

Министерство сельского хозяйства
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный государственный
аграрный университет»

Л. А. Цветкова, А. А. Павличенко

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Практикум

Благовещенск
Дальневосточный ГАУ
2024

УДК 330.4:004.9
ББК 65.23+32.81
Ц27

Рецензент

*Наталья Анатольевна Кидяева,
кандидат экономических наук, доцент, доцент
кафедры экономики агропромышленного комплекса
Дальневосточного государственного аграрного университета*

*Рекомендовано к использованию в учебном процессе
методическим советом финансово-экономического факультета
Дальневосточного государственного аграрного университета*

Ц27 Цветкова, Л. А. Методы оптимальных решений : практикум /
Л. А. Цветкова, А. А. Павличенко ; Дальневост. гос. аграр.
ун-т. – Благовещенск : Дальневосточный ГАУ, 2024. – 135 [1] с.

ISBN 978-5-9642-0647-7

Практикум обеспечивает получение теоретических знаний об экономико-математических методах и приобретение практических навыков поиска оптимальных организационно-управленческих решений. Авторами подробно рассмотрена технология решения экономико-математических задач средствами табличного процессора Excel.

Практикум предназначен для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», а также другим направлениям при изучении экономико-математических методов и моделей.

УДК 330.4:004.9
ББК 65.23+32.81

ISBN 978-5-9642-0647-7 © Цветкова Л. А., Павличенко А. А., 2024
© ФГБОУ ВО Дальневосточный
государственный аграрный университет, 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Раздел I. Методы линейного программирования.....	5
Тема 1. Математическая формализация задач линейного программирования..	6
Тема 2. Графический метод решения задач линейного программирования	11
Тема 3. Симплексный метод решения задач линейного программирования..	27
3.1 Симплексный метод с естественным базисом	28
3.2 Симплексный метод с искусственным базисом (М-метод).....	37
Тема 4. Анализ оптимального решения с помощью двойственных оценок	50
Тема 5. Распределительный метод в решении задач линейного программирования	57
Тестовые задания по разделу I.....	67
Раздел II. Получение оптимальных решений средствами Excel	75
Тема 6. Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии	75
6.1 Технология решения задачи в программе Excel.....	75
6.2 Экономико-математический анализ оптимального решения.....	81
Тема 7. Задача о смеси	96
Тема 8. Задача на оптимальный раскрой исходного материала.....	99
Тема 9. Распределительные задачи линейного программирования	104
9.1 Транспортная задача.....	104
9.2 Задача о назначениях	113
Тема 10. Задача о коммивояжере.....	125
Список рекомендуемой литературы.....	133

ВВЕДЕНИЕ

Экономико-математические методы получили широкое применение в планировании и управлении экономикой, позволяя определять, каким образом будет развиваться экономическая система, или каким образом необходимо ее развивать. Данные методы в отличие от естественных экспериментов позволяют быстрее и с меньшими затратами определить оптимальный путь развития производства.

Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего (оптимального), с точки зрения некоторого критерия варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и др.), называются *оптимизационными*.

Оптимизация – это выбор наилучшего варианта из множества возможных. Если возможных вариантов много, то в таких случаях следует формулировать задачу на языке математики и применять специальные методы поиска оптимального решения.

Линейное программирование представляет собой наиболее часто используемый метод оптимизации, позволяющий решать следующие задачи: рациональное использование сырья и материалов; оптимизация рациона кормления животных; оптимизация раскроя материала; оптимизация производственной программы предприятий; оптимальное размещение и концентрация производства; составление оптимального плана перевозок, работы транспорта и многие другие, принадлежащие к сфере оптимального планирования.

Программные средства табличного процессора Excel предоставляют возможность за короткое время определить оптимальное решение.

Практикум направлен на получение теоретических знаний и практических умений нахождения оптимальных решений методами линейного программирования с использованием табличного процессора Excel.

РАЗДЕЛ I.

МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Математическое программирование (планирование) – *раздел математики, который изучает теорию и методы поиска лучших вариантов планирования хозяйственной деятельности человека. Лучшие варианты – это те, при которых достигается максимальная производительность труда, минимум себестоимости, максимальная прибыль, минимум использования ресурсов и др.*

Одним из первых и наиболее подробно изученных разделов математического программирования является *линейное программирование*.

Линейное программирование (ЛП) – это наука о методах исследования и отыскания наибольших и наименьших значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Общая задача линейного программирования выглядит таким образом:

Найти максимум (минимум) линейной функции:

$$F(x)_{max(min)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

при наложенных ограничениях:

[illegible]

$$x_j \geq 0, \text{ при } j = \overline{1, n}$$

где a_{ij}, b_i, c_i – заданные постоянные величины.

Показатель оптимальности $F(x)$ представляет собой линейную функцию, для которой ищется экстремальное значение ($\max$ или $\min$) и которую называют целевой функцией. Ограничительные условия, налагаемые на возможные решения, имеют вид *линейных равенств или неравенств*.

ТЕМА 1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель: *получение знаний и навыков математической формализации организационно-экономических и технологических связей и процессов.*

Задачи: *на основании заданных параметров производственных ситуаций выполнить математическую формализацию задач линейного программирования (рис. 1.1).*

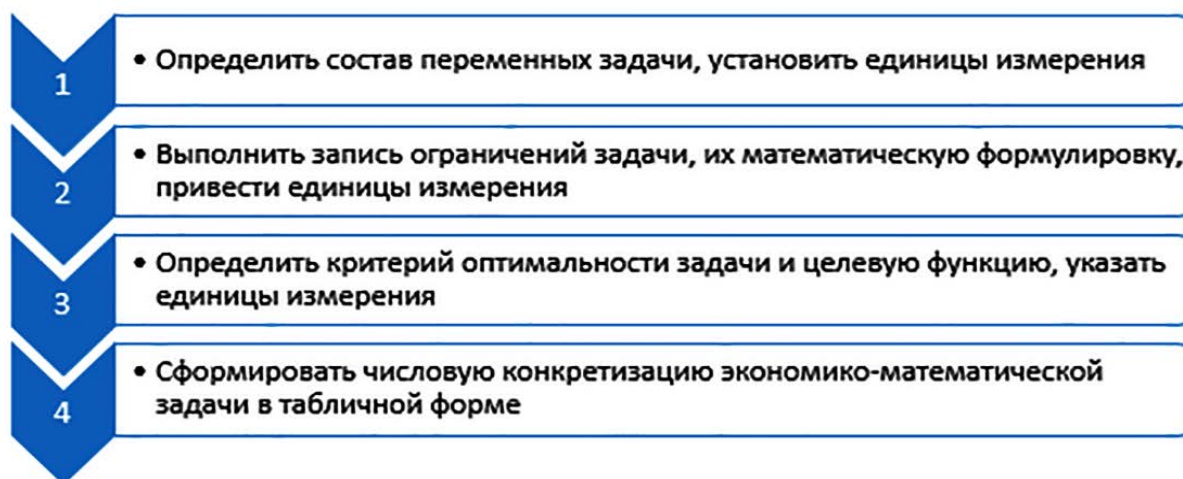


Рисунок 1.1 – Алгоритм математической формализации задачи

Ход работы:

Постановка задачи линейного программирования в общем виде:

Составить план выпуска продукции $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы при заданных оценках целевой функции c_j , объемах имеющихся ресурсов b_i и нормах затрат a_{ij} , получить максимальный экономический эффект.

Пример. Найти оптимальные размеры производства двух видов продукции (консервированных томатов и томатного сока) в цехе с мощностью оборудования 50 банок продукции в час. Объем перерабатываемого сырья при этом не должен превышать 45 кг, денежных затрат не более 1 000 руб. Удельные затраты ресурсов на банку консервированных томатов составляют 0,6 кг томатов и 18 руб. денежных средств; на банку томатного сока – 1,6 кг и 29 руб. соответственно. План выпуска томатного сока – не менее 20 штук. Критерий оптимальности задачи – максимум выручки. Цена реализации продукции первого вида равна 36 руб., второго вида – 48 руб.

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_1 – количество банок томатов консервированных, шт.

x_2 – количество банок томатного сока, шт.

2. Ограничения задачи:

1) по мощности оборудования, шт.:

$$x_1 + x_2 \leq 50;$$

2) по объему перерабатываемого сырья, кг:

$$0,6 x_1 + 1,6 x_2 \leq 45;$$

3) по использованию денежных ресурсов, руб.:

$$18 x_1 + 29 x_2 \leq 1000;$$

4) по плану выпуска томатного сока, шт.:

$$x_2 \geq 20.$$

Условия неотрицательности основных переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

3. Критерий оптимальности – максимум выручки, руб.

Целевая функция: $F(x) = 36 x_1 + 48 x_2 \rightarrow \max$.

4. Табличная форма экономико-математической задачи представлена в таблице 1.1.

*Тема 1. Математическая формализация
задач линейного программирования*

Таблица 1.1 – Табличная форма экономико-математической задачи

Ограничения	Переменные		Тип ограничения	Правая часть
	количество банок томатов x_1 , шт.	количество банок сока x_2 , шт.		
1. По мощности оборудования, шт.	1	1	$\leq$	50
2. По объему перерабатываемого сырья, кг	0,6	1,6	$\leq$	45
3. По использованию денежных ресурсов, руб.	18	29	$\leq$	1 000
4. По плану выпуска томатного сока, шт.	–	1	$\geq$	20
$F(x)$, руб.	36	48	$\rightarrow$	max

Задания для выполнения

На основании заданных производственных ситуаций выполните математическую формализацию задач.

1. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3 000 лис и 6 000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма 4 ед., а каждому песцу – 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 ед. корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 у. е., а от реализации одной шкурки песца – 5 у. е. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

2. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Определите оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при котором число перевозимых пассажиров будет максимальным. В таблице 1.2 указан наличный парк вагонов разных типов, из которых комплектуются поезда, а также количество пассажиров, перевозимых в каждом из вагонов.

3. Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры, составляет 1 000 га, резерв минеральных удобрений – 160 т д. в., трудовых ресурсов – 1 460 чело-

веко-дней. Площадь гречихи должна составлять не более 300 га. План производства пшеницы – не менее 1 200 т. Остальные исходные данные приведены в таблице 1.3. Определите такое сочетание посевов овса, пшеницы и гречихи, чтобы прибыль при этом была максимальной.

Таблица 1.2 – Исходные данные к задаче 2

Показатель	Количество вагонов		
	плацкартные	купейные	СВ
Скорый поезд	5	6	2
Пассажирский поезд	8	5	1
Парк вагонов	110	90	22
Число пассажиров в вагоне	54	36	18

Таблица 1.3 – Исходные данные к задаче 3

Показатели	Культуры		
	овес	пшеница	гречиха
Урожайность, т/га	2,4	3,0	1,2
Затраты труда, чел. дней/га	1,4	1,5	1,6
Затраты удобрений, 1 т д. в./га	0,1	0,1	0,2
Себестоимость, тыс. руб./т	2,0	1,7	2,2
Цены реализации, тыс. руб./т	3,5	3,5	12,0

4. В аптеке продаются поливитамины пяти наименований. Каждый поливитамин содержит витамины и микроэлементы, наиболее важные для человека. Определите, какие поливитамины и в каком количестве следует принимать, чтобы с минимальными затратами пройти курс лечения. В таблице 1.4 указаны количество витаминов и веществ (в мг), которое должен получить больной за весь курс лечения, а также данные о содержании витаминов и веществ в поливитаминах (в мг на 1 г) и цены за 1 г поливитаминов (в д. ед.).

5. Требуется изготовить по 100 комплектов арматуры длиной 2,9; 2,1 и 1,5 м из стержней, длина которых 7,4 м. Такие стержни могут быть разрезаны на части указанных размеров восьмью способами. Какие способы раскроя следует выбрать, чтобы при соблюдении комплектности отходы были бы наименьшими? Изначально определите карту раскроя в таблице 1.5.

*Тема 1. Математическая формализация
задач линейного программирования*

Таблица 1.4 – Исходные данные к задаче 4

Витамин	Поливитамин					Необходимо
	1	2	3	4	5	
А	1,1	1,2	1,8	1,1	1,3	260
В	0,9	1,1	0,7	1	1,1	128
С	50	60	40	30	60	7 000
Железо	24	45	18	12	37	3 700
Кальций	210	340	150	260	300	32 000
Цена	2,5	3,4	4,3	2,4	2,2	–

Таблица 1.5 – Карта раскроя

Способы	Виды заготовок, м			Отходы
	2,9	2,1	1,5	
1				
...				
8				

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение переменной.
2. Дайте понятие ограничения.
3. Охарактеризуйте составные части ограничений.
4. Приведите структурную, развернутую и матричную формы записи ограничений.
5. Дайте определение технико-экономическим коэффициентам.
6. Что является критерием оптимальности?
7. Дайте определение целевой функции.
8. Приведите структурную, развернутую и матричную формы записи целевой функции.

ТЕМА 2.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель: освоение экономико-математических методов оптимальных решений задач линейного программирования.

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций решить экономико-математические задачи графическим методом.

Ход работы:

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования (рис. 2.1) и применяется при решении задачи линейного программирования (ЛП) с двумя переменными:

$$F(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min)$$

При ограничениях:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq (\geq) b_i, i = \overline{1, m}$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

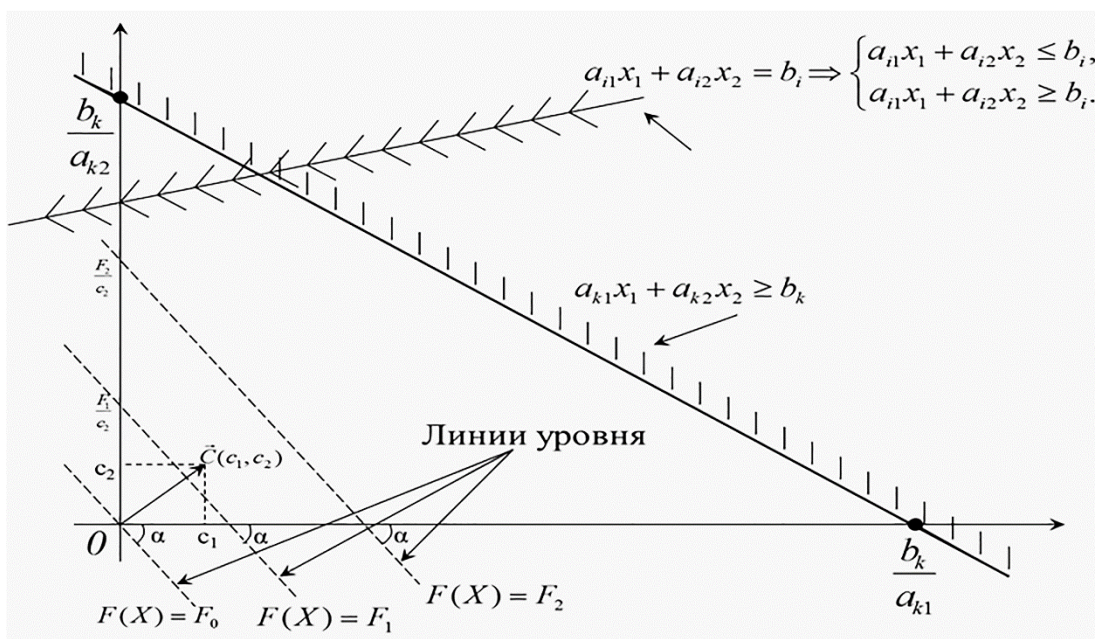


Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация задачи ЛП

Геометрическая интерпретация задачи ЛП заключается в нахождении (построении) многоугольника решений, каждая точка которого является допустимым решением задачи. Среди этого множества решений нужно отыскать такую точку многоугольника решений, координаты которой обращают в минимальную или максимальную целевую функцию. Алгоритм решения задачи представлен на рисунке 2.2.

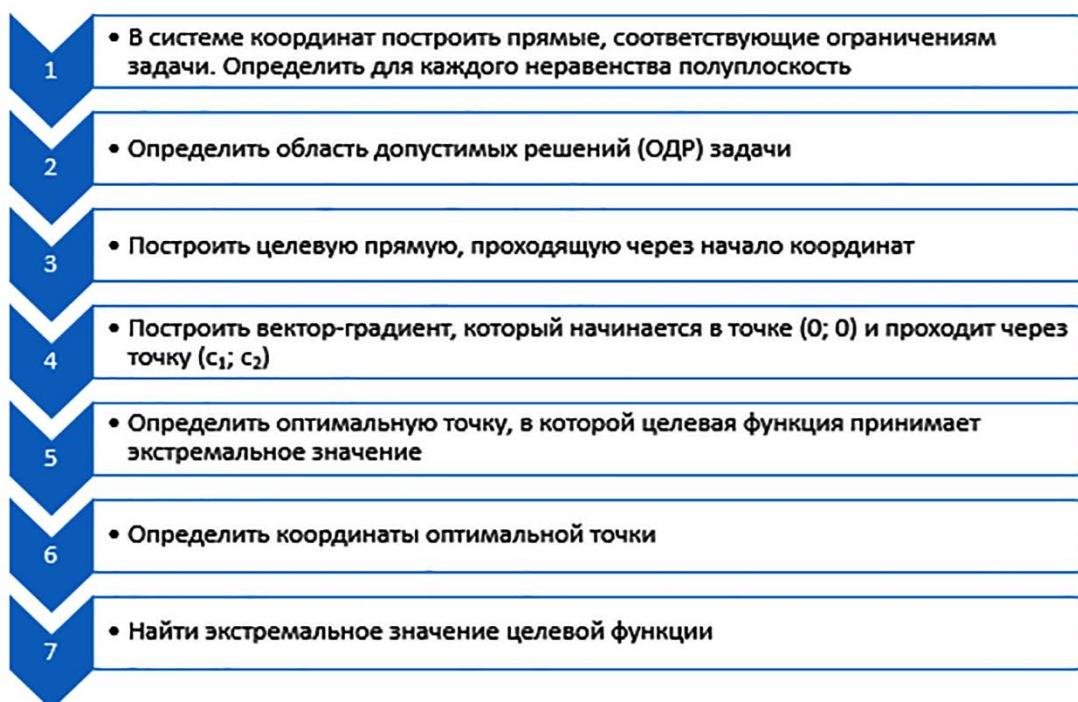


Рисунок 2.2 – Алгоритм решения задачи графическим методом

Пример 1. Максимизация целевой функции. Фирма производит два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг готового продукта и их суточные запасы приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Данные о сырье для производства мороженого

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	сливочное	шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем в 2 раза. Кроме того, спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Цена 1 кг сливочного мороженого 160 руб., шоколадного – 168 руб. Определите количество мороженого каждого вида, обеспечивающего максимальный доход от реализации продукции.

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин: x_1 – суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг; x_2 – суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

2. Ограничения задачи:

1) по молоку, кг: $0,8 x_1 + 0,5 x_2 \leq 400$;

2) по наполнителям, кг: $0,4 x_1 + 0,8 x_2 \leq 365$;

3) по спросу на сливочное мороженое:

$$x_1 / x_2 \leq 2, x_1 \leq 2 x_2;$$

$$x_1 - 2 x_2 \leq 0;$$

4) по спросу на шоколадное мороженое, кг: $x_2 \leq 350$;

Условия неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

3. Критерий оптимальности – максимальный доход от реализации продукции (руб.). Целевая функция: $F(x_1; x_2) = 160 x_1 + 168 x_2 \rightarrow \max$.

Решение:

Определим для каждой прямой координаты двух точек:

$0,8 x_1 + 0,5 x_2 = 400$		x_1	x_2
	1 т.	0	800
	2 т.	500	0
$0,4 x_1 + 0,8 x_2 = 365$		x_1	x_2
	1 т.	0	456,25
	2 т.	912,5	0
$x_1 - 2 x_2 = 0$		x_1	x_2
	1 т.	0	0
	2 т.	100	200

$x_2 = 350$ – горизонтальная прямая, проходящая через точку (0; 350).

В системе координат построим прямые, соответствующие ограничениям задачи. Определим для каждого неравенства полуплоскость.

Определим область допустимых решений как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделим ее (рис. 2.3).

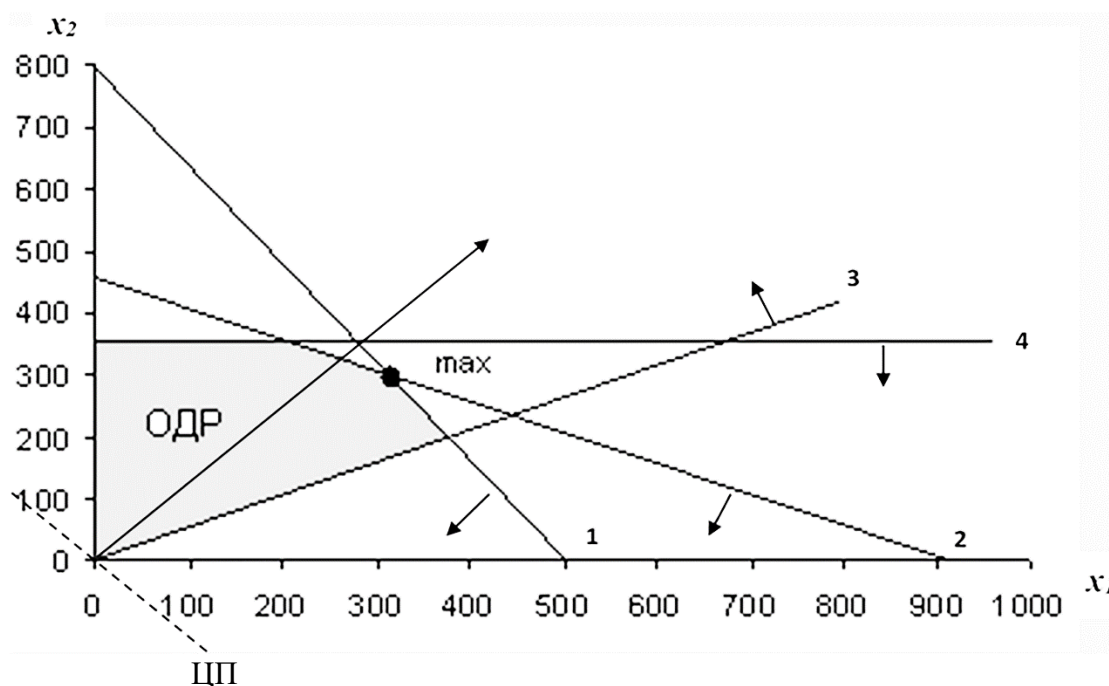


Рисунок 2.3 – Графическое решение задачи

Построим целевую прямую $F(x_1; x_2)$, проходящую через начало координат (рис. 2.3):

$$160x_1 + 168x_2 = 0$$

	x_1	x_2
1 т.	0	0
2 т.	168	-160

Перпендикулярно целевой прямой построим вектор-градиент, показывающий направление наискорейшего возрастания целевой функции. Вектор выходит из точки (0; 0) и проходит через точку $(c_1; c_2)$, а именно через точку (160; 168) (рис. 2.3).

Перемещая целевую прямую в направлении вектора, находим точку из ОДР, которая в последнюю очередь соприкасается с целевой прямой. В этой точке целевая функция принимает максимальное значение (рис. 2.3).

Определим прямые, на пересечении которых лежит эта точка (1 и 2), и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, \\ 0,4x_1 + 0,8x_2 = 365 \end{cases}$$

Решением этой системы будет $x_1 = 312,5$ и $x_2 = 300$. Подставив полученные значения в уравнение целевой функции, получим $F(x) = 100\,400$.

Таким образом, для достижения максимальной эффективности производства фирма должна выпускать в сутки сливочного мороженого – 312,5 кг, шоколадного мороженого – 300 кг. При этом будет получен доход от реализации в сумме 100 400 руб. Ресурсы будут использованы полностью. Условия по плану производства выполнены.

Пример 2. Минимизация целевой функции. Фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется по меньшей мере 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 200 руб., а улучшенный – 360 руб. Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_1 – количество обычного набора удобрений, шт.;

x_2 – количество улучшенного набора удобрений, шт.

2. Ограничения задачи:

1) по азотным удобрениям, кг:

$$3x_1 + 2x_2 \geq 10;$$

2) по фосфорным удобрениям, кг:

$$4x_1 + 6x_2 \geq 20;$$

3) по калийным удобрениям, кг:

$$x_1 + 3x_2 \geq 7;$$

Условия неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$.

3. Критерий оптимальности – минимальная стоимость эффективного питания почвы, руб. Целевая функция: $F(x_1; x_2) = 200x_1 + 360x_2 \rightarrow \min$.

Решение:

Определим для каждой прямой координаты двух точек:

$3x_1 + 2x_2 = 10$		x_1	x_2
	1 т.	0	5
	2 т.	3,33	0

$4x_1 + 6x_2 = 20$		x_1	x_2
	1 т.	0	3,33
	2 т.	5	0

$x_1 + 3x_2 = 7$		x_1	x_2
	1 т.	0	2,33
	2 т.	7	0

В системе координат построим прямые, соответствующие ограничениям задачи. Определим для каждого неравенства полуплоскость (рис. 2.4).

