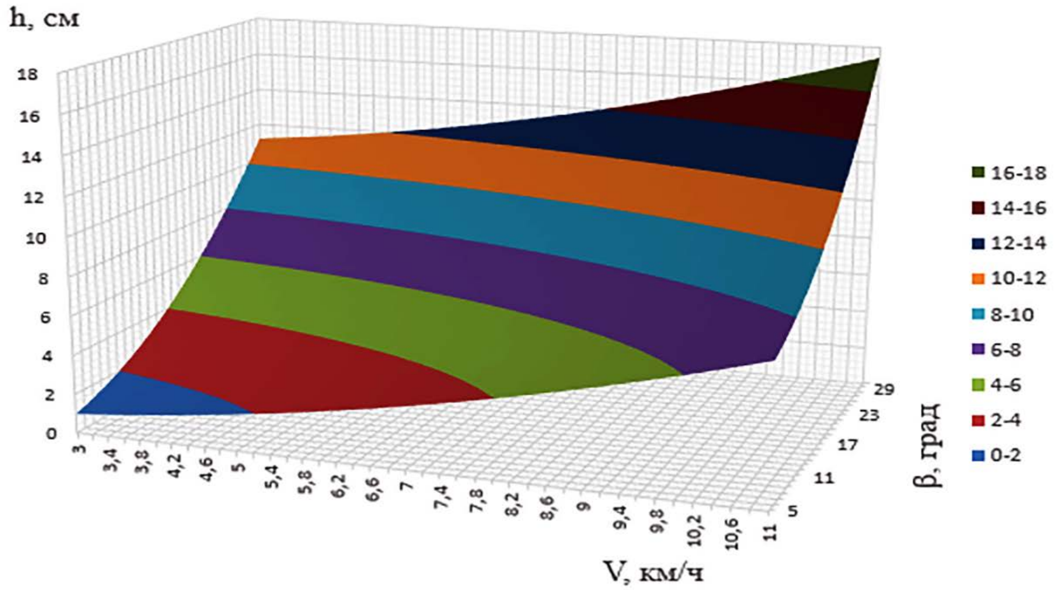


Рисунок 6 – Поверхность отклика глубины обработки почвы в зависимости от скорости движения и угла подъема (при зафиксированной на нулевом уровне *с* = 4,3 м)

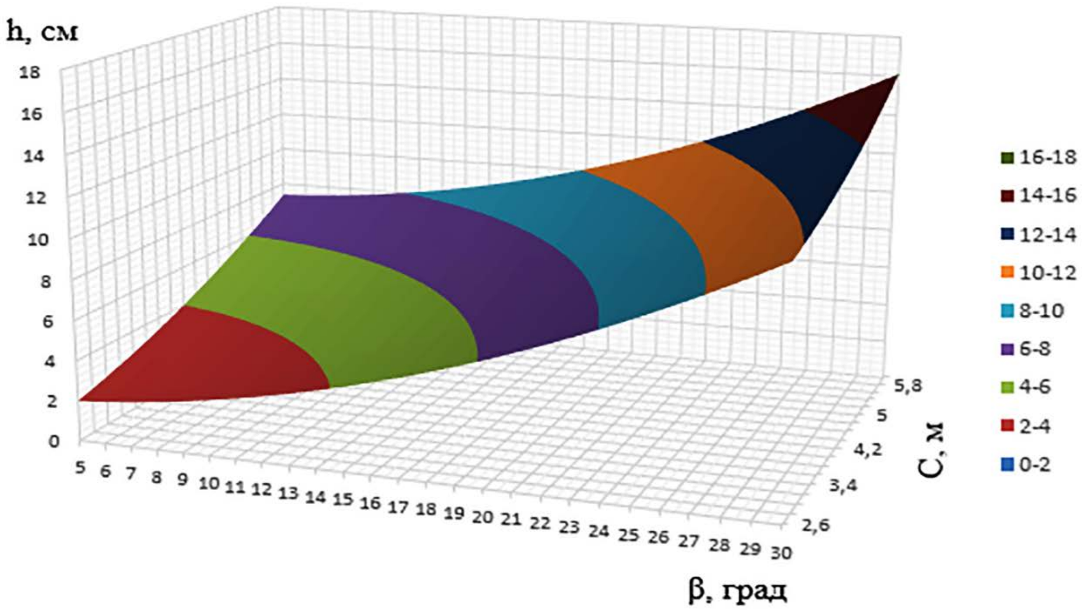


Рисунок 7 – Поверхность отклика глубины обработки почвы в зависимости от угла подъема и ширины захвата дисковой бороны (при зафиксированной на нулевом уровне *V* = 7 км/ч)