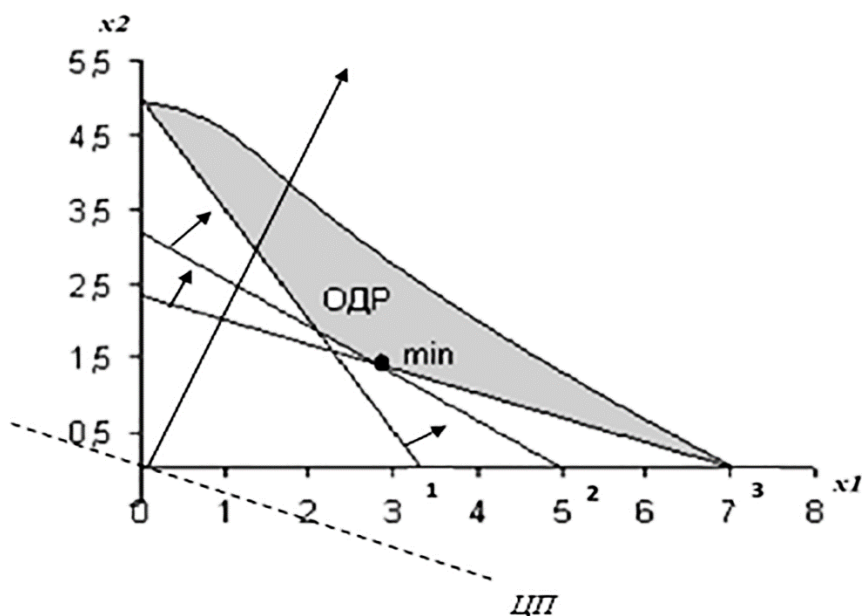


Рисунок 2.4 – Графическое решение задачи ЛП

Определим область допустимых решений как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и выделим ее (рис. 2.4).

Построим целевую прямую $F(x_1; x_2)$, проходящую через начало координат (рис. 2.4):

$$200x_1 + 360x_2 = 0$$

	x_1	x_2
1 т.	0	0
2 т.	1,8	-1

Перпендикулярно целевой прямой построим вектор-градиент, показывающий направление наискорейшего возрастания целевой функции. Вектор выходит из точки (0; 0) и проходит через точку $(c_1; c_2)$, например, через точку (2; 3,6) (рис. 2.4).

Перемещая целевую прямую в направлении вектора, находим точку из ОДР, которая, в первую очередь, соприкасается с целевой прямой. В этой точке целевая функция принимает минимальное значение (рис. 2.4).

Определим прямые, на пересечении которых лежит эта точка (2 и 3), и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 20, \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

Решением этой системы будет $x_1 = 3$ и $x_2 = 1,33$.

Подставив полученные значения в уравнение целевой функции, получим $F(x) = 1\,080$.

Таким образом, для обеспечения эффективного питания почвы газона при минимальных затратах, которые составят 1 080 руб., необходимо использовать три обычных набора удобрений и 1,33 улучшенных. При этом питание почвы по азотным удобрениям будет превышено на 1,66 кг.

Задания для выполнения

$$1. F(x) = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2. F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 \leq 4, \\ 2x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Фирма производит два вида продукции А и В. Объем сбыта продукции вида А составляет не менее 30 % общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции А и В используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 120 единиц. Расход сырья на единицу продукции А составляет 2 ед., а на единицу продукции В – 4 ед. Цены реализации продукции А и В равны 20 и 50 у. е., соответственно. Определите оптимальную производственную программу, обеспечивающую получение максимальной выручки.

Ответы к заданиям:

1. $F(2; 3) = 26$.

2. $F(4; 2,5) = 15,5$.

3. $F(10,6; 24,7) = 1\,447,1$ (у. е.).

Контрольные задания

Выполните формализацию задачи и решите ее графическим методом. Сделайте вывод по оптимальному решению.

1. На промышленном предприятии изготавливают два вида продуктов. Они производятся с помощью оборудования U1, U2, U3, которое в течение дня может работать соответственно 24 000; 40 000; 27 000 секунд. Нормы времени, необходимого для производства единицы продукции с помощью соответствующего оборудования, приведены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Нормы времени на производство единицы продукции

Виды продуктов	Оборудование		
	U1	U2	U3
1	3	8	9
2	6	4	3

Прибыль от производства продукта первого вида составляет 9 у. е., а от продукта второго вида – 6 у. е. В каком объеме следует планировать производство, чтобы получить максимальную прибыль?

2. Каждому животному нужно ежедневно выдать не менее 6 единиц белков, 8 единиц жиров и 12 единиц углеводов. Есть два вида корма. Одна единица первого корма содержит одну единицу белка, 2 единицы жира, 4 единицы углеводов и стоит 3 у. е. Для второго корма соответствующие числа имеют следующие значения: 3; 2; 2 и 2. Найдите оптимальный рацион питания с наименьшей стоимостью.

3. Производственная мощность цеха сборки составляет 120 изделий типа А и 360 изделий типа В за сутки. Технический контроль пропускает в сутки 200 изделий того или другого типа (безразлично). Изделия типа А вчетверо дороже изделий типа В. Требуется спланировать выпуск готовой продукции так, чтобы предприятию была обеспечена наибольшая прибыль.

4. В течение месяца мастерская может выполнять два вида работ А и В при средней трудоемкости работ: А – 3 часа, В – 3 часа. Мастерской установлен план прибыли в размере не менее 1 500 у. е. и план обслуживания услугой В не менее 500 клиентов. Прибыль от выполнения работ А – 3 у. е., В – 1 у. е. Количество сырья составляет 5 000 у. е., а нормы расходов сырья на единицу продукции равны: А – 3 ед., В – 2 ед. Составьте план выполнения услуг в количестве и ассортименте, обеспечивающих наименьшие трудозатраты.

5. Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки одного изделия первого вида составляет: 10 минут на

первом станке; 6 минут на втором станке и 8 минут на третьем станке. Время обработки одного изделия второго вида составляет: 6 минут на первом станке, 20 минут на втором станке, 15 минут на третьем станке. Прибыль от реализации изделий составляет 2 у. е. и 3 у. е. соответственно. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

6. Предприятие химической чистки и крашения располагает тремя видами производственных ресурсов: трудо-часы, химические материалы, машино-часы. На предприятии есть два технологических способа выполнения работ. Затраты производственных ресурсов по каждому технологическому способу, наличный объем реализации по каждому способу приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Исходные данные к заданию 6

Производственные ресурсы	Затраты ресурсов		Наличный объем ресурсов
	I	II	
1	14	10	120
2	5	10	100
3	60	70	800
Объем реализации	60	45	—

Определите продолжительность работ предприятия по каждому технологическому способу, чтобы объем реализации был максимальный.

7. Цех выпускает два вида продукции А и В, для изготовления которых используется сырье, суточный запас которого 500 единиц. Расход сырья на единицу продукции А составляет 4 ед., а на единицу продукции В – 6 ед. Цены реализации продукции 10 и 20 у. е. соответственно. Объем сбыта продукции вида А составляет не более 60 % общего объема реализации продукции обоих видов. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции А и В, обеспечивающее получение максимальной выручки.

8. Предприятие, специализированное на производстве продукции двух видов, располагает следующими ресурсами: 5 600 трудо-часов рабочего времени; 2 100 кг сырья; 200 станко-смен. Для производства изделий первого вида

затрачивается: 5 трудо-часов; 2 кг сырья; 0,2 станко-смен. Для производства изделий второго вида затрачивается: 8 трудо-часов; 3 кг сырья; 0,4 станко-смен. Прибыль от продажи единицы продукции первого вида составляет 5 у. е., от продажи единицы продукции второго вида – 4 у. е. Составьте план производства продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

9. Для производства компьютерных столов I-го и II-го видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида заданы в таблице 2.4. Найдите план выпуска продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

Таблица 2.4 – Исходные данные к заданию 9

Тип ресурса	Единица продукции первого вида	Единица продукции второго вида	Запас ресурса
Дерево	1	3	24
Пластик	4	1	24
Трудозатраты	3	2	23
Прибыль	200	300	0

10. Компания «Русские краски» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: М1, М2. Исходные данные задачи приведены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 – Исходные данные к заданию 10

Показатели	Расход ресурсов, т		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	краска НР	краска ВР	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход, руб./т	5	4	–

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 т, а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну ана-

*Тема 2. Графический метод решения
задач линейного программирования*

логичный показатель производства краски для внешних работ. Определите оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

11. Предприятие планирует приобрести не более 19 трехтонных автомашин и не более 17 пятитонных. Отпускная цена трехтонного грузовика составляет 4 млн. руб., пятитонного – 5 млн. руб. Предприятие может выделить для приобретения автомашин 141 млн. руб. Сколько нужно приобрести автомашин, чтобы их суммарная грузоподъемность была максимальной?

12. Факультет послевузовского обучения предлагает в общей сложности до 30 курсов каждый семестр. Все курсы условно можно разбить на два типа: практические, такие как деревообработка, обучение работе на компьютере и др.; гуманитарные, например, история, музыка и изобразительное искусство. Чтобы удовлетворить запросы обучающихся в каждом семестре должно предлагаться не менее 10 курсов каждого типа. Факультет оценивает доход от одного практического курса в 1 500 у.е., гуманитарного – в 1 000 у. е. Какова оптимальная структура курсов для факультета?

13. На предприятии, в состав которого входят четыре производственных цеха, изготавливаются два вида изделий. Производственные мощности цехов (в часах) в расчете на сутки, нормы времени, необходимого для изготовления единицы изделий в соответствующих цехах, приведены в таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Исходные данные к заданию 13

Цеха	Изделия		Производственные мощности цехов
	I	II	
1	2	2	12
2	1	2	8
3	4	0	16
4	0	4	12

Прибыль от продажи единицы первого изделия составляет 2 у. е., от единицы второго изделия – 3 у. е. Определите тот из возможных вариантов производственного плана, при котором обеспечивается максимальная прибыль.

14. Компания имеет возможность рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. При этом бюджет на рекламу ограничен суммой 10 000 у. е. в месяц. Одна минута рекламного времени на радио стоит 15 у. е., на телевидении – 300 у. е. Компания предполагает, что реклама на радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее, чем в два раза. Вместе с тем известно, что нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Последние исследования показали, что реклама на телевидении в 25 раз эффективнее рекламы на радио. Разработайте оптимальный бюджет для рекламы на радио и телевидении.

15. Предприятие электронной промышленности выпускает 2 модели радиоприемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства первой линии 60 изделий; второй линии – 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник 2 модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного приемника первой и второй модели равны 30 и 20 у. е. соответственно. Определите оптимальные суточные объемы производства первой и второй моделей.

16. Из двух сортов бензина образуются две смеси – А и В. Смесь А содержит 60 % бензина первого сорта и 40 % второго сорта. Смесь В – соответственно 80 % и 20 %. Цена 1 кг смеси А – 10 у. е., смеси В – 12 у. е. Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется 50 т бензина первого сорта и 30 т второго сорта.

17. На приобретение оборудования для нового производственного участка общей площадью 375 м² предприятие обладает необходимым количеством денежных средств. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины первого типа стоимостью 10 000 руб., требующие производи-

тельную площадь 6 м² (с учетом проходов), производящие 4 000 единиц продукции за смену; и машины второго типа стоимостью 20 000 руб., занимающие 10 м² площади, производящие 5 000 единиц продукции за смену. Общая производительность данного производственного участка должна быть не менее 221 000 единиц продукции за смену. Решите задачу при условии, что оптимальным для предприятия вариантом приобретения оборудования считается тот, который обеспечивает наименьшие общие затраты.

18. В хозяйстве выращиваются зерновые и соя на площади 850 га. Хозяйство располагает ресурсами в размере 100 т удобрений и 1 800 тыс. руб. денежных средств. Удельные затраты ресурсов планируются в следующих размерах: 0,1 т удобрений и 2 тыс. руб. на гектар зерновых и 0,2 т удобрений и 3 тыс. руб. на гектар сои. Найдите оптимальные площади посева культур. Критерий оптимальности решаемой задачи – максимум дохода, который планируется получить с 1 га зерновых – 3 тыс. руб. и с 1 га сои – 4,2 тыс. руб.

19. Компания производит полки для ванн двух размеров – А и В. Отдел сбыта считает, что в неделю на рынке можно реализовать до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м² материала, а для полки типа В – 3 м² материала. Компания может получить до 1 200 м² материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин. машинного времени, для изготовления одной полки типа В – 30 мин.; машину можно использовать 160 час. в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, от полок типа В – 4 денежные единицы, то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

20. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице 2.7 указан наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и количество пассажиров, имеющих в каждом из вагонов. Определите оптимальное число скорых

и пассажирских поездов, при котором число перевозимых пассажиров достигнет максимума.

Таблица 2.7 – Исходные данные к заданию 20

Показатели	Количество вагонов		
	плацкартные	купейные	СВ
Скорый поезд	5	6	2
Пассажирский поезд	8	5	1
Парк вагонов	110	90	22
Число пассажиров в вагоне	54	36	18

21. Фармацевтическая фирма ежедневно производит не менее 800 кг некой пищевой добавки, которая состоит из смеси кукурузной и соевой муки, состав которой представлен в таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Исходные данные к заданию 21

Мука	Белок, кг на килограмм муки	Клетчатка, кг на килограмм муки	Стоимость, руб./кг
Кукурузная	0,09	0,02	0,3
Соевая	0,6	0,06	0,9

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30 % белка и не более 5 % клетчатки. Определите для фирмы рецептуру смеси наименьшей стоимости.

22. Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисы, либо один песец. По плану на ферме должно быть не менее 3 000 лис и 6 000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма – 4 ед., каждому песцу – 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 ед. корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 у. е., от реализации одной шкурки песца – 5 у. е. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль?

23. Найдите оптимальные размеры производства двух видов продукции (консервированных томатов и томатного сока) в цехе с мощностью оборудования 50 банок продукции в час. Объем перерабатываемого сырья при этом не

*Тема 2. Графический метод решения
задач линейного программирования*

должен превышать 45 кг. Удельные затраты ресурсов на банку консервированных томатов составляют 0,6 кг томатов и 18 руб. денежных средств; на банку томатного сока – 1,6 кг и 29 руб. соответственно. Сумма денежных затрат – не более 1 000 руб. План выпуска томатного сока – не менее 20 штук. Критерий оптимальности решаемой задачи – максимум выручки. Цены реализации продукции: первого вида – 36 руб. за штуку, второго вида – 48 руб.

Решите задачу графическим методом. Сделайте вывод по оптимальному решению:

$$1. F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ 5x_1 - x_2 \leq 45, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$2. F(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$3. F(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max; \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$4. F(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \min; \begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3, \\ 2x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

ТЕМА 3.

**СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Цель: освоение экономико-математических методов оптимальных решений задач линейного программирования.

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций решить экономико-математические задачи симплексным методом; дать экономическое описание оптимального решения.

Ход работы:

Симплексный метод – это метод последовательного улучшения решения задачи на основе кратчайшего поиска оптимального (рис. 3.1).

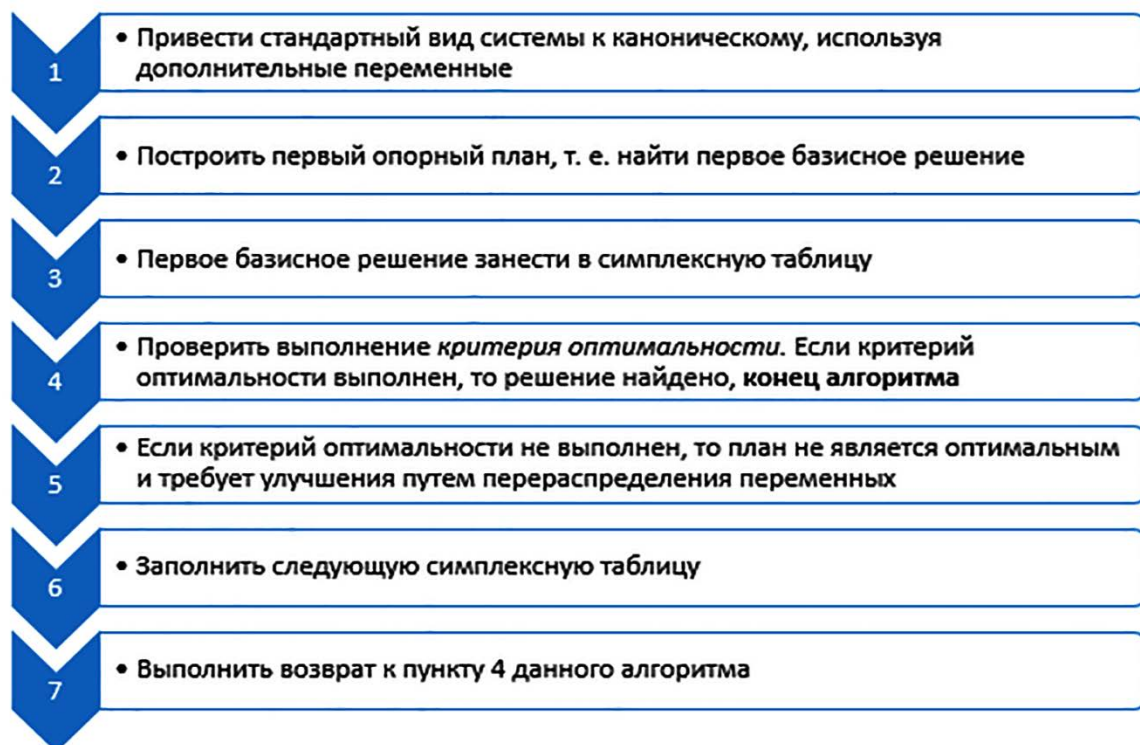


Рисунок 3.1 – Алгоритм решения задачи симплексным методом

3.1 Симплексный метод с естественным базисом

Для применения симплексного метода с естественным базисом задача должна содержать единичную подматрицу, так как в этом случае очевиден начальный опорный план (базисное решение).

Пример. Продукцией предприятия является молоко пастеризованное, сметана, кефир и творог, на производство 1 ц которых требуется соответственно 101; 500; 101 и 800 кг сырья (молока). Ресурс сырья (молока) для производства цельномолочной продукции составляет 4 000 кг.

Ежедневный спрос на пастеризованное молоко не превышает 15 ц.

На предприятии используется два технологических способа упаковки продукции: розлив молока и кефира осуществляется в полиэтиленовые пакеты, расфасовка сметаны и творога – в пластиковый стакан. Основное оборудование может быть занято в течение 16 часов, а автоматы по расфасовке сметаны и творога в течение 12 часов. При этом затраты рабочего времени при разливе 1 ц молока и кефира составляют соответственно 0,8 и 0,9 машинных часов. На расфасовке 1 ц сметаны и творога заняты специальные автоматы в течение 3,25 часов.

Прибыль от реализации 1 ц молока составляет 2,5 тыс. руб., кефира – 2,6 тыс. руб., сметаны – 11 тыс. руб., творога – 15 тыс. руб.

Определите план производства продукции, чтобы прибыль от ее реализации была максимальной. Каким образом будут использованы ресурсы?

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_1 – пастеризованное молоко, ц;

x_2 – сметана, ц;

x_3 – кефир, ц;

x_4 – творог, ц.

2. Ограничения задачи:

1) по сырью (сырому молоку), кг:

$$101x_1 + 500x_2 + 101x_3 + 800x_4 \leq 4000;$$

2) по рабочему времени, маш.-час:

$$0,8x_1 + 0,9x_3 \leq 16;$$

$$3,25x_2 + 3,25x_4 \leq 12;$$

3) по плану производства молока, ц: $x_1 \leq 15$;

Условия неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

3. Критерием оптимальности выступает максимальная прибыль от реализации (тыс. руб.):

Целевая функция: $F(x) = 2,5x_1 + 11x_2 + 2,6x_3 + 15x_4 \rightarrow \max$.

Решение:

1. Приведем систему к каноническому виду:

$$101x_1 + 500x_2 + 101x_3 + 800x_4 + x_5 = 4000;$$

$$0,8x_1 + 0,9x_3 + x_6 = 16;$$

$$3,25x_2 + 3,25x_4 + x_7 = 12;$$

$$x_1 + x_8 = 15;$$

$$F(x) = 2,5x_1 + 11x_2 + 2,6x_3 + 15x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

При этом x_5 – неиспользованное сырье, кг; x_6 , x_7 – неиспользованное рабочее время, маш.-час; x_8 – невыполнение плана по производству молока, ц.

2. Найдем первый опорный план, то есть первое базисное решение.

Для выбора опорного плана запишем матрицу:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b_i
1 ограничение	101	500	101	800	1	0	0	0	4000
2 ограничение	0,8	0	0,9	0	0	1	0	0	16
3 ограничение	0	3,25	0	3,25	0	0	1	0	12
4 ограничение	1	0	0	0	0	0	0	1	15

Переменные, которые образовали *определитель единицы* и вошли в базис, называют *базисными*. Базисные переменные равны правым частям ограничений b_i , а именно $x_5 = 4000$; $x_6 = 16$; $x_7 = 12$; $x_8 = 15$.

Переменные, не вошедшие в базис, называют *свободными*; они всегда равны нулю, а именно $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$.

Подставим полученные значения в целевую функцию:

$$F = 2,5 \times 0 + 11 \times 0 + 2,6 \times 0 + 15 \times 0 + 0 \times 4000 + 0 \times 16 + 0 \times 12 + 0 \times 15 = 0$$

3. Первый опорный план задачи запишем в первой симплексной таблице (табл. 3.1). В таблице все коэффициенты оценочной строки отрицательны. Следовательно, план не является оптимальным и требует улучшения.

Таблица 3.1 – Первая симплексная таблица

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные				Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	4 000	101	500	101	800	$4000/800 = 5$
x_6	16	0,8	0	0,9	0	–
x_7	12	0	3,25	0	<u>3,25</u>	$12/3,25 = 3,7$
x_8	15	1	0	0	0	–
$F(x)$	0	–2,5	–11	–2,6	–15	–

4. Выберем переменную из числа свободных, которую следует ввести в базис. Эта переменная в оценочной строке имеет минимальную оценку (**–15**). Столбец, содержащий переменную, которую нужно ввести в базис, называют **разрешающим столбцом** (в таблице 3.1 выделен полужирным начертанием).

Выберем переменную, которую следует вывести из базиса. Эта переменная определяется по наименьшему частному от деления значений базисных переменных на только положительные коэффициенты *разрешающего столбца*. Строка, содержащая такую переменную, называется **разрешающей** (в таблице 3.1 она также выделена полужирным начертанием).

Выберем **разрешающий элемент**, лежащий на пересечении **разрешающих столбца и строки**, с помощью которого выполняется перерасчет симплекс-таблицы. В задаче разрешающий элемент равен **3,25**, выделим его.

5. Построим вторую симплексную таблицу (табл. 3.2). Во второй таблице переменные x_4 и x_7 поменяются местами.

В клетке, соответствующей разрешающему элементу первой таблицы, записывается элемент с обратной величиной ($1/3,25 = 0,31$).

Коэффициенты разрешающей строки в новой таблице вычисляются путем деления коэффициентов первой таблицы на разрешающий элемент:

$$12/3,25 = 3,7;$$

$$0/3,25 = 0;$$

$$3,25/3,25 = 1;$$

$$0/3,25 = 0.$$

Коэффициенты разрешающего столбца определяются путем деления соответствующих коэффициентов первой таблицы на разрешающий элемент:

$$800/3,25 = 246,2;$$

$$0/3,25 = 0;$$

$$0/3,25 = 0;$$

$$-15/3,25 = -4,6$$

Результат запишем в новую симплексную таблицу с обратным знаком.

В результате будут заполнены одна строка и один столбец.

Остальные коэффициенты таблицы, включая индексную строку, пересчитываем по «правилу прямоугольника» построчно и записываем в таблицу:

$$x_5: \frac{4000 \cdot 3,25 - 800 \cdot 12}{3,25} = 1046,2; \frac{101 \cdot 3,25 - 800 \cdot 0}{3,25} = 101;$$

$$\frac{500 \cdot 3,25 - 800 \cdot 3,25}{3,25} = -300; \frac{101 \cdot 3,25 - 800 \cdot 0}{3,25} = 101$$

$$x_6: \frac{16 \cdot 3,25 - 0 \cdot 12}{3,25} = 16; \frac{0,8 \cdot 3,25 - 0 \cdot 0}{3,25} = 0,8;$$

$$\frac{0 \cdot 3,25 - 0 \cdot 3,25}{3,25} = 0; \frac{0,9 \cdot 3,25 - 0 \cdot 0}{3,25} = 0,9$$

Тема 3. Симплексный метод решения
задач линейного программирования

$$x_8: \frac{15 \cdot 3,25 - 0 \cdot 12}{3,25} = 15; \frac{1 \cdot 3,25 - 0 \cdot 0}{3,25} = 1;$$

$$\frac{0 \cdot 3,25 - 0 \cdot 3,25}{3,25} = 0; \frac{0 \cdot 3,25 - 0 \cdot 0}{3,25} = 0$$

$$F(x): \frac{0 \cdot 3,25 + 15 \cdot 12}{3,25} = 55,4; \frac{-2,5 \cdot 3,25 + 0 \cdot 15}{3,25} = -2,5;$$

$$\frac{-11 \cdot 3,25 + 15 \cdot 3,25}{3,25} = 4; \frac{-2,6 \cdot 3,25 + 0 \cdot 15}{3,25} = -2,6$$

Таблица 3.2 – Вторая симплексная таблица

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные				Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_3	x_7	
x_5	1 046,2	101	-300	<u>101</u>	-246,2	1046,2/101 = 10,36
x_6	16	0,8	0	0,9	0	16/0,9 = 17,8
x_4	3,7	0	1	0	0,31	–
x_8	15	1	0	0	0	–
$F(x)$	55,4	-2,5	4	-2,6	4,6	–

6. Во второй симплексной таблице имеются отрицательные коэффициенты оценочной строки. Следовательно, план не является оптимальным и требует улучшения.

Столбец переменной x_3 , вводимой в базис, будет разрешающим. Разрешающей строкой будет строка переменной x_5 (в таблице 3.2 они выделены полужирным начертанием).

Элемент **101**, находящийся на пересечении столбца и строки, будет разрешающим (он также выделен в таблице 3.2).

С его помощью произведем перерасчет второй симплексной таблицы и рассчитаем третью симплексную таблицу. Обратная величина разрешающего элемента $1/101 = 0,01$.

Строка x_3 :

$$1046,2/101 = 10,36; 101/101 = 1; -300/101 = -3; -246,2/101 = -2,44.$$

Столбец x_5 :

$$0,9/101 = 0,009 (-0,009); 0/101 = 0; 0/101 = 0; -2,6/101 = -0,026 (0,026).$$

Все остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника:

$$\begin{aligned}
 x_6: \frac{16 \cdot 101 - 1046,2 \cdot 0,9}{101} &= 6,68; \frac{0,8 \cdot 101 - 101 \cdot 0,9}{101} = -0,1; \\
 \frac{0 \cdot 101 + 300 \cdot 0,9}{101} &= 2,67; \frac{0 \cdot 101 + 246,2 \cdot 0,9}{101} = 2,2 \\
 x_4: \frac{3,7 \cdot 101 - 1046,2 \cdot 0}{101} &= 3,7; \frac{0 \cdot 101 - 101 \cdot 0}{101} = 0; \\
 \frac{1 \cdot 101 + 300 \cdot 0}{101} &= 1; \frac{0,31 \cdot 101 + 246,2 \cdot 0}{101} = 0,31 \\
 x_8: \frac{15 \cdot 101 - 246,2 \cdot 0}{101} &= 15; \frac{1 \cdot 101 - 101 \cdot 0}{101} = 1; \\
 \frac{0 \cdot 101 + 300 \cdot 0}{101} &= 0; \frac{0 \cdot 101 + 246,2 \cdot 0}{101} = 0 \\
 F(x): \frac{55,4 \cdot 101 + 1046,2 \cdot 2,6}{101} &= 82,33; \frac{-2,5 \cdot 101 + 101 \cdot 2,6}{101} = 0,1; \\
 \frac{4 \cdot 101 - 300 \cdot 2,6}{101} &= -3,7; \frac{4,6 \cdot 101 - 246,2 \cdot 2,6}{101} = -1,74
 \end{aligned}$$

Таблица 3.3 – Третья симплексная таблица

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные				Оценочные отношения
		x_1	x_2	x_5	x_7	
x_3	10,36	1	-3	0,01	-2,44	–
x_6	6,68	-0,1	<u>2,67</u>	-0,009	2,2	6,68/2,67 = 2,5
x_4	3,7	0	1	0	0,31	3,7/1 = 3,7
x_8	15	1	0	0	0	–
$F(x)$	82,33	0,1	-3,7	0,026	-1,74	–

7. В третьей симплексной таблице имеются отрицательные коэффициенты оценочной строки (табл. 3.3). Следовательно, план не является оптимальным и требует улучшения.

Обратная величина разрешающего элемента равна $1/2,67 = 0,37$.

Строка x_2 :

$$6,68/2,67 = 2,5; -0,1/2,67 = -0,037; -0,009/2,67 = -0,003; 2,2/2,67 = 0,82.$$

Столбец x_6 :

$$-3/2,67 = -1,12 \text{ (1,12)}; 1/2,67 = 0,37 \text{ (-0,37)}; 0/2,67 = 0; -3,7/2,67 = -1,39 \text{ (1,39)}.$$

Все остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника:

$$\begin{aligned}
 x_3: \frac{10,36 \cdot 2,67 + 6,68 \cdot 3}{2,67} &= 17,87; \frac{1 \cdot 2,67 - 0,1 \cdot 3}{2,67} = 0,89; \\
 \frac{0,01 \cdot 2,67 - 0,009 \cdot 3}{2,67} &= 0; \frac{-2,44 \cdot 2,67 + 2,2 \cdot 3}{2,67} = 4,9 \\
 x_4: \frac{3,7 \cdot 2,67 - 6,68 \cdot 1}{2,67} &= 1,2; \frac{0 \cdot 2,67 + 0,1 \cdot 1}{2,67} = 0,037; \\
 \frac{0 \cdot 2,67 + 0,009 \cdot 1}{2,67} &= 0,003; \frac{0,31 \cdot 2,67 - 2,2 \cdot 1}{2,67} = -0,5 \\
 x_8: \frac{15 \cdot 2,67 - 6,68 \cdot 0}{2,67} &= 15; \frac{1 \cdot 2,67 + 0,1 \cdot 0}{2,67} = 1; \\
 \frac{0 \cdot 2,67 + 0,009 \cdot 0}{2,67} &= 0; \frac{0 \cdot 2,67 - 2,2 \cdot 0}{2,67} = 0 \\
 F(x): \frac{82,33 \cdot 2,67 + 6,68 \cdot 3,7}{2,67} &= 91,6; \frac{0,1 \cdot 2,67 - 0,1 \cdot 3,7}{2,67} = -0,39; \\
 \frac{0,026 \cdot 2,67 - 0,009 \cdot 3,7}{2,67} &= 0,014; \frac{-1,74 \cdot 2,67 + 2,2 \cdot 3,7}{2,67} = 1,31
 \end{aligned}$$

Таблица 3.4 – Четвертая симплексная таблица

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные				Оценочные отношения
		x_1	x_6	x_5	x_7	
x_3	17,87	0,89	1,12	0	4,9	17,87/0,89 = 20,08
x_2	2,5	-0,037	0,37	-0,003	0,82	–
x_4	1,2	0,037	-0,37	0,003	-0,5	1,2/0,037 = 32,4
x_8	15	1	0	0	0	15/1 = 15
$F(x)$	91,60	-0,39	1,39	0,014	1,31	–

8. В четвертой симплексной таблице имеется отрицательный коэффициент оценочной строки (табл. 3.4). Следовательно, план не является оптимальным и требует улучшения.

Обратная величина разрешающего элемента составит $1/1 = 1$.

Строка x_1 :

$$15/1 = 15; 0/1 = 0; 0/1 = 0; 0/1 = 0.$$

Столбец x_8 :

$$0,89/1 = 0,89 \text{ } (-0,89); -0,037/1 = -0,037 \text{ } (0,037); 0,037/1 = 0,037 \text{ } (-0,037); \\ -0,39/1 = -0,39 \text{ } (0,39).$$

Все остальные элементы пересчитываются по правилу прямоугольника:

$$x_3: \frac{17,87 \cdot 1 - 0,89 \cdot 15}{1} = 4,5; \frac{1,12 \cdot 1 - 0,89 \cdot 0}{1} = 1,12; \\ \frac{0 \cdot 1 - 0,89 \cdot 0}{1} = 0; \frac{4,9 \cdot 1 - 0,89 \cdot 0}{1} = 4,9 \\ x_2: \frac{2,5 \cdot 1 + 0,037 \cdot 15}{1} = 3,06; \frac{0,37 \cdot 1 + 0,037 \cdot 0}{1} = 0,37; \\ \frac{-0,003 \cdot 1 + 0,037 \cdot 0}{1} = -0,003; \frac{0,82 \cdot 1 + 0,037 \cdot 0}{1} = 0,82 \\ x_4: \frac{1,2 \cdot 1 - 0,037 \cdot 15}{1} = 0,65; \frac{-0,37 \cdot 1 - 0,037 \cdot 0}{1} = -0,37; \\ \frac{0,003 \cdot 1 - 0,037 \cdot 0}{1} = 0,003; \frac{-0,5 \cdot 1 - 0,037 \cdot 0}{1} = -0,5 \\ F(x): \frac{91,6 \cdot 1 + 0,39 \cdot 15}{1} = 97,4; \frac{1,39 \cdot 1 + 0,39 \cdot 0}{1} = 1,39; \\ \frac{0,014 \cdot 1 + 0,39 \cdot 0}{1} = 0,014; \frac{1,31 \cdot 1 + 0,39 \cdot 0}{1} = 1,31$$

Отсутствие отрицательных оценок в индексной строке пятой симплексной таблицы (табл. 3.5) свидетельствует об оптимальности данного плана.

Таблица 3.5 – Пятая симплексная таблица

Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные			
		x_8	x_6	x_5	x_7
x_3	4,5	-0,89	1,12	0	4,9
x_2	3,06	0,037	0,37	-0,003	0,82
x_4	0,65	-0,037	-0,37	0,003	-0,5
x_1	15	1	0	0	0
$F(x)$	97,4	0,39	1,39	0,014	1,31

Экономическое содержание решения. Согласно оптимальному плану максимальную прибыль в размере 97,4 тыс. руб. предприятие может получить, если будет производить в сутки 15 ц пастеризованного молока; 3,06 ц сметаны; 4,5 ц кефира и 0,65 ц творога.

Дополнительные переменные показывают разницу между запасами ресурсов каждого вида и их потреблением. Дополнительные переменные, не вошедшие в базис при оптимальном решении, говорят о том, что данные ресурсы израсходованы полностью. Дополнительные переменные, вошедшие в базис при оптимальном плане, показывают неиспользованные ресурсы.

В нашей задаче дополнительные переменные не вошли в базис, а значит, ресурсы использованы полностью: сырье, находящееся в распоряжении предприятия, переработано в полном объеме; оборудование задействовано полностью; план производства молока выполнен.

Важно отметить, что оценка хозяйственной значимости ресурсов получается в самой симплексной таблице:

1) коэффициент 0,39 столбца x_8 в оценочной строке показывает, что увеличение плана на 1 ц приведет к соответствующему увеличению целевой функции на 0,39 тыс. руб.;

2) коэффициент 1,39 столбца x_6 в оценочной строке показывает, что увеличение мощности оборудования для производства молока и кефира на 1 машино-час приведет к соответствующему увеличению целевой функции, которое составит 1,39 тыс. руб.;

3) коэффициент 0,014 столбца x_5 в оценочной строке показывает, что увеличение сырья на 1 кг приведет к соответствующему увеличению целевой функции на 0,014 тыс. руб.;

4) коэффициент 1,31 столбца x_7 в оценочной строке показывает, что увеличение мощности оборудования для производства сметаны и творога на 1 машино-час приведет к соответствующему увеличению целевой функции на сумму 1,31 тыс. руб.

Задание для выполнения

Комбикормовый завод получает четыре вида сырья для производства комбикормов по разным рецептам: 400 т пшеницы; 250 т ячменя; 350 т сои и 100 т овса. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три вида комбикормов: А – 2:3:5:2, В – 3:1:2:1, С – 2:2:1:3. Стоимость 1 т указанных видов комбикормов соответственно равна 120; 100; 150 у. е. Составьте план выпуска комбикормов по разным рецептам из условия получения максимальной стоимости.

Ответ: $F(0; 100; 0; 100; 150; 150; 0) = 10\,000$ у. е.

3.2 Симплексный метод с искусственным базисом (М-метод)

Симплексный метод с искусственным базисом (М-метод) применяется, если задача имеет хотя бы одно ограничение со знаком больше либо равно или знаком равенства.

Пример. Найдите $F(x) = 160x_1 + 44x_2 + 1000x_3 \rightarrow \max$.

Критерий оптимальности – максимум дохода. При ограничениях:

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$, га – распределение площади посевов по культурам;

$5x_1 + 3x_2 + 30x_3 \leq 4200$, чел.-дней – удельные затраты трудовых ресурсов в пересчете на 1 га;

$100x_1 + 100x_2 + 500x_3 \leq 100000$, тыс. руб. – удельные затраты денежных ресурсов в пересчете на 1 га;

$$x_1 + x_2 \geq 250, \text{ га} - \text{площадь под зерновые (не менее 250 га);}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

При этом x_1, x_2, x_3 – площади посева пшеницы, ячменя и картофеля в гектарах соответственно.

Решение:

1. Запишем условия задачи в канонической форме:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500;$$

$$5x_1 + 3x_2 + 30x_3 + x_5 = 4200;$$

$$100x_1 + 100x_2 + 500x_3 + x_6 = 100000;$$

$$\text{так как } x_1 + x_2 \geq 250, \text{ то } x_1 + x_2 - x_7 + y_1 = 250;$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 6; y_1 \geq 0.$$

2. В четвертом ограничении дополнительная переменная x_7 имеет коэффициент минус единица. Поэтому, чтобы получить единичный базис (то есть определитель единицы), введем в уравнение искусственную переменную y_1 с положительным коэффициентом единица.

Искусственную переменную введем и в целевую функцию с очень высокой отрицательной оценкой $-M$ (так как задача решается на максимум):

$$F(x)_{\max} = 160x_1 + 44x_2 + 1000x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 0x_7 - My_1.$$

3. Для выбора первого опорного плана запишем матрицу коэффициентов:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & y_1 & x_7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 30 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 500 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b_i \\ 500 \\ 4200 \\ 100000 \\ 250 \end{array} \right)$$

Приняв переменные x_4, x_5, x_6, y_1 за базисные, приравняем к нулю остальные (свободные) переменные и получим первое опорное решение:

$$x_4 = 500, x_5 = 4200, x_6 = 100000, y_1 = 250 - \text{базисные переменные;}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_7 = 0 - \text{свободные переменные.}$$

4. Дальнейшее решение задачи идет в симплексной таблице (табл. 3.6), но оценочная строка таблицы записывается двумя строками. Вторую строку формируем умножением оценок функционала на все элементы таблицы и переносом суммы произведений во вторую индексную строку:

$$0 \times 500 + 0 \times 4200 + 0 \times 100000 + (-M) \times 250 = -250M.$$

Таблица 3.6 – Первая симплексная таблица

C_i	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные и их коэффициенты				Оценочные отношения
			x_1	x_2	x_3	x_7	
			160	44	1 000	0	
0	x_4	500	1	1	1	0	500/1 = 500
0	x_5	4 200	5	3	30	0	4200/5 = 840
0	x_6	100 000	100	100	500	0	100000/100 = 1000
-M	y_1	250	1	1	0	-1	250/1 = 250 (min)
Z_{max}		0	-160	-44	-1 000	0	–
$Z (M)$		-250M	-M	-M	0	M	–

C_i – коэффициенты базисных переменных в целевой функции.

Алгоритм всех дальнейших вычислений практически не отличается от обычного симплексного метода. При решении задачи на максимум целевой функции формальным признаком оптимальности является отсутствие в оценочной строке отрицательных коэффициентов и отсутствие в базисе искусственных переменных.

5. Поскольку первый опорный план не оптимален, построим вторую симплексную таблицу. Для этого нужно найти разрешающий столбец и разрешающую строку. При выборе разрешающего столбца смотрим на вторую оценочную строку и находим наименьшее отрицательное число (задача решается на максимум). При выборе разрешающего столбца возникает затруднение, так как здесь в двух столбцах стоят одинаковые величины (-100 000), поскольку численное значение M берется в 100 раз выше максимальной оценки функционала (-1 000×100 = -100 000). В этом случае ориентируемся на первую оценочную строку функционала. Разрешающий столбец определяет переменную, вводимую в базис – это x_1 (в таблице 3.6 выделен полужирным начертанием).

Определим разрешающую строку по минимальному оценочному отношению. Разрешающей является строка y_1 . Разрешающий элемент равен единице (в таблице 3.6 они отмечены полужирным начертанием).

6. Построим вторую симплексную таблицу (табл. 3.7). В базис должна быть введена переменная x_1 . Из базиса при этом будет удалена фиктивная искусственная переменная y_1 , но так как она не имеет реального экономического смысла, то дальнейшие преобразования по столбцу y_1 излишни и эту переменную можно исключить из таблицы. Следовательно, разрешающий элемент не пересчитывается и разрешающий столбец тоже. Пересчитывается разрешающая строка и все элементы таблицы.

Коэффициенты разрешающей строки делим на разрешающий элемент и записываем во вторую строку на тоже место:

$$x_1: 250/1 = 250; 1/1 = 1; 0/1 = 0; -1/1 = -1.$$

Все остальные коэффициенты пересчитываем, используя правило прямоугольника:

$$\begin{aligned} x_4: \frac{500 \cdot 1 - 250 \cdot 1}{1} &= 250; \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 1}{1} = 0; \\ \frac{1 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{1} &= 0; \frac{0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)}{1} = 1 \\ x_5: \frac{4200 \cdot 1 - 250 \cdot 5}{1} &= 2950; \frac{3 \cdot 1 - 5 \cdot 1}{1} = -2; \\ \frac{30 \cdot 1 - 5 \cdot 0}{1} &= 30; \frac{0 \cdot 1 - 5 \cdot (-1)}{1} = 5 \\ x_6: \frac{100000 \cdot 1 - 250 \cdot 100}{1} &= 75000; \frac{100 \cdot 1 - 100 \cdot 1}{1} = 0; \\ \frac{500 \cdot 1 - 100 \cdot 0}{1} &= 500 \\ \text{Оценочная: } \frac{0 \cdot 1 - 250 \cdot (-160)}{1} &= 40000; \frac{-44 \cdot 1 - 1 \cdot (-160)}{1} = 116; \\ \frac{-1000 \cdot 1 - (-160) \cdot 0}{1} &= -1000; \frac{0 \cdot 1 - (-160) \cdot (-1)}{1} = -160 \end{aligned}$$

Таблица 3.7 – Вторая симплексная таблица

C_i	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные и их коэффициенты			Оценочные отношения
			x_2	x_3	x_7	
			44	1 000	0	
0	x_4	250	0	1	1	$250/1 = 250$
0	x_5	2 950	-2	<u>30</u>	5	$2950/30 = 98,3$ (min)
0	x_6	75 000	0	500	100	$75000/500 = 150$
160	x_1	250	1	0	-1	–
Z_{max}		40 000	116	-1 000	-160	–
$Z(M)$		0	0	0	0	–
C_i – коэффициенты базисных переменных в целевой функции.						

7. Полученный план не является оптимальным, так как в оценочной строке присутствуют отрицательные коэффициенты.

Разрешающим столбцом будет переменная x_3 , а разрешающей строкой переменная x_5 ; разрешающий элемент равен 30 (выделены в таблице 3.7 полужирным начертанием). Так как оценки во второй оценочной строке получили значения равные нулю, то дальнейший расчет ведется обычным симплекс-методом (и будет одна оценочная строка).

Разрешающий элемент = $1/30$.

Разрешающая строка: $2950/30 = 98,3$; $-2/30$; $5/30$.

Разрешающий столбец: $1/30 = -1/30$; $500/30 = -500/30$; 0 ; $-1000/30 = 1000/30$.

Строки x_4 , x_6 и оценочную строку определяем по правилу прямоугольника, применение которого достаточно подробно рассмотрено выше.

8. Построим третью симплексную таблицу (табл. 3.8).

Таблица 3.8 – Третья симплексная таблица

C_i	Базисные переменные	Значения базисных переменных	Свободные переменные и их коэффициенты			Оценочные отношения
			x_2	x_5	x_7	
			44	0	0	
0	x_4	151,6	$2/30$	$-1/30$	$25/30$	–
1 000	x_3	98,3	$-2/30$	$1/30$	$5/30$	–
0	x_6	25 833,3	$1000/30$	$-500/30$	$500/30$	–
160	x_1	250	1	0	-1	–
Z_{max}		138 333,3	$1480/30$	$1000/30$	$200/30$	–
C_i – коэффициенты базисных переменных в целевой функции.						

Так как все коэффициенты при свободных неизвестных в оценочной строке положительны (при отыскании максимальной целевой функции), то полученное решение является оптимальным.

Экономическое содержание решения. Максимальный доход, который можно получить, равен 138 333,3 тыс. руб. На 250 га следует выращивать пшеницу, а 98 га отвести под картофель. Ячмень (x_2) не вошел в базисное решение, значит его выращивать не оптимально.

Площадь в размере 151,6 га будет не засеяна. Денежные ресурсы в сумме 25833,3 тыс. руб. будут не востребованы. При этом сдерживающим фактором являются трудовые ресурсы.

Задание для выполнения

Намечается выпуск трех видов изделий – костюмов женских, костюмов мужских, платьев женских. Требуется определить, сколько изделий каждого вида необходимо сшить, чтобы обеспечить максимальную прибыль. Известно, что прибыль от реализации одного изделия составляет 1,2; 1,8 и 0,8 тыс. руб. соответственно. План производства женских костюмов не менее 40 штук. Нормы затрат и объем ресурсов представлены в таблице 3.9.

Таблица 3.9 – Данные о нормах затрат и объеме ресурсов

Наименование ресурсов	Нормы затрат на одно изделие			Наличие ресурса
	костюм женский	костюм мужской	платье женское	
Шерсть, м	2	3,5	2,5	350
Лавсан, м	2	2,5	0	240
Труд, чел.-дней	1	1,5	1	150

Ответ: $F(40; 64; 14; 11; 0; 0; 0) = 174,4$ тыс. руб.

Контрольные задания

Решите задачи симплексным методом. Дайте экономическое описание оптимального решения.

1. Возделываются культуры: соя, овес, кормовые корнеплоды. Площадь пашни – 500 га, трудовые ресурсы – 4 200 человеко-дней, материально-денежные средства – 1 млн. руб. Посевная площадь овса должна составлять не более 50 га. Данные о затратах и выходе продукции с 1 га приведены в таблице 3.10.

Таблица 3.10 – Исходные данные к заданию 1

Культура	Затраты на 1 га		Выход продукции с 1 га, тыс. руб.
	труд, чел.-дней	материально-денежные, тыс. руб.	
Соя	4,2	3,5	60
Овес	3,0	2,3	75
Кормовые корнеплоды	42,0	25,0	50

Определите оптимальное сочетание посевов сельскохозяйственных культур, обеспечивающее максимум производства валовой продукции.

2. Возделываются следующие культуры: многолетние травы на зеленый корм и на сено; однолетние травы на зеленый корм и на сено. Площадь пашни равна 400 га, трудовые ресурсы – 2 000 человеко-дней, площадь многолетних трав на зеленый корм – не более 100 га. Критерий оптимальности максимум производства кормов со всей площади. Решите задачу оптимального сочетания посевных площадей, используя данные таблицы 3.11.

Таблица 3.11 – Исходные данные к заданию 2

Показатели	Многолетние травы		Однолетние травы	
	на зеленый корм	на сено	на зеленый корм	на сено
Затраты труда на 1 га, чел.-дней	2	3	4	5
Выход кормов с 1 га, т к. ед.	3,0	2,5	2,5	2,0

3. Возделываются культуры: овес, пшеница и картофель. Площадь пашни составляет 700 га, посевная площадь картофеля – не более 200 га. Объем про-

*Тема 3. Симплексный метод решения
задач линейного программирования*

изводства пшеницы – не более 25 т. Урожайность сельскохозяйственных культур (т/га): овес – 2,0; пшеница – 2,5; картофель – 15,0. Уровень закупочных цен (тыс. руб./т): овес – 3,0; пшеница – 3,5; картофель – 6,0. Определите оптимальное сочетание посевных площадей этих культур, обеспечивающее максимум производства продукции в стоимостном выражении.

4. Возделываются три культуры: овес, кукуруза на силос, многолетние травы на сено. Площадь пашни – 600 га, посевная площадь овса не должна превышать 200 га. Трудовые ресурсы составляют 3 000 чел.-дней. С учетом данных таблицы 3.12, найдите оптимальное сочетание посевов этих культур для производства наибольшего количества кормов.

Таблица 3.12 – Исходные данные к заданию 4

Культуры	Выход кормов с 1 га, тонн кормовых единиц	Затраты труда на 1 га, чел.-дней
Овес	2,5	1,5
Кукуруза на силос	2,4	3,0
Многолетние травы на сено	1,6	2,0

5. С учетом данных таблицы 3.13, определите оптимальное сочетание культур, если площадь пашни составляет 1 000 га, объем минеральных удобрений – 85,0 т д. в. Возделываются картофель (его площадь не более 250 га), ячмень, соя. Критерий оптимальности – максимум производства продукции в стоимостном выражении.