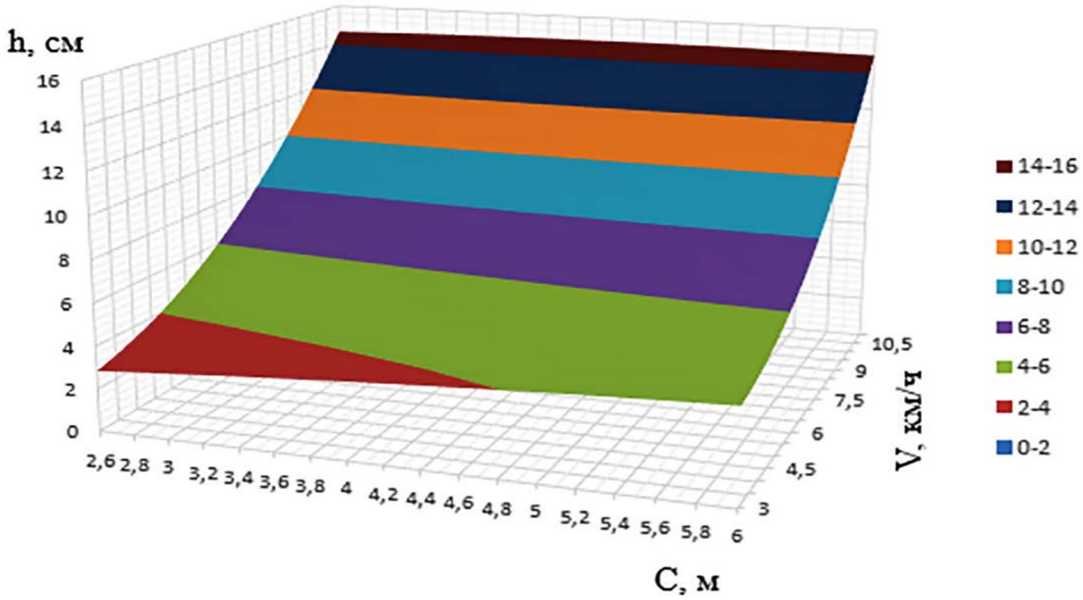


Рисунок 8 – Поверхность отклика глубины обработки почвы в зависимости от скорости движения и ширины захвата бороны (при зафиксированном на нулевом уровне *β* = 17,5 град.)

Применение современных статистических методов планирования многофакторных экспериментов позволяет выделить наиболее активные факторы и не исследовать факторы, оказывающие незначительное влияние на объект исследования.

Многофакторное планирование дает возможность активно участвовать в исследуемом процессе и в значительной мере упрощает задачу отыскания оптимальных условий его протекания. Вследствие специально разработанных планов эксперимента нахождение математической модели исследуемого процесса не требует сложных математических расчетов.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балакирева, И. А. Планирование научного эксперимента : методические указания / И. А. Балакирева, А. В. Скатков. – Севастополь : Севастопольский государственный университет, 2020. – 60 с.

2. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1969. – 576 с.

3. Дегтярев, Д. А. Графоаналитический метод проведения отсеивающегося эксперимента / Д. А. Дегтярев, И. А. Лонцева // Механизация и электрификация технологических процессов в сельскохозяйственном производстве : сб. науч. тр. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2013. С. 57–60.

4. Зайдель, А. Н. Погрешности измерений физических величин / А. Н. Зайдель. – Л. : Наука, 1985. – 112 с.

5. Лунев, В. А. Структура, методология и организация научных исследований. Основы планирования и обработки технологического эксперимента : учебное пособие / В. А. Лунев. – СПб. : Санкт-Петербургский политехнический университет, 2005. – 154 с.

6. Мухачев, В. А. Планирование и обработка результатов эксперимента : учебное пособие / В. А. Мухачев. – Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2021. – 118 с.

7. Налимов, В. В. Теория эксперимента / В. В. Налимов. – М. : Наука, 1971. – 207 с.

8. Налимов, В. В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В. В. Налимов, Н. А. Чернова. – М. : Наука, 1965. – 340 с.

9. Реброва, И. А. Планирование эксперимента : учебное пособие / И. А. Реброва. – Омск : Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет, 2010. – 105 с.

10. Современный эксперимент: подготовка, проведение, анализ результатов / под ред. О. П. Глудкина. – М. : Радио и связь, 1997. – 232 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЬЮДЕНТА

Таблица А.1 – Коэффициенты Стьюдента

n/α	0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	1,000	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,31	636,62
2	0,816	1,886	2,92	4,303	6,965	9,925	22,326	31,598
3	0,765	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,213	12,924
4	0,741	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,727	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,718	1,44	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,711	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,706	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,703	1,383	1,833	2,262	2,821	3,25	4,297	4,781
10	0,700	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,697	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,695	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,694	1,360	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,692	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,691	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,69	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,689	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,688	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,6110	3,922
19	0,688	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,687	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,686	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,686	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,685	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,685	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,684	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,684	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,684	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,683	1,313	1,701	2,018	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,683	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,683	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,681	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
60	0,679	1,296	1,761	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
120	0,677	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373
∞	0,674	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА КОХРЕНА

Таблица Б.1 – Критические значения коэффициента Кохрена (G-критерия) для p = 95 % и числе степеней свободы *v* доверительной вероятности

Число измерений, *k*	Число степеней свободы, *v*										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

ПРИЛОЖЕНИЕ В

ПРОЦЕНТНЫЕ ТОЧКИ F-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Таблица В.1 – Процентные точки F-распределения

k_2/k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72
14	4,60	3,74	3,34	3,41	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56
16	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79

Учебное издание

Кривуца Зоя Федоровна, доктор технических наук, доцент

Двойнова Наталья Федоровна, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент

Поликутина Елена Сергеевна, кандидат технических наук

МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Подписано в печать 27.02.2024 г.
Формат 60x90/16. Уч.-изд. л – 2,02. Усл. печ. л. – 4,14.
Тираж по требованию. Заказ 69.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86