Таблица 3.13 – Исходные данные к заданию 5

Культуры	Нормы внесения минеральных удобрений на 1 га, т д. в.	Урожайность, т/га	Закупочная цена за 1 т, тыс. руб.
Картофель	0,3	10,0	3,0
Ячмень	0,1	2,0	3,5
Соя	0,2	1,5	5,5

6. Две культуры (кормовая свекла и кукуруза на силос) могут возделываться или без орошения, или с поливом. Площадь орошаемой пашни 200 га, площадь богарных (неполивных) земель – 600 га. Данные о затратах труда,

нормах полива и выходе кормов приведены в таблице 3.14. Ресурсы труда составляют 12 000 чел.-дней, ресурсы воды – 1 500 тыс. м³.

Определите оптимальное сочетание посевных площадей культур, обеспечивающее максимальное производство кормов.

Таблица 3.14 – Исходные данные к заданию 6

Показатели	Кормовая свекла		Кукуруза на силос	
	без полива	на поливе	без полива	на поливе
Затраты труда на 1 га, чел.-дней	40	50	20	30
Норма полива, тыс. м ³ на 1 га	–	1	–	2
Выход кормов с 1 га, т к. ед.	6	11	4	10

7. Найдите сочетание площадей трех культур при критерии максимизации выхода кормовых единиц. Исходные данные для решения задачи приведены в таблице 3.15. Площадь под корнеплодами составляет не более 300 га.

Таблица 3.15 – Исходные данные к заданию 7

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дни/га	Удобрения, т д. в./га	Выход кормовых единиц, т/га
Кукуруза на силос	–	4	0,3	40
Корнеплоды	–	8	0,5	60
Бахча	–	6	0,2	35
Объем ресурса	1 500	7 000	800	–

8. В хозяйстве для производства трех зерновых культур (пшеницы, овса, ячменя) выделены следующие ресурсы: пашня – 2 000 га; минеральные удобрения – 160 т д. в.; труд – 7 000 чел.-дней. Урожайность, затраты труда, удобрений, себестоимость и цены реализации даны в таблице 3.16.

Таблица 3.16 – Исходные данные к заданию 8

Культуры	Урожайность, т/га	Затраты труда, чел.-дней	Затраты удобрений, т д. в./га	Себестоимость, тыс. руб./т	Цена реализации, тыс. руб./т
Пшеница	2,0	1,4	0,2	2,5	3,5
Овес	1,8	0,7	0,1	1,5	2,8
Ячмень	1,9	1,4	0,1	2,0	3,0

Выполните формализацию задачи оптимизации структуры посевных площадей и решите ее на критерий оптимальности – максимум прибыли.

9. В хозяйстве для возделывания трех овощных культур выделены ресурсы: пашня – 200 га, труд – 14 000 чел.-час, в том числе в напряженный период – 3 850 чел.-час. Затраты труда и прибыль в среднем за три года показаны в таблице 3.17. Выполните решение задачи на критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 3.17 – Исходные данные к заданию 9

Культуры	Затраты труда на 1 га, чел.-час		Прибыль, тыс. руб./т
	всего	в напряженный период	
Капуста	500	175	60
Огурцы	900	140	35
Помидоры	1 000	210	40

10. С учетом исходных данных таблицы 3.18, найдите сочетание посевов трех культур при критерии получения максимума кормовых единиц. Площадь под корнеплодами составляет не более 200 га.

Таблица 3.18 – Исходные данные к заданию 10

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дни/га	Удобрения, т д. в./га	Выход кормовых единиц, т/га
Кукуруза на силос	–	6	0,2	50
Однолетние травы	–	4	0,2	11
Корнеплоды	–	8	0,15	70
Объем ресурса	1 200	4 200	120	–

11. В хозяйстве для возделывания трех кормовых культур выделены ресурсы: пашня – 800 га, труд – 42 000 чел.-дней, в том числе в напряженный период – 8 750 чел.-дней. Нормативы затрат труда и выход кормовых единиц с одного гектара приведены в таблице 3.19.

Выполните решение задачи оптимизации посевных площадей, используя критерий оптимальности – максимальное количество кормовых единиц со всей площади.

Таблица 3.19 – Исходные данные к заданию 11

Культуры	Затраты труда на 1 га, чел.-дней	Затраты труда в напряженный период на 1 га, чел.-дней	Выход кормовых единиц с 1 га, т к. ед.
Ячмень фуражный	2,0	2,5	2,0
Кормовые корнеплоды	28,0	30,0	6,0
Кукуруза не силос	4,0	6,0	5,0

12. В хозяйстве в планируемом периоде предполагают возделывать ячмень, сою, картофель. Ожидаемые затраты механизированных и трудовых ресурсов, а также урожайность и цены реализации показаны в таблице 3.20.

Таблица 3.20 – Исходные данные к заданию 12

Показатели	Ячмень	Соя	Картофель
Затраты труда на 1 га, чел.-дни	2,4	3,0	10
Затраты механизированных ресурсов на 1 га, тракторо-смены	1,6	1,5	4,0
Урожайность, т/га	3,0	1,3	25
Цена реализации, тыс. руб./т	3,5	5,5	3,0

Решите задачу с критерием оптимальности – максимум товарной продукции в стоимостном выражении. При этом выделено пашни – 1 600 га, трудовых ресурсов – 5 400 чел.-дней; затраты тракторов в напряженный период составят 1 380 тракторо-смен.

13. Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры, равна 2 000 га; резерв минеральных удобрений – 160 т д. в., затрат труда – 1 460 чел.-дней. Используя данные таблицы 3.21, требуется определить такое сочетание посевов пшеницы, овса и гречихи, чтобы прибыль была максимальной.

Таблица 3.21 – Исходные данные к заданию 13

Показатели	Культуры		
	пшеница	овес	гречиха
Урожайность, т/га	2,4	3,0	1,2
Затраты труда, чел.-дни/га	1,4	1,5	1,6
Затраты удобрений, 1 т д. в./га	0,1	0,1	0,2
Себестоимость, тыс. руб./т	2,0	1,5	2,2
Цены реализации, тыс. руб./т	3,5	3,5	12,0

14. Найдите сочетание посевных площадей трех культур при получении максимальной прибыли. Площадь под овощами составляет не более 200 га. Исходные данные приведены в таблице 3.22.

Таблица 3.22 – Исходные данные к заданию 14

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дней/га	Удобрения, т д. в./га	Прибыль, тыс. руб./га
Соя	—	2,5	0,1	1,5
Картофель	—	6,0	0,5	10,0
Овощи	—	10,0	1	15,0
Объем ресурса	2 000	1 500	180	—

15. С учетом исходных данных таблицы 3.23, найдите площади посева овощных культур для получения максимума прибыли. Площадь редиса должна составлять не более 200 га.

Таблица 3.23 – Исходные данные к заданию 15

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дней/га	Удобрения, т д. в./га	Прибыль, тыс. руб./га
Свекла	—	8	0,3	80
Редис	—	10	0,1	100
Морковь	—	8	0,4	90
Объем ресурса	600	20 000	500	—

16. Найдите сочетание посевов овощных культур для получения максимальной прибыли. Площадь под петрушкой должна составлять не более 5 га. Исходные данные показаны в таблице 3.24.

Таблица 3.24 – Исходные данные к заданию 16

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дней/га	Удобрения, т д. в./га	Прибыль, тыс. руб./га
Укроп	—	15	0,5	1 000
Петрушка	—	18	0,8	1 200
Салат	—	10	0,8	800
Объем ресурса	20	1 000	300	—

17. Найдите сочетание посевов трех продовольственных культур: ячменя, пшеницы и картофеля. Под посеvy отведено 1 000 га пашни. Общие затраты труда составляют 4 500 чел.-дней. По плану нужно произвести не более 200 т

картофеля. Данные об урожайности, затратах труда и прибыли на 1 га приведены в таблице 3.25. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 3.25 – Исходные данные к заданию 17

Показатели	Ячмень	Пшеница	Картофель
Урожайность, т/га	2,5	2,0	20,0
Затраты труда, чел.-дни/га	2,3	2,9	11,5
Прибыль, тыс. руб./га	1,1	1,5	12,0

18. Требуется найти оптимальное сочетание площади посева культур: капусты, картофеля и многолетних трав на сено при условии, что в хозяйстве имеется 850 га пашни, 50 000 чел.-дней трудовых ресурсов и 15 000 т органических удобрений. Данные о затратах и выходе продукции примите из таблицы 3.26. Критерий оптимальности – максимум валовой продукции.

Таблица 3.26 – Исходные данные к заданию 18

Показатели	Культуры		
	капуста	картофель	многолетние травы
Затраты труда, чел.-дней	50	30	15
Затраты органических удобрений, тыс. руб.	20	15	10
Выход валовой продукции, тыс. руб.	24	5,5	2,5

19. С учетом исходных данных таблицы 3.27, определите оптимальное сочетание площади посевов пшеницы, ячменя и овса. Производственные ресурсы: пашня – 1 600 га, труд – 4 000 чел.-дней, удобрения – 9 000 тыс. руб. Критерий оптимальности – максимум производства зерна.

Таблица 3.27 – Исходные данные к заданию 19

Показатели	Пшеница	Ячмень	Овес
Урожайность, т/га	3,0	2,0	2,5
Затраты труда, чел.-дней/га	3,0	2,5	2,0
Затраты удобрений, тыс. руб./га	4,5	3,5	4,0

TEMA 4.

АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ДВОЙСТВЕННЫХ ОЦЕНОК

Цель: использование методов линейного программирования для проведения послеоптимизационного исследования оптимального решения.

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций найти оптимальный план развития; выполнить его анализ на чувствительность; определить, как возможные изменения ограничений повлияют на полученное раннее оптимальное решение.

Для любой практической задачи линейного программирования недостаточно просто найти оптимальное решение. Целесообразно проводить анализ на чувствительность – исследование зависимости оптимального решения от параметров целевой функции и ограничивающих условий, который выполняется с помощью двойственных оценок.

Двойственные оценки характеризуют ресурсы с точки зрения их степени дефицитности для данной задачи. Двойственные оценки (или теневые цены) – это переменные двойственной задачи.

Двойственная задача по отношению к прямой задаче линейного программирования имеет вид:

$$F(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min$$

При ограничениях:

[illegible]

Двойственная задача может быть экономически интерпретирована следующим образом: найти такой набор цен (оценок) ресурсов $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, чтобы при заданных b_i , c_j и a_{ij} общие затраты на ресурсы были минимальными.

Ход работы:

1. Выполните математическую формализацию прямой задачи ЛП.
2. Решите прямую задачу ЛП.
3. Выполните математическую формализацию двойственной задачи в соответствии с алгоритмом, приведенным на рисунке 4.1.
4. Используя теоремы двойственности, найдите оптимальный план двойственной задачи.
5. Выполните экономическую интерпретацию двойственной задачи на основании свойств двойственных оценок.

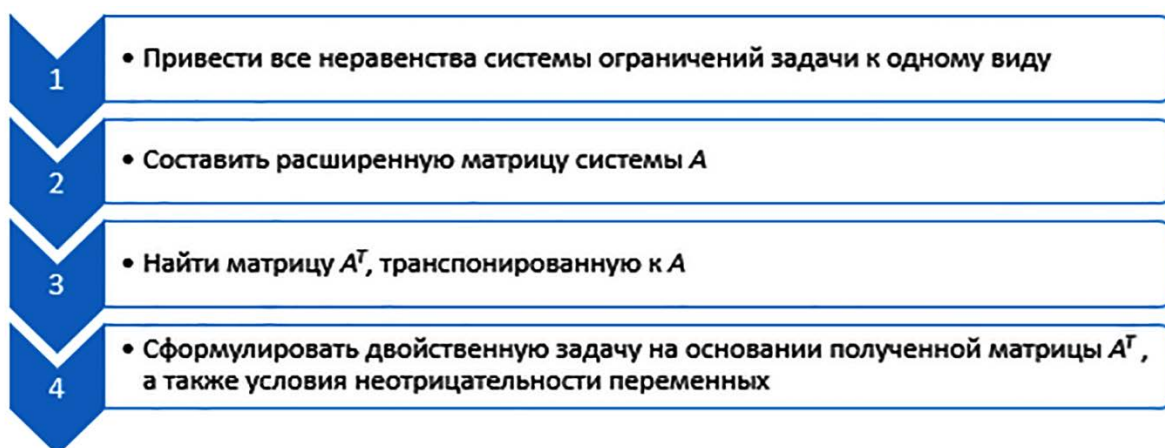


Рисунок 4.1 – Алгоритм составления двойственной задачи

Пример. Определите план выпуска продукции, дающего наибольшую прибыль: $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$, при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 240, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200, \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Решение: Данная задача имеет оптимальное решение:

$$x_1 = 23,53; x_2 = 21,18;$$

$$F(x)_{\max} = 110,6.$$

Составим двойственную задачу:

$$F(y) = 240y_1 + 200y_2 + 360y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 \geq 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 \geq 3, \\ y_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Из первой теоремы двойственности следует:

$$F(x)_{\max} = F(y)_{\min} = 110,6$$

Применим вторую теорему двойственности:

$$\text{если } x_j^{\text{опт}} \neq 0, \text{ то } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^{\text{опт}} = c_j$$

Так как в оптимальном решении исходной задачи $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$, то на оптимальном решении двойственной задачи первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 = 3. \end{cases}$$

Подставим значения переменных x в ограничения исходной задачи:

$$\begin{cases} 3 \cdot 23,53 + 8 \cdot 21,18 = 240, \\ 4 \cdot 23,53 + 5 \cdot 21,18 = 200, \\ 9 \cdot 23,53 + 4 \cdot 21,18 = 296,49 < 360. \end{cases}$$

Из второй теоремы двойственности:

$$\text{если } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^{\text{опт}} \neq b_i, \text{ то } y_i^{\text{опт}} = 0$$

Получили, что третье ограничение выполняется как строгое неравенство типа «меньше». Значит $y_3 = 0$.

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 = 3, \\ y_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 + 4y_2 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $y_1 = 0,12$; $y_2 = 0,41$; $y_3 = 0$.

Экономическая интерпретация решения. В оптимальном решении двойственной задачи $y_3 = 0$; следовательно, третий вид сырья недефицитный, то есть расходуется не полностью; $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, следовательно, первое и второе сырье дефицитные.

Увеличение количества сырья первого и второго вида на единицу приведет к росту прибыли соответственно на 0,12 и 0,41 у. е. Поскольку $y_2 > y_1$, второе сырье оказывает большее влияние на прибыль. Есть смысл увеличивать преимущественно запасы второго сырья.

Задания для выполнения

На основании заданных параметров производственных ситуаций составьте прямую и двойственную задачи. Найдите оптимальное решение обеих задач. На основании свойств двойственных оценок выполните экономическую интерпретацию решения.

1. Предприятие выполняет сборку автомашин двух видов. Для суточного выпуска в наличии имеются материалы: 40 комплектов заготовок металлоконструкций, необходимых для сборки автомашин в количестве 5 и 3 ед. соответственно; 15 комплектов подшипников (соответственно 1 и 2 ед.); 9 двигателей с арматурой и электрооборудованием, необходимых по одному для каждой машины первого вида; 10 двигателей с арматурой и электрооборудованием, необходимых по одному для каждой машины второго вида. Стоимость машин составляет 400 и 310 тыс. руб. соответственно. Найдите план выпуска автомашин, дающий предприятию максимальную выручку.

2. Цех выпускает три вида деталей А, В, С. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе представлена в таблице 4.1. Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Тема 4. Анализ оптимального решения
с помощью двойственных оценок

Таблица 4.1 – Организация производства в цехе

Станок	Длительность обработки детали, мин			Фонд времени, час
	А	В	С	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	10	4	100
Отпускная цена за деталь, руб.	30	32	30	–

3. Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката в следующих объемах: 400 тыс. л. алкилата, 250 тыс. л. крекинг-бензина, 350 тыс. л. бензина прямой перегонки и 200 тыс. л. изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А – 2:3:5:2, бензин В – 3:1:3:1, бензин С – 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов соответственно равна 120; 100 и 150 у. е. Составьте план выпуска разных сортов бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции, если бензина сорта В должно быть произведено не менее 110 ед.

4. Используя исходные данные таблицы 4.2, найдите сочетание площадей трех культур, обеспечивающее получение максимального выхода кормовых единиц, если площадь под корнеплодами не должна превышать 300 га.

Таблица 4.2 – Исходные данные к заданию 4

Культуры	Пашня, га	Труд, чел.-дней/га	Удобрения, т д. в./га	Выход кормовых единиц, т/га
Кукуруза на силос	–	4	0,3	40
Корнеплоды	–	8	0,5	60
Бахча	–	6	0,2	35
Объем ресурса	1 500	7 000	800	–

Ответы к заданиям:

1. $F(5; 5) = F(70; 50; 0; 0) = 3\,550$.
2. $F(400; 0; 900) = F(0; 1; 2, 5) = 39\,000$.
3. $F(0; 110; 20) = F(0; 0; 150; 0; -350) = 14\,000$.
4. $F(1250; 250; 0) = F(20; 5; 0; 0) = 65\,000$.

Контрольные задания

Составьте двойственную задачу. Найдите оптимальное решение задач (прямой, двойственной). На основании свойств двойственных оценок выполните экономическую интерпретацию решения.

$$1. L = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$6. L = 2x_1 + 6x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 6, \\ x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$2. L = 7x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$7. L = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$3. L = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 7, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$8. L = 2x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$4. L = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, 4 \end{cases}$$

$$9. L = 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$5. L = x_1 + 6x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$10. L = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

Контрольные вопросы:

1. В чем заключается анализ на чувствительность?
2. Назовите свойства взаимно двойственных задач.
3. Назовите этапы составления двойственной задачи.
4. Рассмотрите первую теорему двойственности.
5. Рассмотрите вторую теорему двойственности.
6. Что показывают двойственные оценки?
7. Охарактеризуйте свойства двойственных оценок.
8. Чему равна двойственная оценка, если ресурс избыточный?

ТЕМА 5.

**РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Цель: освоение методов оптимальных решений задач линейного программирования.

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций составить опорный план одним из методов (северо-западного угла, аппроксимации) с дальнейшим улучшением плана методом потенциалов.

Первоначально к классу задач, решаемых распределительным методом, относили задачи, связанные с транспортировкой грузов, распределением продукции пунктов отправления для перевозки в пункты потребления. Содержание таких задач определяется постановкой транспортной задачи линейного программирования: *определить оптимальный план перевозок некоторого однородного груза из пунктов отправления $A_1, A_2, \dots, A_m$ в пункты назначения $B_1, B_2, \dots, B_n$, при котором общие транспортные расходы будут минимальными:*

$$Z = \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Ограничения будут иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i; i = 1, 2, \dots, m - \text{все запасы должны быть перевезены;} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j; j = 1, 2, \dots, n - \text{все потребности должны быть удовлетворены;} \\ x_{ij} \geq 0 - \text{условия неотрицательности переменных} \end{array} \right.$$

При этом Z – общие транспортные расходы; c_{ij} – стоимость транспортной единицы ресурса от i -го источника к j -му потребителю (задается матрицей);

*Тема 5. Распределительный метод
в решении задач линейного программирования*

x_{ij} – количество ресурса, трансформируемого от i -го источника к j -му потребителю (задается матрицей); a_i – запасы ресурса в источниках; b_j – потребности ресурса потребителями.

Такая запись ограничений соответствует требованию равенства суммарного запаса общей потребности и указывает на сбалансированность (закрытость) задачи. В противном случае задача будет несбалансированной (открытой).

Ход работы:

1. Выполните математическую формализацию задачи.
2. Определите опорный план методом аппроксимации (или методом северо-западного угла).
3. Найдите оптимальный план методом потенциалов.
4. Выполните анализ оптимального плана.

Пример 1. С учетом исходных данных таблицы 5.1, найдите оптимальное распределение объемов кормов по минимуму суммарных затрат на перевозку. Затем выполните перераспределение площадей участков с целью устранения недостатков землепользования. При вычислении площадей предположите, что урожайность кормов для всех участков составляет 40 ц к. ед. /га.

Таблица 5.1 – Исходные данные примера 1

Подразделения	Удельные затраты на перевозку, тыс. руб./ т к. ед.							Объем производства кормов в подразделении, т к. ед.
	«Заря»		«Родина»		«Победа»			
	номер участка							
	1	2	3	4	5	6	7	
«Заря»	4	10	19	24	7	16	6	8 000
«Родина»	15	2	32	5	45	16	25	7 009
«Победа»	7	24	17	16	12	3	28	10 000
Объем производства кормов на участке, т к. ед.	2 000	2 500	3 500	4 509	2 500	9 000	1 000	—

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин. План перераспределения объемов кормов: x_{ij} – количество ресурса, трансформируемого от i -го источника к j -му потребителю, в тоннах кормовых единиц.

2. Ограничения задачи. Так как задача является сбалансированной (закрытой), а именно $\sum a_i = \sum b_j = 25009$ га, то ограничения примут вид:

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} + x_{17} &= 8000 \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} &= 7009 \\x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} &= 10000 \\x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 2000 \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 2500 \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 3500 \\x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 4509 \\x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 2500 \\x_{16} + x_{26} + x_{36} &= 9000 \\x_{17} + x_{27} + x_{37} &= 1000 \\x_{11} \geq 0, \dots, x_{37} &\geq 0\end{aligned}$$

3. Критерий оптимальности – общие минимальные транспортные расходы (тыс. руб.). При этом целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned}Z = & 4x_{11} + 10x_{12} + 19x_{13} + 24x_{14} + 7x_{15} + 16x_{16} + 6x_{17} + \\& + 15x_{21} + 2x_{22} + 32x_{23} + 5x_{24} + 45x_{25} + 16x_{26} + 25x_{27} + \\& + 7x_{31} + 24x_{32} + 17x_{33} + 16x_{34} + 12x_{35} + 3x_{36} + 28x_{37} \rightarrow \min\end{aligned}$$

Решение:

1. Начальный опорный план (метод аппроксимации) представлен на рисунке 5.1.

$$\begin{aligned}Z \text{ (суммарные затраты)} &= 4 \cdot 1000 + 19 \cdot 3500 + 7 \cdot 2500 + \\& + 6000 + 5000 + 5 \cdot 4509 + 7000 + 27000 = 155545\end{aligned}$$

План – вырожденный, так как количество занятых клеток 8, а должно быть $N = 3 + 7 - 1 = 9$. Поэтому в свободную клетку нужно поставить нуль, чтобы условие выполнялось.

Тема 5. Распределительный метод
в решении задач линейного программирования

Подразделение	Удельные затраты на перевозку, тыс. руб./ т к. ед.							Объем производства кормов в подразделе- нии, т к. ед.	Шар 1	Шар 2	Шар 3	Шар 4	Шар 5
	«Заря»		«Родина»		«Победа»								
	Номер участка												
	1	2	3	4	5	6	7						
«Заря»	4	10	19	24	7	16	6	8 000	2	3	3	3	3
	1 000		3 500		2 500		1 000						
«Родина»	15	2	32	5	45	16	25	7 009	3	3	3	13*	—
		2 500		4 509									
«Победа»	7	24	17	16	12	3	28	10 000	4	4	5	5	5*
	1 000					9 000							
Объем производ- ства кормов на участке, т к. ед.	2 000	2 500	3 500	4 509	2 500	9 000	1 000						
Шар 1	3	8	2	11	5	13	19*						
Шар 2	3	8	2	11	5	13*	—						
Шар 3	3	8	2	11*	5	—	—						
Шар 4	3	8	2	—	5	—	—						
Шар 5	3	—	2	—	5	—	—						

Рисунок 5.1 – Начальный опорный план (метод аппроксимации)

2. Улучшение плана методом потенциалов показано на рисунке 5.2.

Подразделение	Удельные затраты на перевозку, тыс. руб./ т к. ед.							Объем производства кормов в подразделе- нии, т к. ед.	
	«Заря»		«Родина»		«Победа»				
	Номер участка								
	1	2	3	4	5	6	7		
«Заря»	4	10	19	24	7	16	6	8 000	$u_1 = 0$
	1 000	0	3 500	11	2 500	16	1 000		
	+		-						
«Родина»	15	2	32	5	45	16	25	7 009	$u_2 = -8$
	19	2 500	21	4 509	46	24	27		
«Победа»	7	24	17	16	12	3	28	10 000	$u_3 = 3$
	1 000	11	-5	0	2	9 000	19		
	-		+						
Объем производ- ства кормов на участке, т к. ед.	2 000	2 500	3 500	4 509	2 500	9 000	1 000		
	$v_1 = 4$	$v_2 = 10$	$v_3 = 19$	$v_4 = 13$	$v_5 = 7$	$v_6 = 0$	$v_7 = 6$		

Рисунок 5.2 – Улучшение плана методом потенциалов

Положим, что $u_1 = 0$, тогда:

$$u_1 + v_1 = 4 \rightarrow v_1 = 4; u_1 + v_2 = 10 \rightarrow v_2 = 10;$$

$$u_1 + v_3 = 19 \rightarrow v_3 = 19; u_1 + v_5 = 7 \rightarrow v_5 = 7;$$

$$u_1 + v_7 = 6 \rightarrow v_7 = 6; u_2 + v_2 = 2 \rightarrow u_2 = -8;$$

$$u_2 + v_4 = 5 \rightarrow v_4 = 13; u_3 + v_1 = 7 \rightarrow u_3 = 3;$$

$$u_3 + v_6 = 3 \rightarrow v_6 = 0$$

Определим отклонения:

$$S_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$S_{14} = 24 - (13 + 0) = 11; S_{16} = 16 - (0 + 0) = 16;$$

$$S_{21} = 15 - (4 - 8) = 19; S_{23} = 32 - (19 - 8) = 21;$$

$$S_{25} = 45 - (7 - 8) = 46; S_{26} = 16 - (0 - 8) = 24;$$

$$S_{27} = 25 - (6 - 8) = 27; S_{32} = 24 - (10 + 3) = 11;$$

$$S_{33} = 17 - (19 + 3) = -5; S_{34} = 16 - (13 + 3) = 0;$$

$$S_{35} = 12 - (7 + 3) = 2; S_{37} = 28 - (6 + 3) = 19$$

Начальный план не оптимален, поскольку содержит отрицательное отклонение (-5) , поэтому подлежит улучшению.

Получаем цикл: $17(+)-7(-)-4(+)-19(-)-17(+)$.

К объемам в клетках, помеченных знаком «+», добавляем минимальную перевозку, равную 1 000. К объемам в клетках, помеченных знаком «-», уменьшаем значение на 1 000.

Произойдет уменьшение целевой функции на $5 \times 1000 = 5000$. Таким образом, величина Z составит 150 545 тыс. руб.

$$u_3 + v_3 = 17; u_3 = -2;$$

$$S_{31} = 7 - (4 - 2) = 5; S_{32} = 24 - (10 - 2) = 16;$$

$$S_{34} = 16 - (13 - 2) = 5; S_{35} = 12 - (7 - 2) = 7;$$

$$S_{37} = 28 - (6 - 2) = 24$$

Все отклонения в полученном плане имеют положительные значения, а значит, план оптимален (рис. 5.3). Таким образом, минимальные транспортные издержки составляют 150 545 тыс. руб.

Подразделение	Удельные затраты на перевозку, тыс. руб./т к. ед.							Объем производства кормов в под- разделении, т к. ед.	
	«Заря»		«Родина»		«Победа»				
	Номер участка								
	1	2	3	4	5	6	7		
«Заря»	4	10	19	24	7	16	6	8 000	$u_1 = 0$
	2 000	0	2 500	11	2 500	16	1 000		
«Родина»	15	2	32	5	45	16	25	7 009	$u_2 = -8$
	19	2 500	21	4 509	46	24	27		
«Победа»	7	24	17	16	12	3	28	10 000	$u_3 = -2$
	5	16	1 000	5	7	9 000	24		
Объем производ- ства кормов на участке, т к. ед.	2 000	2 500	3 500	4 509	2 500	9 000	1 000		
	$v_1 = 4$	$v_2 = 10$	$v_3 = 19$	$v_4 = 13$	$v_5 = 7$	$v_6 = 0$	$v_7 = 6$		

Рисунок 5.3 – Оптимальный план

Анализ решения. Площади по оптимальному решению распределятся следующим образом: участок 1 – 500 га; участок 2 – 625 га; участок 3 – 875 (625 + 250) га; участок 4 – 1 127,25 га; участок 5 – 625 га; участок 6 – 2 250 га; участок 7 – 250 га.

Для достижения минимальных суммарных транспортных расходов следует выполнить перераспределение площадей следующим образом: «Заря» передает участок 2 подразделению «Родина» в обмен на участок 5, а также часть участка 3 в размере 250 га подразделению «Победа» в обмен на участок 7.

Пример 2. Определите оптимальное размещение угодий и севооборотов на участках различного сельскохозяйственного использования с последующей трансформацией угодий по максимуму чистого дохода. Исходные данные для решения примера приведены в таблице 5.2.

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин. План перераспределения площадей: x_{ij} – площадь угодий и севооборотов на участках, га.

Таблица 5.2 – Исходные данные к примеру 2

Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке определенного севооборота (угодья), руб./га					Проектные площади угодий и севооборотов, га
	1	2	3	4	5	
	пастбище	пашня	пашня	пашня	сенокосы	
Кормовой севооборот	600	1 400	800	500	440	759
Полевой севооборот	1 500	2 900	2 100	2 800	2 000	610
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	140
Площади участков, га	250	239	540	330	150	–

2. Ограничения задачи. Так как задача является сбалансированной (закрытой), а именно $\sum a_i = \sum b_j = 1509$ га, то ограничения примут вид:

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 759 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 610 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 140 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 250 \\
 x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 239 \\
 x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 540 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 330 \\
 x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 150 \\
 x_{11} \geq 0, \dots, x_{35} &\geq 0
 \end{aligned}$$

3. Критерий оптимальности – суммарный максимальный чистый доход. При этом целевая функция имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Z = & 600x_{11} + 1400x_{12} + 800x_{13} + 500x_{14} + 440x_{15} + \\
 & + 1500x_{21} + 2900x_{22} + 2100x_{23} + 2800x_{24} + 2000x_{25} + \\
 & + 550x_{31} + 440x_{32} + 380x_{33} + 300x_{34} + 700x_{35} \rightarrow \max
 \end{aligned}$$

Решение:

1. Начальный опорный план (метод северо-западного угла) представлен на рисунке 5.4.

$$\begin{aligned}
 Z \text{ (чистый доход)} &= 600 \cdot 250 + 1400 \cdot 239 + 800 \cdot 270 + \\
 &+ 2100 \cdot 270 + 2800 \cdot 330 + 2000 \cdot 10 + 700 \cdot 140 = 2309600
 \end{aligned}$$

Тема 5. Распределительный метод
в решении задач линейного программирования

Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке определенного севооборота (угодья), руб./га					Проектные площади угодий и севооборотов, га
	1	2	3	4	5	
	пастбище	пашня	пашня	пашня	сенокосы	
Кормовой севооборот	600	1 400	800	500	440	759
	250	239	270			
Полевой севооборот	1 500	2 900	2 100	2 800	2 000	610
			270	330	10	
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	140
					140	
Площади участков	250	239	540	330	150	$Z = 2\,309\,600$

Рисунок 5.4 – Начальный опорный план (метод северо-западного угла)

План является базисным и невырожденным, так как содержит:

$$m + n - 1 = 7 \text{ занятых клеток.}$$

2. Улучшение плана методом потенциалов показано на рисунке 5.5.

Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке определенного севооборота (угодья), руб./га					Проектные площади угодий и севооборотов, га	
	1	2	3	4	5		
	пастбище	пашня	пашня	пашня	сенокосы		
Кормовой севооборот	600	1 400	800	500	440	759	$u_1 = 0$
	250	239 -	+270	-1 000	-260		
Полевой севооборот	1 500	2 900	2 100	2 800	2 000	610	$u_2 = 1300$
	-400	200+	-270	330	10		
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	140	$u_3 = 0$
	-50	-960	-420	-1 200	140		
Площади участков	250	239	540	330	150		
	$v_1 = 600$	$v_2 = 1400$	$v_3 = 800$	$v_4 = 1500$	$v_5 = 700$		

Рисунок 5.5 – Улучшение плана методом потенциалов

Положим, что $u_1 = 0$, тогда:

$$u_1 + v_1 = 600 \rightarrow v_1 = 600; u_1 + v_2 = 1400 \rightarrow v_2 = 1400;$$

$$u_1 + v_3 = 800 \rightarrow v_3 = 800; u_2 + v_3 = 2100 \rightarrow u_2 = 1300;$$

$$u_2 + v_4 = 2800 \rightarrow v_4 = 1500; u_2 + v_5 = 2000 \rightarrow v_5 = 700;$$

$$u_3 + v_5 = 700 \rightarrow v_3 = 0$$

Определим отклонения:

$$S_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$S_{14} = 500 - (1500 + 0) = -1000; S_{15} = 440 - (700 + 0) = -260;$$

$$S_{21} = 1500 - (600 + 1300) = -400; S_{22} = 2900 - (1400 + 1300) = 200;$$

$$S_{31} = 550 - (600 + 0) = -50; S_{32} = 440 - (1400 + 0) = -960;$$

$$S_{33} = 380 - (800 + 0) = -420; S_{34} = 300 - (1500 + 0) = -1200$$

Для задачи максимизации план является оптимальным, если все отклонения отрицательны. Полученный план является неоптимальным, так как одно отклонение (S_{22}) положительно. План подлежит улучшению (рис. 5.6).

Угодья и севообороты	Чистый доход при размещении на данном участке определенного севооборота (угодья), руб./га					Проектные площади угодий и севооборотов, га	
	1	2	3	4	5		
	пастбище	пашня	пашня	пашня	сенокосы		
Кормовой севооборот	600	1 400	800	500	440	759	$u_1 = 0$
	250	-200	509	-1 000	-260		
Полевой севооборот	1 500	2 900	2 100	2 800	2 000	610	$u_2 = 1300$
	-400	239	31	330	10		
Улучшенные сенокосы	550	440	380	300	700	140	$u_3 = 0$
	-50	-1 160	-420	-1 200	140		
Площади участков	250	239	540	330	150	$Z = 2\,357\,400$	
	$v_1 = 600$	$v_2 = 1600$	$v_3 = 800$	$v_4 = 1500$	$v_5 = 700$		

Рисунок 5.6 – Оптимальный план

Положим, что $u_1 = 0$, тогда:

$$u_2 + v_2 = 2900 \rightarrow v_2 = 1600$$

Определим отклонения:

$$S_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j)$$

$$S_{12} = 1400 - 1600 = -200; S_{32} = 440 - 1600 = -1160$$

Все отклонения отрицательны. Следовательно, полученный нами план является оптимальным.

Анализ решения. Начальный опорный план размещения угодий и севооборотов на участках давал суммарный чистый доход 2 309 600 руб.

В результате улучшения плана, чистый доход вырос на 47 800 руб. (239×200) и составил 2 357 400 руб.

Улучшение произошло за счет перераспределения пашни второго и третьего участков. Следует трансформировать:

- 1) на втором участке пашню в размере 239 га из кормового севооборота перевести в полевой;
- 2) на третьем участке выполнить обратную трансформацию (239 га пашни перевести из полевого севооборота в кормовой);
- 3) улучшенные сенокосы в размере 140 га разместить на пятом участке;
- 4) 10 га пятого участка отвести под полевой севооборот.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО РАЗДЕЛУ I

1. Основной метод исследования сложных систем – это метод...

- 1) классификации;
- 2) имитации;
- 3) моделирования;
- 4) редуцирования;
- 5) фантазирования.

2. Экономико-математические задачи, цель которых состоит в нахождении наилучшего с точки зрения некоторого критерия или критериев варианта использования имеющихся ресурсов (труда, капитала и др.), называются:

- 1) балансовыми;
- 2) эконометрическими;
- 3) оптимизационными;
- 4) производственными.

3. Линейное программирование – это ...

1) раздел математического программирования, в котором целевой функцией или ограничением является нелинейная функция;

2) раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума (максимума или минимума) линейных функций нескольких переменных при линейных ограничениях, наложенных на переменные;

3) метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, с которой проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе;

4) раздел математики, целью исследований которого выступает рациональный выбор структуры системы обслуживания и процесса обслуживания

на основе изучения потоков требований на обслуживание, поступающих в систему и выходящие из нее, длительности ожидания и длины очередей.

4. Любая экономико-математическая задача линейного программирования состоит из:

- 1) целевой функции и системы ограничений;
- 2) целевой функции, системы ограничений и условия неотрицательности переменных;
- 3) системы ограничений и условия неотрицательности переменных;
- 4) целевой функции и условия неотрицательности переменных.

5. Общая задача линейного программирования может включать в себя:

- 1) систему ограничений в виде неравенств;
- 2) систему ограничений в виде равенств;
- 3) требования оптимизации нелинейной целевой функции;
- 4) требования оптимизации линейной целевой функции.

6. Экономический показатель, на основании которого осуществляется выбор лучшего управленческого решения, называется:

- 1) критерий оптимальности;
- 2) показатель эффективности;
- 3) выборочная статистика;
- 4) целевая функция.

7. Выберите правильное определение критерия оптимальности:

- 1) критерий оптимальности – это максимизируемая в задаче величина;
- 2) критерий оптимальности – это экономический показатель, на основании которого осуществляется выбор лучшего управленческого решения;

3) критерий оптимальности – это значение экономической переменной, которое удовлетворяет всем ограничениям;

4) критерий оптимальности – это экономическое решение, которое дает максимум прибыли при минимуме затрат.

8. Укажите на рисунке 1 точку минимума целевой функции на области допустимых решений при решении экономико-математической задачи с двумя переменными графическим методом:

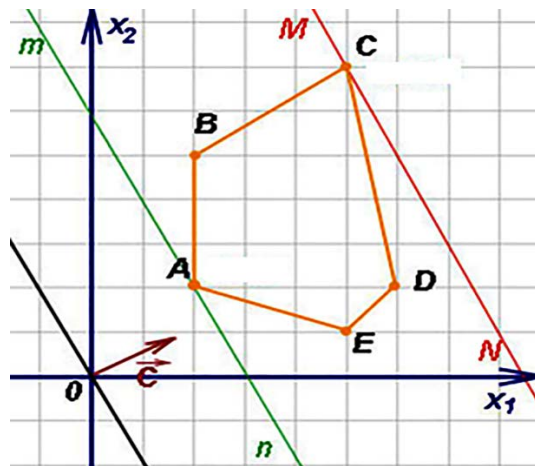


Рисунок 1

9. Укажите на рисунке 1 область допустимых решений при решении экономико-математической задачи с двумя переменными графическим методом:

- 1) нет такой области;
- 2) x_1x_2 ;
- 3) nm ;
- 4) I квадрант;
- 5) $ABCDE$.

10. Симплексный метод решения задач линейного программирования включает:

- 1) определение одного из допустимых базисных решений поставленной задачи (опорного плана);
- 2) определение правила перехода к не худшему решению;
- 3) проверку оптимальности найденного решения;
- 4) построение графика на координатной плоскости.

11. Симплексный метод – вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решения при переходе от одной базисной

точки (базисного решения) к другой. При этом значение целевой функции...

- 1) улучшается;
- 2) уменьшается;
- 3) ухудшается;
- 4) увеличивается.

12. Критерием прекращения счета симплекс-методом задачи линейного программирования на максимизацию целевой функции является:

- 1) отсутствие положительных значений в индексной строке;
- 2) все элементы в индексной строке положительны;
- 3) отсутствие нулевых значений в индексной строке;
- 4) целевая функция имеет ненулевое значение.

13. Разрешающий столбец при решении задачи линейного программирования симплекс-методом на максимум целевой функции выбирается исходя из условия:

- 1) наибольшее положительное значение коэффициента C_j целевой функции в индексной строке;
- 2) наименьшее положительное значение коэффициента C_j целевой функции в индексной строке;
- 3) наибольшее отрицательное значение коэффициента C_j целевой функции в индексной строке;
- 4) наименьшее отрицательное значение коэффициента C_j целевой функции в индексной строке.

14. Дана следующая задача линейного программирования:

Предприятие может выпускать изделия трех видов, которые продаются по ценам соответственно 30; 40 и 60 у. е. за штуку. Трудовые ресурсы предприятия ограничены величиной 180 чел.-час. На производство одного изделия первого вида затрачивается 5 чел.- час, второго вида – 6 чел.-час, а производство одного изделия третьего вида требует 12 чел-час. Найдите оптимальную

производственную программу выпуска изделий трех видов, которая обеспечивает предприятию максимальную выручку.

Выберите правильный вариант системы ограничений:

$$1) \begin{cases} 30x_1 + 40x_2 + 60x_3 \leq 180 \\ x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases};$$

$$2) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 180 \\ x_1 \geq 30 \quad x_2 \geq 40 \quad x_3 \geq 60 \end{cases};$$

$$3) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 \geq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases};$$

$$4) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 \leq 180 \\ x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \end{cases};$$

$$5) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 12x_3 \geq 0 \\ x_1 \geq 30 \quad x_2 \geq 40 \quad x_3 \geq 60 \end{cases};$$

15. На кондитерской фабрике весь ассортимент выпускаемой карамели разделен на три однородные группы, условно обозначенные K_1 , K_2 , K_3 . Расход основного сырья и его запас указаны в таблице 1. Другие виды сырья, входящие в готовый продукт в небольших количествах, не учитываются. Составьте план производства карамели, при котором достигается максимум прибыли.

Таблица 1 – Расход и запасы основного сырья

Виды основного сырья	Расход сырья на 1 т			Общий запас сырья
	K_1	K_2	K_3	
I (сахарный песок)	0,7	0,7	0,7	700
II (патока)	0,3	0,3	0,2	300
III (фруктовое пюре)	0	0,2	0,3	150
Уровень прибыли	100	110	120	–

Укажите правильный вариант выбора переменных:

1) x_1, x_2, x_3 – количество карамели каждой группы;

2) x_1, x_2, x_3 – количество используемого сахарного песка, патоки и фруктового пюре;

3) x_1, x_2, x_3 – прибыль от производства карамели каждой группы.

16. На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов (I, II, III). Выпускаются три вида запасных частей (1, 2, 3) в количестве 20; 10; 30 штук соответственно. Характеристика организации производства представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Характеристика организации производства запасных частей

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг			Запас ресурсов, кг
	1	2	3	
I	5	5	2	210
II	4	–	3	180
III	5	8	6	390
Прибыль от реализации одной запасной части, у. е.	3	2	5	–

Какая прибыль будет получена?

- 1) 60 у. е.;
- 2) 230 у. е.;
- 3) 2 300 у. е.;
- 4) 10 у. е.

17. На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов (I, II, III). Выпускаются три вида запасных частей (1, 2, 3) в количестве 20; 10; 30 штук соответственно. Характеристика организации производства представлена в таблице 2. Какой ресурс будет использован полностью?

- 1) I;
- 2) II;
- 3) III;
- 4) все.

18. Для взаимно-двойственных задач линейного программирования характерно:

- 1) в общих задачах ищется максимум или в обоих – минимум;
- 2) в одной задаче ищется максимум, в другой – минимум;

3) матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач совпадают;

4) матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг другу.

19. Согласно первой теореме двойственности:

1) если одна задача имеет оптимальное решение, то двойственная задача оптимального решения не имеет;

2) если одна задача имеет оптимальное решение, то двойственная задача тоже имеет оптимальное решение;

3) если линейная функция одной из задач не ограничена, то условия двойственной задачи противоречивы;

4) если линейная функция одной из задач не ограничена, то линейная функция двойственной задачи тоже не ограничена.

20. Целевая функция транспортной задачи обычно записывается так, чтобы:

1) суммарные затраты стремились к нулю;

2) суммарные затраты стремились к минимуму;

3) суммарная прибыль стремилась к максимуму;

4) суммарные затраты стремились к максимуму.

21. Транспортная задача называется закрытой, если ...

1) суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей;

2) суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, больше суммарного спроса потребителей;

3) суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, меньше суммарного спроса потребителей;

4) суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, неравен суммарному спросу потребителей.

22. Метод северо-западного угла в задаче «поставщик» – «потребитель»

заключается в следующих шагах:

- 1) переменной x_{11} дается минимально возможное значение;
- 2) переменной x_{11} дается максимально возможное значение;
- 3) после вычеркивания первого столбца северо-западным элементом будет являться элемент x_{12} ;
- 4) после вычеркивания первого столбца северо-западным элементом будет являться элемент x_{11} ;
- 5) после вычеркивания первого столбца северо-западным элементом будет являться элемент x_{21} .

23. Распределенный метод решения транспортной задачи:

- 1) поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках цикла со знаком «+»;
- 2) поставка, передаваемая по циклу, определяется как минимум среди поставок в клетках цикла со знаком «-»;
- 3) поставка, передаваемая по циклу, не может быть ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком «-»;
- 4) поставка, передаваемая по циклу, не может быть ни меньше, ни больше минимума поставок клеток цикла со знаком «+».

24. Промышленный концерн имеет два завода и пять складов. Ежемесячно первый завод производит 40 ед. продукции, второй – 70 ед. продукции. Вся продукция, произведенная заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции; второго – 30; третьего – 15; четвертого – 27; пятого – 28 ед. продукции. Издержки транспортировки продукции заданы матрицей $\begin{pmatrix} 250 & 480 & 650 & 500 & 720 \\ 450 & 525 & 630 & 560 & 750 \end{pmatrix}$. К какому типу относится данная задача?

РАЗДЕЛ II.

ПОЛУЧЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СРЕДСТВАМИ EXCEL

Электронные таблицы используются во всех сферах профессиональной деятельности, особенно широко в аналитической деятельности, в частности при поиске оптимальных решений.

Для поиска оптимальных решений Excel содержит программную надстройку **Поиск решения**, которую при первом использовании следует активизировать: меню *Файл*, *Параметры*, пункт *Надстройки*, кнопка *Перейти*, флажок *Поиск решения*.

ТЕМА 6.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ПРИ ПЛАНИРОВАНИИ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ НА ПРЕДПРИЯТИИ

Цель: *приобретение навыков решения задач линейного программирования в табличном процессоре Excel.*

Задачи: решить задачи линейного программирования, используя программную надстройку *Поиск решения*.

6.1 Технология решения задачи в программе Excel

Пример 1. Площадь пашни, отводимая под зерновые культуры, составляет 1 000 га; резерв минеральных удобрений – 160 т д. в.; имеется 1 460 человеко-дней трудовых ресурсов. Площадь гречихи должна составлять не более 300 га. План производства пшеницы – не менее 1 200 т. Определите такое сочетание посевов овса, пшеницы и гречихи, чтобы прибыль при этом была максимальной. Нормы затрат и выход продукции представлены в таблице 6.1.

Тема 6. Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии

Таблица 6.1 – Нормы затрат и выход продукции

Показатели	Культуры		
	овес	пшеница	гречиха
Урожайность, т/га	2,4	3,0	1,2
Затраты труда, чел-дней/га	1,4	1,5	1,6
Затраты удобрений, 1 т д. в./га	0,1	0,1	0,2
Себестоимость, тыс. руб./т	2,0	1,7	2,2
Цена реализации, тыс. руб./т	3,5	3,5	12,0

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_1 – площадь овса, га;

x_2 – площадь пшеницы, га;

x_3 – площадь гречихи, га.

2. Ограничения задачи:

1) по площади пашни, га:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000;$$

2) по минеральным удобрениям, т д. в.:

$$0,1 x_1 + 0,1 x_2 + 0,2 x_3 \leq 160;$$

3) по использованию трудовых ресурсов, чел-дни:

$$1,4 x_1 + 1,5 x_2 + 1,6 x_3 \leq 1460;$$

4) по площади гречихи, га: $x_3 \leq 300$;

5) по плану производства пшеницы, т: $3 x_2 \geq 1200$.

Условия неотрицательности основных переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$.

3. Критерий оптимальности – максимум прибыли, тыс. руб.

При этом **прибыль в расчете на один гектар определяется как разность между ценой реализации и себестоимостью единицы продукции, умноженная на урожайность.**

$$C_1 = (3,5 - 2) \times 2,4 = 3,6;$$

$$C_2 = (3,5 - 1,7) \times 3 = 5,4;$$

$$C_3 = (12 - 2,2) \times 1,2 = 11,76.$$

Целевая функция: $F(x) = 3,6 x_1 + 5,4 x_2 + 11,76 x_3 \rightarrow \max$.

4. Табличная форма экономико-математической задачи представлена в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Табличная форма экономико-математической задачи

Ограничения	Переменные			Тип ограничения	Правая часть
	x_1 – площадь овса, га	x_2 – площадь пшеницы, га	x_3 – площадь гречихи, га		
По площади пашни, га	1	1	1	$\leq$	1 000
По минеральным удобрениям, т д. в.	0,1	0,1	0,2	$\leq$	160
По трудовым ресурсам, чел-дни	1,4	1,5	1,6	$\leq$	1 460
По площади гречихи, га	–	–	1	$\leq$	300
По плану производства пшеницы, т	–	3,0	–	$\geq$	1 200
$F(x)$, тыс. руб.	3,6	5,4	11,76	$\rightarrow$	$\max$

Ход решения:

1. Вводим на рабочий лист экранную форму экономико-математической задачи (рис. 6.1).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Ограничения	Переменные			Решение	Тип ограничения	Правая часть
2		x_1 – площадь овса, га	x_2 – площадь пшеницы, га	x_3 – площадь гречихи, га			
3	По площади пашни, га	1	1	1		$\leq$	1000
4	По минеральным удобрениям, т д. в.	0,1	0,1	0,2		$\leq$	160
5	По трудовым ресурсам, чел-дни	1,4	1,5	1,6		$\leq$	1460
6	По площади гречихи, га			1		$\leq$	300
7	По плану производства пшеницы, т		3			$\geq$	1200
8	$F(x)$, тыс. руб.	3,6	5,4	11,76		$\rightarrow$	$\max$
9	Значения переменных	0	0	0	×	×	×

Рисунок 6.1 – Экранная форма задачи

2. В ячейку E3 вводим формулу левой части ограничения по площади. Для этого нажимаем кнопку f_x в строке формул и выбираем функцию суммирования произведений: СУММПРОИЗВ (массив1; массив2).

В диалоговом окне СУММПРОИЗВ (рис. 6.2) в качестве первого массива указываем диапазон ячеек, содержащих технико-экономические коэффициенты для первого ограничения (B3:D3). В качестве второго массива указываем диапазон ячеек, содержащих значения переменных, которые изначально равны нулю (B9:D9). Ссылку второго массива необходимо сделать абсолютной (\$B\$9:\$D\$9), нажав клавишу F4.

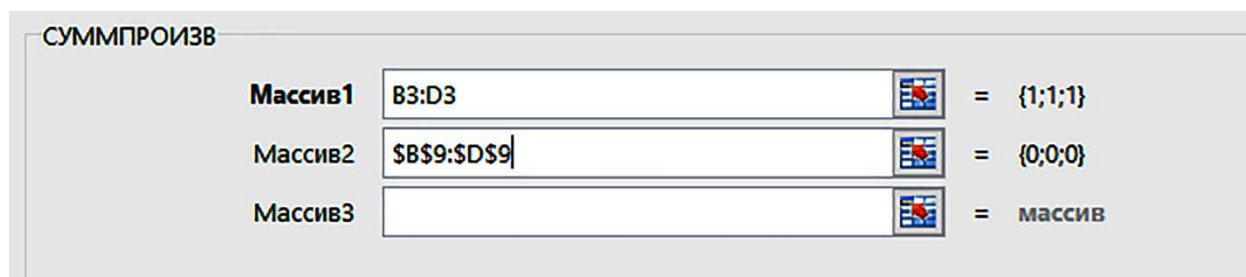


Рисунок 6.2 – Ввод формулы суммирования произведений

Абсолютные ссылки в формулах не изменяются при копировании формул, а относительные – изменяются в направлении копирования.

3. Выполним копирование формулы по графе *Решение* для других ограничений и для целевой функции (автозаполнение).

4. Откроем программную надстройку **Поиск решения**, выполнив команду *Данные, Поиск решения*.

5. В открывшемся диалоговом окне *Параметры поиска решения* в поле *Оптимизировать целевую функцию* вводим адрес ячейки, в которой находится формула целевой функции (E8).

6. Установим переключатель, указывающий к какому значению стремится целевая функция (максимальному, минимальному, заданному).

7. В поле *Изменяя ячейки переменных* вводим ссылку на значения переменных, которые изначально неизвестны и равны нулю (B9:D9).

8. Для задания ограничений нажимаем кнопку **Добавить** (рис. 6.3).

Если несколько смежных ограничений имеют одинаковый тип, то можно задавать ссылки сразу на несколько ограничений, выделяя диапазоны ячеек.

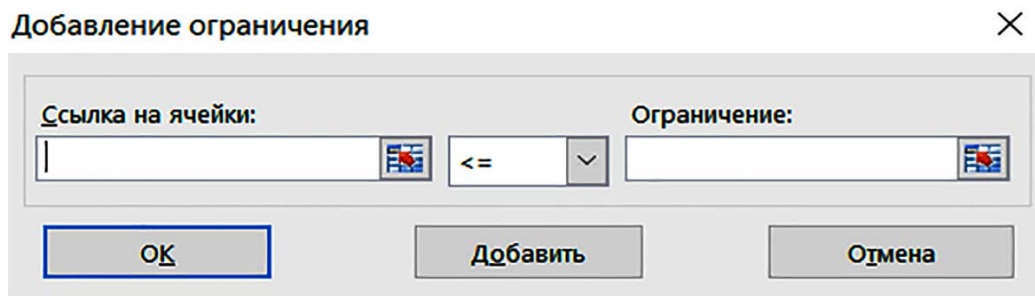


Рисунок 6.3 – Ввод ограничений

Для построчного ввода ограничений выполняем следующие шаги:

- 1) в поле *Ссылка на ячейки* вводим ссылку на ячейку, содержащую формулу, которая определяет левую часть ограничения (E3);
- 2) во втором поле выбираем тип ограничения ($\leq$);
- 3) в поле *Ограничение* вводим ссылку на ячейку, содержащую значение ограничения (G3);
- 4) нажимаем кнопку *Добавить* и вводим следующее ограничение.

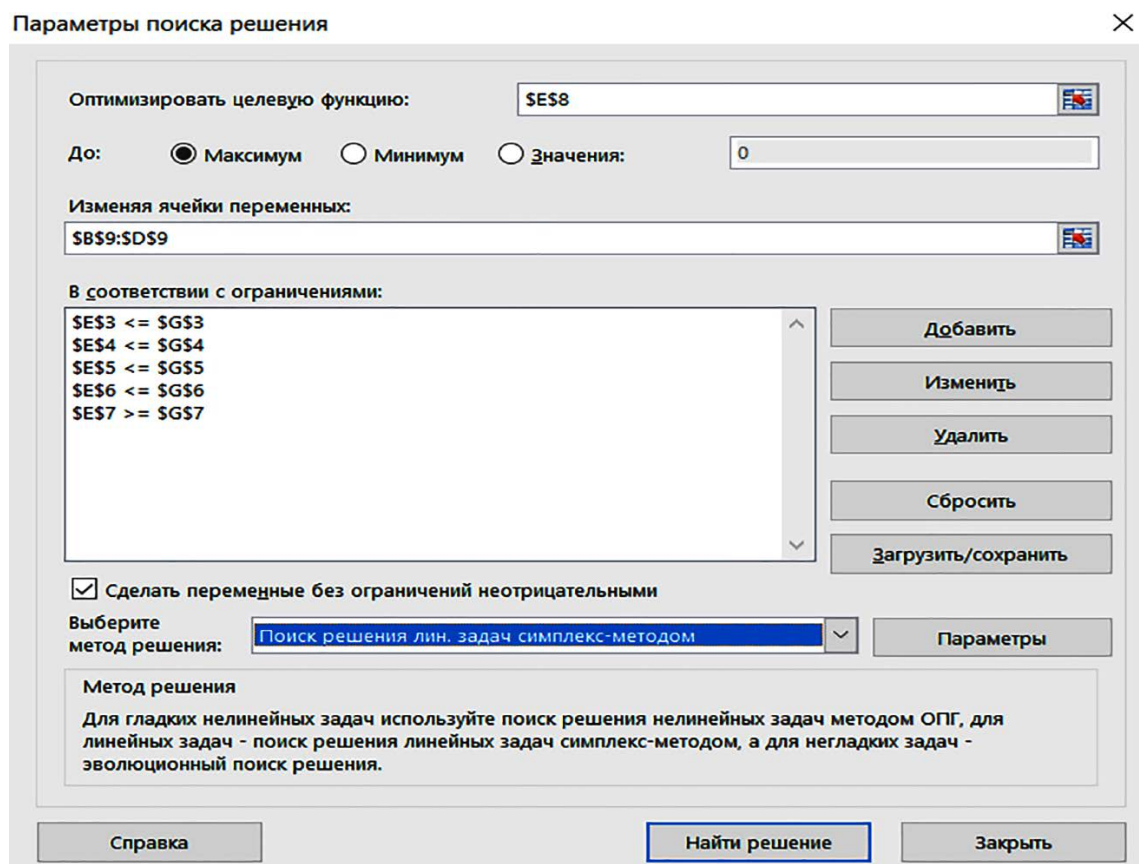


Рисунок 6.4 – Диалоговое окно поиска решений

9. Когда все ограничения будут заданы, необходимо нажать кнопку *ОК*, чтобы вернуться в диалоговое окно *Параметры поиска решения* (рис. 6.4).

10. Вводим условия неотрицательности переменных, установив флажок *Сделать переменные без ограничений неотрицательными*.

11. Выбираем в списочном поле метод решения *Поиск решения линейных задач симплекс-методом*.

12. Для организации поиска решения нажимаем кнопку *Найти решение*.

13. В диалоговом окне *Результаты поиска решения* (рис. 6.5) выделяем построчно отчеты: *Результаты*; *Устойчивость*; *Пределы*.

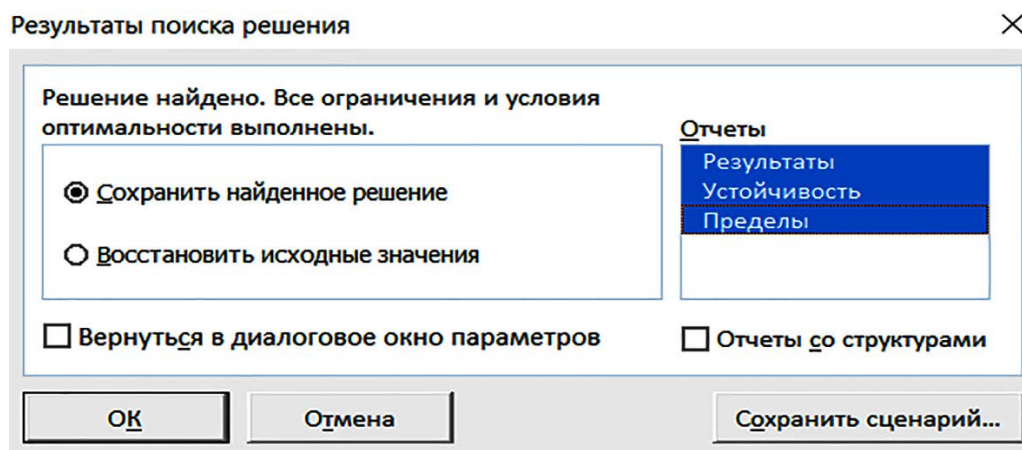


Рисунок 6.5 – Диалоговое окно сохранения результатов

14. Устанавливаем переключатель *Сохранить найденное решение* и нажимаем *ОК*.

Результаты решения. По оптимальному решению максимальная прибыль составит 7 056 тыс. руб., если площадь пашни распределить следующим образом: 653,3 га – под пшеницу, 300 га – под гречиху; производство овса не вошло в оптимальное решение.

Площадь пашни и удобрения используются не полностью. Трудовые ресурсы являются дефицитными, так как используются в полном объеме. План производства пшеницы перевыполнен на 760 т. Результаты оптимального решения в полном объеме представлены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 – Результаты оптимального решения

Ограничения	Переменные			Решение	Тип ограничения	Правая часть
	x_1	x_2	x_3			
По площади пашни, га	1	1	1	953,3	$\leq$	1 000
По минеральным удобрениям, т д. в.	0,1	0,1	0,2	125,3	$\leq$	160
По трудовым ресурсам, чел-дни	1,4	1,5	1,6	1 460,0	$\leq$	1 460
По площади гречихи, га	–	–	1	300,0	$\leq$	300
По плану производства пшеницы, т	–	3	–	1 960,0	$\geq$	1 200
$F(x)$, тыс. руб.	3,6	5,4	11,76	7 056,0	$\rightarrow$	max
Значения переменных	0,0	653,3	300,0	–	–	–

6.2 Экономико-математический анализ оптимального решения

На практике многие экономические параметры (цены на продукцию и сырье, запасы сырья, спрос на рынке, заработная плата и т. д.) с течением времени меняют свои значения. Поэтому оптимальное решение задачи линейного программирования, полученное для конкретной экономической ситуации, после ее изменения может оказаться непригодным или неоптимальным. В связи с этим возникает необходимость анализа решения на чувствительность, а именно того, как возможные изменения параметров целевой функции и ограничений повлияют на полученное ранее оптимальное решение.

Выделяют следующие задачи анализа на чувствительность:

1. Анализ сокращения или увеличения ресурсов:

1) на сколько можно увеличить (ограничения типа меньше или равно) или уменьшить (ограничения типа больше или равно) запас дефицитного ресурса для улучшения оптимального значения целевой функции?

2) на сколько можно уменьшить (ограничения типа меньше или равно) или увеличить (ограничения типа больше или равно) запас недефицитного ресурса при сохранении полученного оптимального значения целевой функции?

2. Увеличение или уменьшение запаса какого из ресурсов наиболее выгодно?

3. Анализ изменения целевых коэффициентов: каков диапазон изменения коэффициентов целевой функции, при котором не меняется оптимальное решение?

Анализ полученного оптимального решения на чувствительность может быть проведен в Excel с использованием отчетов: *Результаты*, *Устойчивость*, *Пределы*.

Покажем экономико-математический анализ решения по данным примера 1, рассмотренного в подразделе 6.1.

Отчет о результатах. Отчет о результатах, полученный в программе по результатам решения примера 1, показан на рисунке 6.6.

Ячейка целевой функции (Максимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	(результат)	
SE\$8	F(x), тыс. руб. Решение	0	7056		
Ячейки переменных					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	(результат)	
\$B\$9	Значения переменных x1 – площадь овса, га	0	0		
\$C\$9	Значения переменных x2 – площадь пшеницы, га	0	653,3333333		
\$D\$9	Значения переменных x3 – площадь гречихи, га	0	300		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск (разница)
SE\$3	по площади пашни, га Решение	953,3333333	SE\$3<=\$G\$3	без привязки	46,66666667
SE\$4	по минеральным удобрениям, т д. в. Решение	125,3333333	SE\$4<=\$G\$4	без привязки	34,66666667
SE\$5	по трудовым ресурсам, чел.-дни Решение	1460	SE\$5<=\$G\$5	привязка	0
SE\$6	по площади гречихи, га Решение	300	SE\$6<=\$G\$6	привязка	0
SE\$7	по плану производства пшеницы, т Решение	1960	SE\$7>=\$G\$7	без привязки	760
\$B\$9	Значения переменных x1 – площадь овса, га	0	\$B\$9>=0	привязка	0
\$C\$9	Значения переменных x2 – площадь пшеницы, га	653,3333333	\$C\$9>=0	без привязки	653,3333333
\$D\$9	Значения переменных x3 – площадь гречихи, га	300	\$D\$9>=0	без привязки	300

Рисунок 6.6 – Форма Отчета о результатах

Максимальную прибыль 7 056 тыс. руб. предприятие может получить, если под пшеницу отведет 653 га, под гречиху – 300 га. Овес не вошел в оптимальное решение.

При этом ресурсы расходуются следующим образом:

1. Трудовые ресурсы используются полностью (состояние *привязка* и *допуск* = 0), поэтому они являются дефицитными ресурсами и влияют на оптимальное решение.

2. Пашня и минеральные удобрения будут по оптимальному решению использованы не полностью (остаток 47 га и 35 тонн д. в. соответственно), поэтому являются недефицитными (избыточными) ресурсами. Ограничения по пашне и минеральным удобрениям не влияют на изменение целевой функции (состояние *без привязки*). Следовательно, их запас можно уменьшить и это никак не повлияет на оптимальное решение.

Ограничение по площади гречихи выполнено по верхней границе (*допуск* = 0) и влияет на оптимальное решение (состояние *привязка*).

План производства пшеницы перевыполнен на 760 тонн.

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что существуют причины (ограничения), не позволяющие предприятию получать более высокую прибыль от производственной деятельности. Проанализировать эти причины позволяет отчет об устойчивости.

Отчет об устойчивости. Согласно *первой части отчета по устойчивости* (рис. 6.7), *приведенная стоимость* для овса равна минус 1,44. Это значит, что если, несмотря на оптимальное решение, включить в план посева 1 га овса, то новый план принесет прибыль, которая меньше оптимальной соответственного на 1,44 тыс. руб.

Приведенная стоимость имеет ненулевые отрицательные значения для тех переменных, которые не вошли в оптимальное решение; показывает, как

Тема 6. Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии

изменится значение целевой функции, если, несмотря на оптимальное решение, включить в план производства одну единицу данной переменной величины.

Ячейки переменных						
Ячейка	Имя	Окончат. значение	Приведенная стоимость	Целевая функция коэффициент	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
\$B\$9	Значения переменных x1 – площадь овса, га	0	-1,44	3,6	1,44	1E+30
\$C\$9	Значения переменных x2 – площадь пшеницы, га	653,33	0	5,4	5,625	1,54
\$D\$9	Значения переменных x3 – площадь гречихи, га	300	0	11,76	1E+30	6
1E+30 – экспоненциальная запись числа с мантисой и порядком = $1 \cdot 10^{30}$ – очень большое число.						

Рисунок 6.7 – Отчет об устойчивости (первая часть)

Изменение одной из оценок не приведет к другой структуре оптимального решения, если:

1. Прибыль от 1 га посева овса не увеличится более чем на 1,44 тыс. руб.

Таким образом:

$$\text{не ограничено} < \text{прибыль от 1 га овса} < (3,6 + 1,44 = 5,04)$$

2. Прибыль от 1 га посева пшеницы не увеличится более чем на 5,6 тыс. руб.

и не уменьшится более чем на 1,5 тыс. руб. Таким образом:

$$(5,4 - 1,5 = 3,9) < \text{прибыль от 1 га пшеницы} < (5,4 + 5,6 = 11)$$

3. Прибыль от 1 га посева гречихи не уменьшится более чем на 6 тыс. руб.

Таким образом:

$$(11,76 - 6 = 5,76) < \text{прибыль от 1 га гречихи} < \text{не ограничено}$$

Если эти соотношения будут нарушены, оптимальное решение изменится.

Согласно *второй части отчета по устойчивости* (рис. 6.8), дефицитными являются трудовые ресурсы, не позволяющие получать большую прибыль, что сдерживает рост целевой функции. При наращивании рабочего времени на единицу прибыль увеличится на 3,6 тыс. руб. (*теневая цена* равна 3,6).

Ограничения						
Ячейка	Имя	Окончательное значение	Теневая цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое увеличение	Допустимое уменьшение
SES3	по площади пашни, га Решение	953,33	0	1000	1E+30	46,67
SES4	по минеральным удобрениям, т д. в. Решение	125,33	0	160	1E+30	34,67
SES5	по трудовым ресурсам, чел-дни Решение	1460	3,6	1460	70	380
SES6	по площади гречихи, га Решение	300	6	300	237,5	300
SES7	по плану производства пшеницы, т Решение	1960	0	1200	760	1E+30
1E+30 – экспоненциальная запись числа с мантиссой и порядком = $1 \cdot 10^{30}$ – очень большое число.						

Рисунок 6.8 – Отчет об устойчивости (вторая часть)

Теневая цена имеет ненулевые значения для дефицитных ресурсов или для неэффективных условий по плану производства; она показывает, как изменится значение целевой функции, если правую часть ограничения изменить на единицу.

Пашня и удобрения имеют нулевую оценку (теневая цена равна нулю), так как не использованы полностью в оптимальном плане. Не дефицитность ресурсов возникает из-за невозможности их полного использования в оптимальном плане.

Предельные значения приращения ресурсов, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение, указаны в отчете. Они показывают, на сколько можно уменьшить (устранить излишек) или увеличить (повысить минимально необходимое требование) ресурс, сохранив при этом структуру оптимального решения.

Трудовые ресурсы имеет смысл увеличить (самое большее) на 70 человеко-дней. Дальнейшее увеличение сверх указанных пределов не будет больше улучшать решение, так как уже другие ресурсы станут связывающими, что приведет к новым оптимальным решениям, увеличивающим прибыль от реализации. Увеличение других ресурсов не ограничено.

Теневая цена по площади посева гречихи равна 6. Ненулевая оценка в ограничении типа меньше или равно говорит о выполнении ограничения в полном объеме и характеризует эффективность единицы продукции. Значит данное условие неэффективно, так как оно сдерживает рост целевой функции. При этом увеличение площади посева гречихи на 1 га ведет к росту прибыли на 6 тыс. руб., поэтому предприятию рекомендовано увеличивать площадь посева данной культуры. Возможное увеличение площади гречихи составляет 237,5 га. При выходе за указанный предел оптимальное решение может изменить свою структуру.

Отчет о пределах. Полученный в примере отчет о пределах приведен на рисунке 6.9. Площади посева сельскохозяйственных культур могут изменяться в пределах от нуля до найденного оптимального значения.

Ячейка	Целевая функция имя	Значение				
SES8	F(x), тыс. руб. Решение	7056				
Ячейка	Переменная имя	Значение	Нижний предел	Целевая функция результат	Верхний предел	Целевая функция результат
\$B\$9	Значения переменных x1 – площадь овса, га	0	0	7056	0	7056
\$C\$9	Значения переменных x2 – площадь пшеницы, га	653,33333	400	5688	653,33333	7056
\$D\$9	Значения переменных x3 – площадь гречихи, га	300	0	3528	300	7056

Рисунок 6.9 – Отчет о пределах

При этом, если возделывать пшеницу на площади 400 га, то прибыль составит 5 688 тыс. руб.; если не заниматься производством гречихи, то прибыль составит 3 528 тыс. руб.

Пример 2. В распоряжении фабрики имеются ресурсы трех видов: труд, сырье, оборудование. Фабрика может выпускать ковры четырех видов. Спрос на ковры Силуэт составляет не более 20 штук. Информация о нормах расхода ресурсов, их наличии и ценах приведена в таблице 6.4.

Таблица 6.4 – Данные о ресурсах, используемых в производстве ковров

Показатели	Нормы расхода ресурсов на производство одного ковра				Ресурсы
	Лужайка	Силуэт	Детский	Дымка	
Труд, чел.-дни	7	2	2	6	80
Сырье, кг	5	8	4	3	480
Оборудование, станко-час	2	4	1	8	130
Цена ковра, тыс. руб.	3	4	3	1	–

Требуется найти оптимальный план выпуска продукции, при котором доход от реализации ковров будет максимальным.

Решение. Полученный в программе Excel оптимальный план выпуска продукции представлен на рисунке 6.10.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ресурсы	Переменные				Решение	Тип	Наличие
2		Лужайка	Силуэт	Детский	Дымка		ограничения	ресурсов
3	Труд, чел.-дн.	7	2	2	6	80	≤	80
4	Сырье, кг	5	8	4	3	240	≤	480
5	Оборудование, станко-час.	2	4	1	8	100	≤	130
6	План по коврам силуэт, шт.		1			20	≤	20
7	F(x), тыс. руб.	3	4	3	1	140	→	max
8	Значения переменных	0	20	20	0			

Рисунок 6.10 – Оптимальный план выпуска продукции

Отчет о результатах. Максимальный доход в размере 140 тыс. руб. фабрика может получить при выпуске 20 ковров второго вида и 20 ковров третьего вида (рис. 6.11).

Ячейка целевой функции (Максимум)				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	
\$F\$7	F(x), тыс. руб. Решение	140	140	
Ячейки переменных				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
\$B\$8	Значения переменных Лужайка	0	0	Продолжить
\$C\$8	Значения переменных Силуэт	20	20	Продолжить
\$D\$8	Значения переменных Детский	20	20	Продолжить
\$E\$8	Значения переменных Дымка	0	0	Продолжить
Ограничения				
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние Допуск
\$F\$3	Труд, чел.-дн. Решение	80	\$F\$3<=\$H\$3	Привязка 0
\$F\$4	Сырье, кг Решение	240	\$F\$4<=\$H\$4	Без привязки 240
\$F\$5	Оборудование, станко-час. Решение	100	\$F\$5<=\$H\$5	Без привязки 30
\$F\$6	План по коврам силуэт, шт. Решение	20	\$F\$6<=\$H\$6	Привязка 0

Рисунок 6.11 – Отчет о результатах

При этом ресурсы израсходуются следующим образом:

1) ресурс *труд* используется полностью (состояние *привязка допуск* соответствует нулевому значению), поэтому является дефицитным ресурсом и влияет на оптимальное решение;

2) ресурсы *сырье* и *оборудование* в количестве 240 кг и 30 станко-час будут не использованы, поэтому являются недефицитными (избыточными) ресурсами; эти ограничения не влияют на изменение целевой функции (состояние *без привязки*); следовательно, запас указанных ресурсов можно уменьшить и это никак не повлияет на оптимальное решение.

План по производству ковров Силуэт выполнен по верхней границе, условие влияет на оптимальное решение (состояние *привязка допуск* равно нулю).

На основании проведенного анализа можно сделать вывод, что *существуют причины, не позволяющие фабрике выпускать больше ковров, чем в оптимальном решении и получать более высокий доход*. Проанализировать эти причины позволяет отчет по устойчивости.

Отчет об устойчивости. Согласно *первой части отчета об устойчивости*, приведенная стоимость (рис. 6.12), для ковров первого и четвертого вида соответственно равна минус 7,5 и минус 8. Это означает, что если, несмотря на оптимальное решение, включить в план производства один ковер первого или четвертого вида, то новый план принесет доход, который меньше оптимального соответственного на 7,5 и 8 тыс. руб.

Изменение одной из оценок не приведет к другой структуре оптимального решения, если:

1) цена ковра 1-го вида не увеличится более чем на 7,5 тыс. руб.; таким образом: не ограничено $<$ цена одного ковра $< 10,5 = (3 + 7,5)$;

2) цена ковра 2-го вида не уменьшится более чем на одну единицу; таким образом: $(4 - 1) = 3 <$ цена одного ковра $<$ не ограничено;

3) цена ковра 3-го вида не увеличится более чем на 1 тыс. руб. и уменьшится не более чем на 2,14: $(3 - 2,14) = 0,86 <$ цена одного ковра $< 4 = (3 + 1)$;

4) цена ковра 4-го вида не увеличится более чем на 8 тыс. руб.; таким образом: не ограничено < цена одного ковра < 9 = (1 + 8).

Если эти соотношения будут нарушены, то оптимальный план изменится.

Ячейки переменных						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Стоимость	Целевая функция Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$8	Значения переменных Лужайка	0	-7,5	3	7,5	1E+30
\$C\$8	Значения переменных Сигурет	20	0	4	1E+30	1
\$D\$8	Значения переменных Детский	20	0	3	1	2,142857 143
\$E\$8	Значения переменных Дымка	0	-8	1	8	1E+30
Ограничения						
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Тень Цена	Ограничение Правая сторона	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$F\$3	Труд, чел.-дн. Решение	80	1,5	80	60	40
\$F\$4	Сырье, кг. Решение	240	0	480	1E+30	240
\$F\$5	Оборудование, станко-час. Решение	100	0	130	1E+30	30
\$F\$6	План по коврам сигурет, шт. Решение	20	1	20	10	20

Рисунок 6.12 – Отчет об устойчивости

Согласно второй части отчета по устойчивости (рис. 6.12), дефицитными являются трудовые ресурсы, не позволяющие фабрике выпускать большее количество ковров и получать больший доход. Они сдерживают рост целевой функции. При изменении трудовых ресурсов на единицу доход увеличится соответственно на 1,5 тыс. руб.

Поскольку знак ограничения трудовых ресурсов имеет вид «меньше или равно», то возникает вопрос, насколько максимально должны возрасти эти ресурсы, чтобы обеспечить увеличение выпуска продукции. Трудовые ресурсы имеет смысл увеличить (самое большее) на 60 чел.-дней. Это приведет к новому оптимальному решению, увеличивающему доход. Дальнейшее увеличение трудовых ресурсов сверх указанных пределов не будет улучшать решение, поскольку уже другие ресурсы станут связывающими.

Другие ресурсы имеют нулевую оценку (теневую цену), так как не используются полностью в оптимальном плане. Отсутствие дефицитности ресурсов возникает из-за невозможности их полного использования в оптимальном плане.

Ограничение по производству ковров второго вида имеет оценку (теневую цену), равную единице. Значит данное условие неэффективно, так как оно

Тема 6. Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии

сдерживает рост целевой функции. Следует увеличивать производство ковров Силуэт. Возможное увеличение составляет 10 штук.

Количество выпускаемой продукции одного из видов может изменяться в пределах от нуля до найденного оптимального значения (рис. 6.13). При этом, если не выпускать ковры второго вида, то доход составит 60 тыс. руб., если не выпускать ковры третьего вида – 80 тыс. руб.

Целевая функция						
Ячейка	Имя	Значение				
SFS7	F(x), тыс. руб. Решение	140				
Переменная			Нижний		Верхний	
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Целевая функция Результат	Предел	Целевая функция Результат
SBS8	Значения переменных Лужайка	0	0	140	0	140
SCS8	Значения переменных Силуэт	20	0	60	20	140
SDS8	Значения переменных Детский	20	0	80	20	140
SES8	Значения переменных Дымка	0	0	140	0	140

Рисунок 6.13 – Отчет о пределах

Задания для выполнения

На основании заданных параметров производственных ситуаций выполните математическую формализацию задачи, найдите оптимальное решение и проведите анализ оптимального решения на чувствительность.

1. На предприятии запланировано строительство скважин нескольких категорий: А; В; С. При строительстве скважин используются разные материально-технические ресурсы, наличие которых ограничено следующим количеством: обсадные трубы – 4 800 т; химические реагенты – 600 т; глина и глинопорошок – 1 610 т; талевый канат – 280 т; горюче-смазочные материалы – 580 т. При строительстве скважин разной категории потребляется различное количество ресурсов каждого вида. Расход материально-технических ресурсов в расчете на одну скважину каждой категории, а также экономический эффект при строительстве единицы скважины каждой категории, даны в таблице 6.5.

Таблица 6.5 – Исходные данные к заданию 1

Категории скважин	Экономический эффект на единицу скважины, тыс. руб.	Виды ресурсов				
		обсадные трубы	хим. реагенты	глина и глинопорошок	талевый канат	ГСМ
A	186	450	45	130	20	46
B	125	300	40	110	16	36
C	90	200	30	70	15	30

Определите оптимальный план строительства скважин, при котором в пределах ограниченного объема ресурсов достигается максимальный экономический эффект. Какой экономический эффект можно получить и как будут использованы ресурсы?

2. В плановом году строительные организации города переходят к сооружению домов типов Д-1; Д-2; Д-3 и Д-4. Данные о количестве квартир разного типа в каждом из указанных типов домов, их плановая себестоимость приведены в таблице 6.6. Годовой план ввода жилой площади составляет соответственно 800; 1 000; 900; 2 000 и 700 квартир указанных типов.

Таблица 6.6 – Данные о количестве и себестоимости квартир разных типов

Показатели	Д-1	Д-2	Д-3	Д-4
Типы квартир: однокомнатные	10	18	20	15
двухкомнатные смежные	40	–	20	–
двухкомнатные несмежные	–	20	–	60
трехкомнатные	60	90	10	–
четырекомнатные	20	10	–	5
Плановая себестоимость, млн. руб.	830	835	360	450

На жилищное строительство утвержден объем капиталовложений в размере 40 млрд. руб. (часть этих средств, которая не будет использована в плановом году по прямому назначению, предназначена для расширения сети коммунальных предприятий города).

Определите план строительства домов на финансовый год, при котором себестоимость всех вводимых домов будет минимальной. Также следует учесть, что количество домов типа Д-1 должно превышать количество домов

Тема 6. Задача оптимального распределения ресурсов при планировании выпуска продукции на предприятии

типа Д-2 не более чем в 2 раза. По каким квартирам и насколько будет перевыполнен план? Какая часть средств будет не использована?

3. Мебельное предприятие выпускает книжные полки, тумбу под телевизоры и три вида наборов мебели. Характеристики каждого вида продукции приведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7 – Данные о ценах и прибыли по видам мебельной продукции

Показатели	Виды продукции				
	набор мебели			книжные полки	тумба под телевизор
	1	2	3		
Оптовая цена, тыс. руб.	7,2	14,3	26,9	0,243	1,50
Прибыль от реализации, тыс. руб.	2,4	4,5	8,9	0,060	0,45

Объем товарной продукции в денежном выражении должен составить не менее 459,31 млн. руб. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Ситуация со сбытом продукции сложилась следующая: 1) книжными полками рынок насыщен, поэтому торговые организации уменьшили объем договоров до 10 тыс. штук; 2) тумбы для телевизоров могут быть реализованы в объемах от 4 до 7 тыс. штук; 3) наборы мебели второго вида можно реализовать от 7 до 10 тыс. штук; 4) спрос на наборы мебели первого и третьего видов неограничен, их требуется не менее 10 тыс. штук каждого вида.

Предприятие имеет технологическое оборудование, количество которого и нормы затрат времени на изготовление единицы продукции каждого вида приведены в таблице 6.8.

Таблица 6.8 – Данные о технологическом оборудовании и затратах труда

Наименование оборудования	Количество, шт.	Затраты труда на единицу продукции, час.				
		набор мебели			книжные полки	тумба под телевизор
		1	2	3		
Линия раскроя древесно-стружечных плит	2	0,068	0,096	0,207	0,018	0,042
Гильотинные ножницы	1	0,045	0,080	0,158	0,011	0,035
Линия облицовки	2	0,132	0,184	0,428	0,020	0,060
Линия обрезки кромок	2	0,057	0,082	0,230	0,010	0,028
Лаконаливная машина	2	0,063	0,090	0,217	0,010	0,032
Полировальные станки	4	0,170	0,280	0,620	0,020	0,096

Оптимизируйте производственную программу предприятия и проведите анализ решения, если предприятие работает в две смены и эффективное время работы каждой машины составляет 3 945 час.

Ответы к заданиям:

1. $F(6,5; 0; 9,3) = 2\,052,6$ тыс. руб..
2. $F(24; 12; 2; 20) = 39\,731,77$ млн. руб.
3. Прибыль – 164 166 тыс. руб.; выпуск продукции: первый набор – 10 002 шт., второй набор – 10 000 шт., третий набор – 10 490 шт., книжные полки – 0 шт., тумбы – 4 000 шт.

Контрольные задания

На основании заданных параметров производственных ситуаций выполните математическую формализацию задачи, найдите оптимальное решение и проведите анализ оптимального решения на чувствительность.

1. С использованием средств табличного процессора Excel выполните контрольные задания к теме 3 настоящего практикума (С. 43–49).

2. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, кресла и кровати. При изготовлении этих товаров используется два вида досок (табл. 6.9).

Таблица 6.9 – Исходные данные к заданию 2

Показатели	Нормы расхода на единицу продукции				Запасы
	столы	стулья	кресла	кровати	
Доски первого типа, м	5	1	9	12	1 500
Доски второго типа, м	2	3	4	6	1 000
Трудоемкость, чел.-час	3	2	5	10	800
Прибыль, руб.	12	5	15	18	–

С учетом спроса на товары фабрика должна выпустить не менее 10 кроватей, а соотношение столов и стульев должно быть 1:2. Найдите план производства мебели, дающий фабрике максимальную прибыль.

3. В пекарне для выпечки четырех видов хлеба используется мука двух сортов, маргарин и яйца. Имеющееся оборудование, производственные площади и поставки продуктов таковы, что в сутки можно переработать не более 290 кг муки первого сорта; 150 кг муки второго сорта; 50 кг маргарина; 1 280 шт. яиц. С учетом исходных данных таблицы 6.10, требуется определить суточный план выпечки хлеба, максимизирующий прибыль, если производство хлеба первого и второго вида не должно превышать производство хлеба третьего и четвертого вида более чем в 2 раза.

Таблица 6.10 – Исходные данные к заданию 3

Показатели	Нормы расхода на 1 кг хлеба (по видам)			
	1	2	3	4
Мука 1 сорта, кг	0,5	0,5	0	0
Мука 2 сорта, кг	0	0	0,5	0,5
Маргарин, кг	0,125	0	0	0,125
Яйцо, шт.	2	1	1	1
Прибыль, за 1 кг	14	12	5	6

4. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров – А и В. Отдел сбыта считает, что в неделю на рынке можно реализовать до 550 полок. Для полки типа А требуется 2 м² материала, для полки типа В – 3 м² материала. Компания может получить до 1 200 м² материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 минут машинного времени, для изготовления одной полки типа В – 30 минут; машину можно использовать 160 часов в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 3 денежных единицы, а от полок типа В 4 – денежных единицы, то сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю?

5. Мастерская имеет план реализации в течение месяца (25 рабочих дней) населению услуг на 10 000 у. е. Мастерская выполняет три вида работ: А, В, С. За выполнение работ А с заказчика получают 10 у. е. и мастерская имеет прибыль 2 у. е. За выполнение работ В с заказчика получают 8 у. е., а прибыль составляет 3 у. е. За выполнение работ С объем получаемых средств – 12 у. е.,

прибыль – 1 у. е. В мастерской работают 20 человек рабочих (односменная работа по 7 часов). Трудоемкость работ составляет: для А и В по 3 часа соответственно, С – 4 часа. Имеется 3 000 единиц сырья. Для выполнения единицы работы А используют 3 ед. сырья, работы В – 2 ед. сырья, работы С – 3 ед. сырья. Составьте план выполнения работ, обеспечивающий максимум прибыли.

Контрольные вопросы:

1. Назовите этапы решения задач линейного программирования в Excel.
2. Как задаются формулы для левых частей ограничений и целевой функции?
3. Почему изначально при вводе формул в ячейках отображаются нули?
4. В чем смысл использования символа «\$» в формулах Excel?
5. В чем различие использования в формулах Excel символов «;» и «:»?
6. Какие ячейки экранной формы выполняют иллюстративную функцию, а какие необходимы для решения задачи?
7. Каким образом в Excel задается направление оптимизации целевой функции?
8. Поясните общий порядок работы с окном **Поиск решения**.
9. Каким образом можно изменять, добавлять, удалять ограничения?
10. В чем состоит дефицитность (или избыточность) ресурса?
11. Каковы задачи анализа оптимального решения на чувствительность?
12. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи линейного программирования можно получить из отчета по результатам?
13. Какую информацию о чувствительности оптимального решения задачи линейного программирования можно получить из отчета по устойчивости?
14. В каких случаях приведенная стоимость имеет ненулевое отрицательное значение и что оно указывает?
15. Что показывает теневая цена? В каких случаях теневая цена имеет ненулевое значение?

ТЕМА 7.

ЗАДАЧА О СМЕСИ

Цель: приобретение навыков решения задач на определение оптимального состава смеси (рациона) в табличном процессоре Excel.

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций определить оптимальный состав смеси (рациона).

Ход работы:

Задача состоит в определении наиболее дешевого набора из определенных исходных материалов (продуктов, кормов), обеспечивающих получение смеси (рациона) с заданными свойствами. Получаемые смеси (рационы) должны иметь в своем составе различные компоненты в определенных количествах, а сами компоненты являются составными частями материалов.

Пример. Имеются данные об элементах трех видов и необходимом минимуме их присутствия в кормах. Необходимо составить рацион питания, в котором по каждому виду корма достаточно элементов и стоимость которого минимальна. Исходная информация представлена в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Исходная информация по содержанию и потреблению витаминов

Элементы	Необходимый минимум элементов, ед.	Число единиц элементов в 1 кг корма		
		грубые корма	сочные корма	зеленые корма
Калий	6	2	1	3
Кальций	8	1	2	1,5
Каротин	12	3	4	2
Стоимость 1 кг корма, у. ед.		2	3	2,5

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_1 – количество грубых кормов, кг;

x_2 – количество сочных кормов, кг;

x_3 – количество зеленых кормов, кг.

2. Ограничения задачи по элементам питания:

$2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6$ – по калию;

$x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geq 8$ – по кальцию;

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12$ – по каротину.

Условия неотрицательности основных переменных: $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$.

3. Критерий оптимальности – минимальная стоимость рациона, руб.

Целевая функция: $F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \min$.

Задание для выполнения

Бройлерное хозяйство насчитывает N цыплят, для кормления которых в качестве кормовой добавки используется состоящая из известняка, зерна и соевых бобов смесь, которая должна удовлетворять определенным требованиям. Смесь должна содержать (по весу):

- 1) не менее 22 % белка;
- 2) не более 5 % клетчатки;
- 3) не менее 0,8 % и не более 1,2 % кальция.

Кроме того, доля белка, обеспечиваемая за счет соевых бобов, не должна более чем вдвое превышать долю белка, обеспечиваемую за счет зерна.

Недельный расход смеси на одного цыпленка составляет не менее P граммов. Длительность периода кормления равна T дней.

Сведения о компонентах кормовой смеси, включая значения их запасов, приведены в таблице 7.2.

Определите состав 1 кг смеси, удовлетворяющей указанным требованиям и имеющей минимальную стоимость.

Определите стоимость и состав кормовой смеси (вес каждого компонента) в расчете на весь период кормления.

Получите решение задачи для:

$N = 20\,000$ штук; $P = 445$ грамм и $T = 10$ дней.

Таблица 7.2 – Сведения о компонентах кормовой смеси

Наименования компонентов	Содержание ингредиентов (в кг на 1 кг компонента)			Цена 1 кг, усл. ед.	Запас компонентов, т
	кальций	белок	клетчатка		
Известняк	0,380	–	–	1,0	0,4
Зерно	0,001	0,120	0,020	6,0	8,1
Соевые бобы	0,002	0,420	0,080	5,1	4,5

Ответ к заданию:

Стоимость 1 кг смеси равна 5,54 у. е.; состав 1 кг смеси включает: известняк – 0,03 кг, зерно – 0,62 кг, соевые бобы – 0,35 кг.

Стоимость смеси для кормления 2 000 цыплят в течение 10 дней составляет 70 455,76 у. е.; расход компонентов на формирование смеси: известняк – 0,36 т, зерно – 7,86 т, соевые бобы – 4,49 т.

ТЕМА 8.

ЗАДАЧА НА ОПТИМАЛЬНЫЙ РАСКРОЙ ИСХОДНОГО МАТЕРИАЛА

Цель: *приобретение навыков решения задач линейного программирования на оптимальный раскрой материала в табличном процессоре Excel.*

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций определить оптимальный план раскроя материала.

Ход работы:

На предприятиях промышленности и строительства исходный материал (арматура, трубы, листы, рулоны, брус) на стадии технологической подготовки раскраивается на детали (заготовки) необходимых габаритов. Задача состоит в разработке такого плана раскроя, который обеспечивал бы:

- 1) необходимый комплект изделий при минимальных отходах (по длине, площади, массе, стоимости и др.) при раскрое материала;
- 2) или максимальное число комплектов изделий.

Пример. Организация изготавливает из бруса деревянные оконные блоки. Требуется отыскать рациональный вариант раскроя бруса длиной равной 700 мм (L) на элементы длиной $l_1 = 300$ мм, $l_2 = 130$ мм, $l_3 = 60$ мм (отходами на разгрузку, распил и др. можно пренебречь). Производственная программа по элементам первого вида – 1 200 шт., второго вида – 8 000 шт., третьего вида – 750 шт.

Решение:

Определим возможные способы раскроя исходного материала. С этой целью составим таблицу 8.1.

Тема 8. Задача на оптимальный
раскрой исходного материала

Таблица 8.1 – Возможные способы раскроя материала

Способ раскроя	Количество элементов длиной (мм)			Отходы, мм
	300	130	60	
1				
2				
...				
11				

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

x_j – количество единиц исходного материала, которое следует раскроить j -м способом ($j = 1, 2, \dots, 11$).

Тогда, план раскроя будет следующим:

x_1 – количество единиц исходного материала, которое следует раскроить 1-м способом;

x_2 – количество единиц исходного материала, которое следует раскроить 2-м способом;

...

x_{11} – количество единиц исходного материала, которое следует раскроить 11-м способом.

2. Ограничения задачи:

Ограничения (по элементам длиной $l_1 = 300$ мм, $l_2 = 130$ мм, $l_3 = 60$ мм):

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 + 0x_{10} + 0x_{11} = 1200, \\ 0x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 5x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 1x_{10} + 0x_{11} = 8000, \\ 1x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 0x_6 + 3x_7 + 5x_8 + 7x_9 + 9x_{10} + 11x_{11} = 750, \\ x_j - \text{целые неотрицательные}; j = 1, 2, \dots, 11 \end{cases}$$

3. Критерий оптимальности – минимум суммарных отходов при раскрое.

Целевая функция примет вид:

$$F(x) = 40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4 + 40x_5 + \\ + 50x_6 + 0x_7 + 10x_8 + 20x_9 + 30x_{10} + 40x_{11} \rightarrow \min$$

4. Табличная форма экономико-математической задачи показана на рисунке 8.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	x 9	x 10	x 11	Решение	Тип	Правая часть
2	$l_1=300$ мм	2	1	1	1	1							0	=	1200
3	$l_2=130$ мм		3	2	1		5	4	3	2	1		0	=	8000
4	$l_3=60$ мм	1		2	4	6		3	5	7	9	11	0	=	750
5	$F(x)$, мм	40	10	20	30	40	50		10	20	30	40	0	>	min
6	Значения переменных	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			

Рисунок 8.1 – Табличная форма экономико-математической задачи

Ответ: $x_2 = 1\ 200$, $x_6 = 680$, $x_7 = 250$ (остальные переменные не вошли в оптимальное решение); $F(x) = 46\ 000$ мм (рис. 8.2).

M5		f _x = СУММПРОИЗВ(B5:L5;\$B\$6:\$L\$6)													
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7	x 8	x 9	x 10	x 11	Решение	Тип	Правая часть
2	$l_1=300$ мм	2	1	1	1	1							1200	=	1200
3	$l_2=130$ мм		3	2	1		5	4	3	2	1		8000	=	8000
4	$l_3=60$ мм	1		2	4	6		3	5	7	9	11	750	=	750
5	$F(x)$, мм	40	10	20	30	40	50		10	20	30	40	46000	>	min
6	Значения переменных	0	1200	0	0	0	680	250	0	0	0	0			

Рисунок 8.2 – Результат оптимизации раскроя материала

Таким образом, предлагаются следующие рекомендации по раскрою бруса (план раскроя):

- 1) раскроить каждую из 1 200 единиц бруса на один элемент первого вида и три элемента второго вида;
- 2) раскроить каждую из 680 единиц бруса на пять элементов второго вида;
- 3) раскроить каждую из 250 единиц бруса на четыре элемента второго вида и три элемента третьего вида.

Минимальные суммарные отходы материала составят 46 м.

Задания для выполнения

1. Требуется разработать оптимальный план раскроя стандартных листов стали, обеспечивая выход планового числа заготовок разного вида при минимальных суммарных отходах. При этом известно, что из партии листовой стали необходимо нарезать четыре вида различных заготовок в количестве b_i ($i = 1, 2, \dots, 4$) штук. Лист стали стандартных размеров может быть раскроен четырьмя способами. Каждому возможному способу раскроя соответствует

Тема 8. Задача на оптимальный
раскрой исходного материала

карта раскроя (табл. 8.2). Из карт раскроя известен выход заготовок в штуках разных видов a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 4; j = 1, 2, \dots, 4$) и площадь отходов c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) при раскрое одного листа стали по j -му способу раскроя. Какое количество листов стали необходимо раскроить тем или иным способом, чтобы отходы были минимальными?

Таблица 8.2 – Карта раскроя

Виды заготовок	Выход заготовок (шт.) разных видов из карт раскроя (a_{ij})				План-задание по количеству заготовок (b_i)
	1	2	3	4	
1	1	4	0	1	240
2	1	0	4	0	200
3	1	0	0	3	120
4	1	1	0	3	140
Площадь отходов, m^2 (c_j)	1,4	0,1	2,1	0,1	–

Методические указания. Для решения задания используйте следующую математическую формализацию задачи:

Состав переменных величин:

x_j – количество исходного материала (листов стали), которые необходимо раскроить по одному из способов j .

Ограничения задачи по выходу заготовок i -го вида по всем j -м способам раскроя:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_4 \geq 240, \\ x_1 + 4x_3 \geq 200, \\ x_1 + 3x_4 \geq 120, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 \geq 140, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Критерий оптимальности – минимум отходов при раскрое. *Целевая функция:* $F(x) = 1,4x_1 + 0,1x_2 + 2,1x_3 + 0,1x_4 \rightarrow \min$.

2. Требуется изготовить по 100 комплектов арматуры длиной, составляющей 2,9; 2,1; 1,5 м, из стержней, длина которых 7,4 м. Такие стержни могут

быть разрезаны на части указанных размеров восьмью способами. Какие способы раскроя следует выбрать, чтобы при соблюдении комплектности отходы были бы наименьшими? Изначально определите карту раскроя по форме, приведенной в таблице 8.3.

Таблица 8.3 – Карта раскроя

Способы	Виды заготовок, м			Отходы
	2,9	2,1	1,5	
1				
2				
...				
8				

3. Для изготовления брусьев трех размеров: 0,6; 1,5 и 2,5 м, количество которых должно находиться в соотношении 2:1:3, поступают на распил бревна длиной 3 м. Определите план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Способы распила бревен, с указанием соответствующих брусьев указаны в таблице 8.4.

Таблица 8.4 – Способы распила бревен

Способы распила	Виды брусьев, м		
	0,6	1,5	2,5
1	5	—	—
2	2	1	—
3	—	2	—
4	—	—	1

Ответы:

1. $F(0,50; 50; 40) = 114 \text{ (м}^2\text{)}$.
2. $F(10; 50; 0; 30; 0; 0; 0; 0) = 16 \text{ (м)}$.
3. $F(0; 1; 0; 3) = 4 \text{ (ед.)}$.

ТЕМА 9.

РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель: *приобретение навыков решения распределительных задач в табличном процессоре Excel.*

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций определить оптимальный план распределительных задач; выполнить интерпретацию и анализ оптимального плана.

9.1 Транспортная задача

Общая постановка транспортной задачи. Определить сколько груза должно быть отправлено из каждого i -го пункта отправления (от поставщика) в каждый j -й пункт назначения (до потребителя), то есть найти оптимальный план грузоперевозки X_{ij} с минимальными транспортными издержками.

Пример. В сельскохозяйственном производственном кооперативе, расположенном в четырех населенных пунктах (B_1, B_2, B_3, B_4), содержится скот: в пунктах B_1 и B_3 находится молодняк в количестве 100 и 200 голов соответственно; в пунктах B_2 и B_4 содержатся коровы в количестве по 100 голов. В стойловый период наряду с другими кормами скоту скармливается сено в количестве 6 т на 1 голову коров и 4 т на голову молодняка. Сено хозяйство производит на трех сенокосных угодьях A_1, A_2, A_3 площадью 300; 400; 500 га соответственно. Планируемый сбор сена с 1 га составляет 2 т. Определите оптимальный план поставки сена в каждый населенный пункт для удовлетворения потребностей, чтобы общие транспортные издержки были минимальными.

Стоимость перевозки 1 т сена из пунктов отправления в пункты назначения приведена в таблице 9.1.

Таблица 9.1 – Данные о стоимости перевозки одной тонны сена

Сенокосные угодья	Потребители			
	В ₁	В ₂	В ₃	В ₄
A ₁	10	20	30	40
A ₂	40	30	20	10
A ₃	10	20	20	10

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

$$X = (x_{ij})_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

Например, x_{11} - количество сена, перевозимого с 1-го угодья в 1-й пункт; x_{12} – количество сена, перевозимого с 1-го угодья во 2-й пункт и т. д.

2. *Ограничения задачи.* Чтобы правильно составить ограничения задачи, необходимо определить ее тип (закрытый или открытый). Данная задача является транспортной задачей закрытого типа, так как запасы сена на сенокосных угодьях равны потребностям в сене ($2\,400 = 2\,400$). Поэтому все запасы будут использованы и все потребности удовлетворены.

Ограничения по запасам:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 600, \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 800, \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 1000 \end{cases}$$

Ограничения по потребностям:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = 400, \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = 600, \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = 800, \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} = 600 \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

3. Критерий оптимальности – минимальные общие транспортные затраты. Целевая функция имеет вид:

$$F(X) = 10X_{11} + 20X_{12} + 30X_{13} + 40X_{14} + 40X_{21} + 30X_{22} + 20X_{23} + \\ + 10X_{24} + 10X_{31} + 20X_{32} + 20X_{33} + 10X_{34} \rightarrow \min$$

4. Табличная форма транспортной задачи имеет вид (табл. 9.2, 9.3).

Таблица 9.2 – Табличная форма транспортной задачи

Сенокосные угодья (поставщики)	Потребители				Запасы сена, т
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	10	20	30	40	600
A ₂	40	30	20	10	800
A ₃	10	20	20	10	1 000
Потребности, т	400	600	800	600	2 400 = 2 400

Таблица 9.3 – План грузоперевозок

Сенокосные угодья (поставщики)	Потребители				Запасы сена, т
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	$\sum_{j=1}^4 x_{1j}$
A ₂	X_{21}	X_{22}	X_{23}	X_{24}	$\sum_{j=1}^4 x_{2j}$
A ₃	X_{31}	X_{32}	X_{33}	X_{34}	$\sum_{j=1}^4 x_{3j}$
Потребности, т	$\sum_{i=1}^3 x_{i1}$	$\sum_{i=1}^3 x_{i2}$	$\sum_{i=1}^3 x_{i3}$	$\sum_{i=1}^3 x_{i4}$	$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$

Решение:

1. Вводим исходные данные согласно табличной форме задачи (рис. 9.1).
2. Выполняем команду *Данные, Поиск решения* (рис. 9.2).
3. Для получения отчетов в диалоговом окне *Результаты Поиска решения* выделяем типы отчетов: *Результаты, Устойчивость*.

	A	B	C	D	E	F
1		Затраты на перевозку 1 т к населенным пунктам				
2	Сенокосные угодья	B1	B2	B3	B4	Запас сена, т
3	A1	10	20	30	40	600
4	A2	40	30	20	10	800
5	A3	10	20	20	10	1000
6	Потребности в сене, т	400	600	800	600	2400=2400
7						
8		Количество перевезенного сена из сенокосного угодья в населенный пункт				
9	Сенокосные угодья	B1	B2	B3	B4	
10	A1	0	0	0	0	=СУММ(B10:E10)
11	A2	0	0	0	0	=СУММ(B11:E11)
12	A3	0	0	0	0	=СУММ(B12:E12)
13		=СУММ(B10:B12)	=СУММ(C10:C12)	=СУММ(D10:D12)	=СУММ(E10:E12)	=СУММПРОИЗВ(B3:E5;B10:E12)

Рисунок 9.1 – Табличная форма транспортной задачи

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

☒ Сделать переменные без ограничений неотрицательными

Выберите метод решения:

Добавить
Изменить
Удалить
Сбросить
Загрузить/сохранить
Параметры

Рисунок 9.2 – Пример заполнения диалогового окна Поиск решения

Ответ. Общие затраты на перевозку сена составят 38 000 денежных единиц (табл. 9.4). Предложение и спрос удовлетворены полностью.

Таблица 9.4 – Распределение сена по населенным пунктам

Сенокосные угодья	Количество перевезенного сена из сенокосного угодья в населенный пункт				Запасы сена, т
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	200	400	0	0	600
A ₂	0	0	455,76	344,24	800
A ₃	200	200	344,24	255,76	1 000
Потребности, т	400	600	800	600	38 000

Анализ оптимального решения. Полученное решение оптимально, но может быть не единственным. Для анализа возможных решений можно воспользоваться отчетами, созданными программой.

Отчет о результатах (рис. 9.3). Содержит сведения об исходных и окончательных (оптимизированных) значениях целевой функции и переменных.

Ячейка целевой функции (Минимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение		
SFS13	2400=2400	0	38000		
Ячейки переменных					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное	
SBS10	A1 B1	0	200,00	Продолжить	
SCS10	A1 B2	0	400,00	Продолжить	
SDS10	A1 B3	0	0,00	Продолжить	
SES10	A1 B4	0	0,00	Продолжить	
SBS11	A2 B1	0	0,00	Продолжить	
SCS11	A2 B2	0	0,00	Продолжить	
SDS11	A2 B3	0	455,76	Продолжить	
SES11	A2 B4	0	344,24	Продолжить	
SBS12	A3 B1	0	200,00	Продолжить	
SCS12	A3 B2	0	200,00	Продолжить	
SDS12	A3 B3	0	344,24	Продолжить	
SES12	A3 B4	0	255,76	Продолжить	
Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
SBS13	B1	400	SBS13=SBS6	Привязка	0
SCS13	B2	600	SCS13=SCS6	Привязка	0
SDS13	B3	800	SDS13=SDS6	Привязка	0
SES13	B4	600	SES13=SES6	Привязка	0
SFS10	A1 2400=2400	600	SFS10=SFS3	Привязка	0
SFS11	A2 2400=2400	800	SFS11=SFS4	Привязка	0
SFS12	A3 2400=2400	1000	SFS12=SFS5	Привязка	0

Рисунок 9.3 – Отчет о результатах

В таблице *Ограничения* приведен список всех ограничений. Если ограничение не влияет на изменение целевой функции, то графа *Состояние* имеет значение *Без привязки*; такое состояние имеют те запасы (или потребности), которые по оптимальному решению использованы (или удовлетворены) не полностью. В остальных случаях указывается значение *Привязка*.

В графе *Допуск* указаны разности между заданным запасами (или потребностями) и найденными. Если значение равно нулю, то запасы (или потребности) используются (или удовлетворены) полностью.

Отчет об устойчивости (рис. 9.4). В таблице *Ячейки переменных*, кроме результирующих значений этих ячеек, приведен приведенный градиент, указывающий, насколько изменится целевая функция, если значение в данной ячейке увеличить на единицу. Для транспортной задачи приведенный градиент является оценкой свободных (то есть с нулевой перевозкой) ячеек. Чем больше значение оценки, тем менее перспективна данная ячейка для включения ее в план перевозок. В задаче четыре ячейки (маршрута) являются свободными (нулевыми). Они имеют все положительные оценки, а значит, полученный оптимальный план улучшить нельзя. Наиболее неперспективными являются маршруты от первого уголья до четвертого пункта и от второго уголья к первому пункту.

Ячейки переменных			
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Приведенн. Градиент
\$B\$10	A1 B1	200,00	0,00
\$C\$10	A1 B2	400,00	0,00
\$D\$10	A1 B3	0,00	10,00
\$E\$10	A1 B4	0,00	30,00
\$B\$11	A2 B1	0,00	30,00
\$C\$11	A2 B2	0,00	10,00
\$D\$11	A2 B3	455,76	0,00
\$E\$11	A2 B4	344,24	0,00
\$B\$12	A3 B1	200,00	0,00
\$C\$12	A3 B2	200,00	0,00
\$D\$12	A3 B3	344,24	0,00
\$E\$12	A3 B4	255,76	0,00
Ограничения			
Ячейка	Имя	Окончательное Значение	Лагранжа Множитель
\$B\$13	B1	400	0
\$C\$13	B2	600	10
\$D\$13	B3	800	10
\$E\$13	B4	600	0
\$F\$10	A1 2400=2400	600	10
\$F\$11	A2 2400=2400	800	10
\$F\$12	A3 2400=2400	1000	10

Рисунок 9.4 – Отчет об устойчивости

В таблице *Ограничения* приведен множитель Лагранжа, который равен отношению прироста целевой функции к изменению ограничения на единицу. Таким образом, он показывает, как изменится значение целевой функции, если

запасы (или потребности) увеличить на единицу. Иногда его называют «ценность ресурса», поскольку он указывает на чувствительность целевой функции к изменению данного ресурса. Например, рост потребностей второго и третьего пунктов в сене и увеличение выхода сенокосных угодий на 1 т может привести к уменьшению транспортных расходов и другому плану перевозок.

Задания для выполнения

1. Продукцию, производимую на предприятиях А, В и С, нужно развести по магазинам № 1, № 2, № 3 и № 4. Составьте план перевозок продукции, при котором стоимость перевозок будет наименьшей. Стоимость перевозки одной единицы продукции, потребности и запасы заданы таблицами 9.5–9.7.

Вариант 1. Решите транспортную задачу закрытого типа, когда запасы поставщиков равны потребностям (табл. 9.5).

Таблица 9.5 – Исходные данные к заданию 1 (вариант 1)

Поставщики	Тарифы				Запасы
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
А	2	3	5	4	30
В	3	2	4	1	40
С	4	3	2	6	20
Потребность	20	25	35	10	90

Вариант 2. Решите транспортную задачу открытого типа, когда запасы поставщиков больше потребностей (табл. 9.6).

Таблица 9.6 – Исходные данные к заданию 1 (вариант 2)

Поставщики	Тарифы				Запасы
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
А	2	3	5	4	35
В	3	2	4	1	40
С	4	3	2	6	25
Потребность	20	25	35	10	100 > 90

Вариант 3. Решите транспортную задачу открытого типа, когда запасы поставщиков меньше потребностей (табл. 9.7).

Таблица 9.7 – Исходные данные к заданию 1 (вариант 3)

Поставщики	Тарифы				Запасы
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	
А	2	3	5	4	30
В	3	2	4	1	40
С	4	3	2	6	20
Потребность	25	30	40	10	90 <105

Ответы:

Вариант 1. Значения переменных: 20; 10; 0; 0; 0; 15; 15; 10; 0; 0; 20; 0.

Целевая функция: 210.

Вариант 2. Значения переменных: 20; 5; 0; 0; 0; 20; 10; 10; 0; 0; 25; 0.

Целевая функция: 195.

Вариант 3. Значения переменных: 25; 5; 0; 0; 0; 25; 5; 10; 0; 0; 20; 0.

Целевая функция: 185.

Анализ решения. Из сравнения планов перевозок вариантов транспортной задачи (закрытого и открытого типа) видно, что:

- 1) общая стоимость перевозок уменьшилась (либо при полностью удовлетворенном спросе, либо при полностью использованных запасах);
- 2) в оптимальном плане произошло перераспределение перевозок из ячеек с большим тарифом в ячейки с меньшим тарифом;
- 3) либо запасы реализованы не полностью, либо потребности удовлетворены не полностью.

Таким образом, можно сделать вывод, что оба варианта открытого типа задачи ближе к условиям рынка со свободным распределением ресурсов, чем закрытый тип с жестким распределением ресурсов.

Решите задачи и выполните анализ оптимального решения:

2. Промышленный концерн имеет два завода и пять складов. Ежемесячно первый завод производит 40 ед. продукции, а второй – 70 ед. продукции. Вся

продукция, произведенная заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции, второго – 30, третьего – 15, четвертого – 27, пятого – 28 ед. продукции. Издержки транспортировки продукции заданы матрицей $\begin{pmatrix} 250 & 480 & 650 & 500 & 720 \\ 450 & 525 & 630 & 560 & 750 \end{pmatrix}$. Определите план перевозок, минимизирующий транспортные расходы.

3. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175; 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180; 110; 90 и 40 т.

Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Составьте такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

4. Имеются четыре склада с однородным продуктом, в которых сосредоточено 200; 120; 150; 130 т продукта соответственно. Продукты необходимо перевезти трем потребителям соответственно в количестве 200; 250; 170 т. Расстояния от складов до потребителей заданы в таблице 9.8.

Таблица 9.8 – Расстояния от складов до потребителей

Хранилище	В километрах		
	Первый потребитель	Второй потребитель	Третий потребитель
1	20	30	50
2	50	20	40
3	60	40	30
4	30	30	60

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км постоянны и равны 5 у. е. Определите план перевозок продукта от складов до потребителей из условия минимизации транспортных расходов.

9.2 Задача о назначениях

Задача о назначениях – это распределительная задача, в которой для выполнения каждой работы требуется один и только один ресурс (один человек, одна машина и т. д.), и каждый ресурс может быть использован на одной и только одной работе, то есть ресурсы неделимы между работами, а работы – между ресурсами.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Она имеет место при распределении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям.

Пример 1. Администрация деревоперерабатывающего предприятия приняла на работу пять человек. Каждый из них имеет различные способности и навыки и затрачивает различное время на выполнение определенной работы. Необходимо выполнить пять видов работ. Время выполнения работы каждым работником в часах приведено в таблице 9.9.

Таблица 9.9 – Время выполнения работ различными работниками

Работник	Виды работ				
	1	2	3	4	5
M1	25	16	15	14	13
M2	25	17	18	23	15
M3	30	15	20	19	14
M4	27	20	22	25	12
M5	29	19	17	32	10

Требуется назначить на каждый вид работы одного из работников. Как это нужно сделать, чтобы общее (суммарное) время, необходимое для завершения всех видов работ, было минимальным?

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

$X_{ij} = 1$, если работник назначен на работу;

$X_{ij} = 0$, если работник не назначен на работу.

По сравнению с транспортной задачей, процесс приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду имеет свои особенности (X_{ij} принимает одно из двух значений): $X_{ij} \in \{0; 1\}$, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

2. Ограничения задачи представлены двумя группами:

Ограничения по работам:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} = 1, \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} = 1, \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} = 1, \\ X_{41} + X_{42} + X_{43} + X_{44} + X_{45} = 1, \\ X_{51} + X_{52} + X_{53} + X_{54} + X_{55} = 1 \end{cases}$$

Ограничения по работникам:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} + X_{41} + X_{51} = 1, \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} + X_{42} + X_{52} = 1, \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} + X_{43} + X_{53} = 1, \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} + X_{44} + X_{54} = 1, \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} + X_{45} + X_{55} = 1 \end{cases}$$

3. Критерий оптимальности представляет минимальное общее время выполнения работ. Целевая функция принимает вид:

$$\begin{aligned} F(X) = & 25X_{11} + 16X_{12} + 15X_{13} + 15X_{14} + 13X_{15} + 25X_{21} + 17X_{22} + 18X_{23} + \\ & + 23X_{24} + 15X_{25} + 30X_{31} + 15X_{32} + 20X_{33} + 19X_{34} + 14X_{35} + \\ & + 27X_{41} + 20X_{42} + 22X_{43} + 25X_{44} + 12X_{45} + 29X_{51} + 19X_{52} + \\ & + 17X_{53} + 32X_{54} + 10X_{55} \rightarrow \min \end{aligned}$$

Решение. На рабочем листе создана форма для решения задачи (рис. 9.5). Искомые значения переменных располагаются в блоке B11:F15; в ячейке G16 располагается формула целевой функции. Также введены формулы для вычисления ограничений по работам и по работникам.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Работник	Время выполнения, час					
2		работы 1	работы 2	работы 3	работы 4	работы 5	
3	M1	25	16	15	14	13	
4	M2	25	17	18	23	15	
5	M3	30	15	20	19	14	
6	M4	27	20	22	25	12	
7	M5	29	19	17	32	10	
8							
9	Работник	Назначения на работы					
10		1	2	3	4	5	
11	M1	0	0	0	0	0	=СУММ(B11:F11)
12	M2	0	0	0	0	0	=СУММ(B12:F12)
13	M3	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:F13)
14	M4	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:F14)
15	M5	0	0	0	0	0	=СУММ(B15:F15)
16		=СУММ(B11:B15)	=СУММ(C11:C15)	=СУММ(D11:D15)	=СУММ(E11:E15)	=СУММ(F11:F15)	=СУММПРОИЗВ(B3:F7;B11:F15)

Рисунок 9.5 – Часть рабочего листа в режиме отображения формул

Окно *Поиск решения* (рис. 9.6), помимо остальных ограничений, содержит ограничение на двоичность переменных, означающее, что значение переменной может быть 0 или 1.

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

- \$B\$11:\$F\$15 = бинарное
- \$B\$16:\$F\$16 = 1
- \$G\$11:\$G\$15 = 1

Добавить

Изменить

Удалить

Рисунок 9.6 – Пример заполнения окна Поиск решения

В результате будет получено оптимальное решение, показанное на рисунке 9.7.

Таким образом, анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что общее время, необходимое для завершения всех видов работ, будет составлять 83 часа. Конкретное закрепление работников за определенными работами можно видеть на рисунке 9.7.

9	Работник	Назначения на работы					
10		1	2	3	4	5	
11	М1	0	0	0	1	0	1
12	М2	1	0	0	0	0	1
13	М3	0	1	0	0	0	1
14	М4	0	0	0	0	1	1
15	М5	0	0	1	0	0	1
16		1	1	1	1	1	83

Рисунок 9.7 – Оптимальное решение задачи

Пример 2. На четырех авиалиниях используется три типа самолетов. В таблицах 9.10 и 9.11 заданы число самолетов каждого типа, месячный объем перевозок и эксплуатационные расходы.

Таблица 9.10 – Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям

Тип самолета	Авиалинии				Число самолетов
	1	2	3	4	
I	15	10	20	50	50
II	30	25	10	17	20
III	25	50	30	45	30

Таблица 9.11 – Эксплуатационные расходы

Тип самолета	Авиалинии			
	1	2	3	4
I	15	20	25	40
II	70	28	15	45
III	40	70	40	65

Требуется распределить самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300; 200; 1 000 и 500 единиц груза.

Математическая формализация задачи:

1. Состав переменных величин:

X_{ij} – количество самолетов i -го типа, назначаемых на j -ю авиалинию.

2. Ограничения задачи представлены двумя группами:

Ограничения по количеству используемых самолетов:

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 50, \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 20, \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 30 \end{cases}$$

Ограничения по плану перевозок:

$$\begin{cases} 15X_{11} + 30X_{21} + 25X_{31} \geq 300, \\ 10X_{12} + 25X_{22} + 50X_{32} \geq 200, \\ 20X_{13} + 10X_{23} + 30X_{33} \geq 1000, \\ 50X_{14} + 17X_{24} + 45X_{34} \geq 50 \end{cases}$$

При этом $X_{ij} \geq 0$ для всех i и j , также X_{ij} – целые.

3. Критерий оптимальности – минимальные суммарные эксплуатационные расходы. Целевая функция имеет вид:

$$F(X) = 15X_{11} + 20X_{12} + 25X_{13} + 40X_{14} + 70X_{21} + 28X_{22} + 15X_{23} + 45X_{24} + 40X_{31} + 70X_{32} + 40X_{33} + 65X_{34} \rightarrow \min$$

Решение. Вид электронной таблицы, созданной для решения задачи, представлен на рисунке 9.8. Искомые переменные находятся в диапазоне B15:E17, целевая функция – F18, формулы ограничений по перевозкам и по числу самолетов – B18:E18 и F15:F17.

	A	B	C	D	E	F
1	Тип самолета	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям				Число самолетов
2		1	2	3	4	
3	I	15	10	20	50	50
4	II	30	25	10	17	20
5	III	25	50	30	45	30
6	План перевозок	300	200	1000	500	
7						
8	Тип самолета	Эксплуатационные расходы				
9		1	2	3	4	
10	I	15	20	25	40	
11	II	70	28	15	45	
12	III	40	70	40	65	
13						
14	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов
15	I	0	0	0	0	=СУММ(B15:E15)
16	II	0	0	0	0	=СУММ(B16:E16)
17	III	0	0	0	0	=СУММ(B17:E17)
18	Объем перевозок	=СУММПРОИЗВ(B15:B17;B3:B5)	=СУММПРОИЗВ(C15:C17;C3:C5)	=СУММПРОИЗВ(D15:D17;D3:D5)	=СУММПРОИЗВ(E15:E17;E3:E5)	=СУММПРОИЗВ(B15:E17;B10:E12)

Рисунок 9.8 – Часть рабочего листа в режиме отображения формул

Окно *Поиск решения* (рис. 9.9), помимо остальных ограничений, содержит ограничение на целочисленность переменных, означающее, что количество самолетов должно быть целым числом.

В результате будет получено оптимальное решение (рис. 9.10).

Параметры поиска решения

Оптимизировать целевую функцию:

До: ☐ Максимум ☒ Минимум ☐ Значения:

Изменяя ячейки переменных:

В соответствии с ограничениями:

Добавить

Изменить

Удалить

Рисунок 9.9 – Пример заполнения окна Поиск решения

Тип	Матрица переменных				Число
I	20	0	20	10	50
II	0	8	0	0	8
III	0	0	20	0	20
Объем перевозок	300	200	1000	500	2224

Рисунок 9.10 – Оптимальное распределение самолетов по авиалиниям

Общая стоимость перевозок составит 2 224 условных единицы. Из 20 самолетов второго типа будет использовано 8; из 30 самолетов третьего типа будет использовано 20. Месячный объем перевозок выполнен полностью.

Задания для выполнения

1. В распоряжении некоторой компании имеется 6 торговых точек и столько же продавцов. Из опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Коммерческий директор оценил деятельность каждого продавца в каждой торговой точке при условии, что назначение первого продавца на четвертую торговую точку недопустимо. Результаты этой оценки представлены в таблице 9.12.

Как коммерческий директор должен осуществить назначение продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

Таблица 9.12 – Данные об объемах продаж каждого продавца по торговым точкам

Продавец	Объем продаж по торговым точкам					
	I	II	III	IV	V	VI
A	68	72	75	83	75	69
B	56	60	58	63	61	59
C	35	38	40	45	25	27
D	40	42	47	45	53	36
E	62	70	68	67	69	70
F	65	63	69	70	72	68

2. Фирма занимается перевозкой груза. Автопарк фирмы располагает машинами для грузоперевозок трех типов. Требуется распределить машины по маршрутам так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждому из четырех маршрутов соответственно не менее 300; 200; 900 и 600 единиц груза. В таблицах 9.13 и 9.14 задано число машин каждого типа, месячный объем перевозок каждой машиной на каждом маршруте и соответствующие эксплуатационные расходы.

Таблица 9.13 – Данные о количестве машин и месячном объеме перевозок

Тип машины	Месячный объем перевозок одной машиной по маршрутам				Число машин
	I	II	III	IV	
1	15	10	20	50	40
2	30	20	10	17	25
3	25	50	30	45	30

Таблица 9.14 – Данные об эксплуатационных расходах

Тип машины	Эксплуатационные расходы на маршруты			
	I	II	III	IV
1	10	20	25	40
2	70	22	15	45
3	40	50	40	65

Ответы к заданиям:

1. $F(x) = 371$; $F(x) = 368$.

2. $F(x) = 2\,070$.

Контрольные задания

Выполните математическую формализацию транспортной задачи. Получите оптимальное решение, сделайте анализ оптимального решения.

1. Три завода выпускают комбайны, которые отправляются потребителям. Первый завод выпускает 50, второй – 40, третий – 70 комбайнов. Каждому из потребителей требуется соответственно 30; 50; 40 и 40 комбайнов. Стоимость перевозки одной единицы техники от поставщика потребителю за-

дана матрицей стоимостей $\begin{pmatrix} 10 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ 11 & 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Составьте оптимальный план,

обеспечивающий общую минимальную стоимость перевозки комбайнов.

2. На двух складах А и В находится по 90 т горючего. Перевозка одной тонны горючего со склада А в пункты 1, 2, 3 соответственно стоит 1; 3; 5 у. е., а перевозка одной тонны со склада В в те же пункты – 2; 5; 4 у. е. В каждый пункт нужно доставить по 60 т горючего. Составьте план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут наименьшими.

3. В резерве трех железнодорожных станций А, В, С находятся соответственно 60; 80; 100 вагонов. Найдите оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту 1 необходимо 40 вагонов, пункту 2 – 60, пункту 3 – 80 и пункту 4 – 60 вагонов. Стоимость перегона одного вагона со станции А в указанные пункты соответственно составляет 1; 2; 3; 4 у. е., со станции В – 4; 3; 2; 1 у. е., со станции С – 1; 2; 2; 1 у. е.

4. На строительном полигоне имеются два кирпичных завода, объем производства которых в сутки равен 600 и 700 т. Заводы удовлетворяют потребности пяти строительных объектов соответственно в количестве 250; 300; 150; 200 и 400 т. Кирпич на строительные объекты доставляется автотранспортом. Стоимость перевозки 1 т кирпича с каждого из заводов соответствующим строительным полигонам указана в матрице стоимостей $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$. Определите план перевозки кирпича строительным полигонам, обеспечивающий минимальную стоимость перевозки.

5. Завод имеет три цеха А, В, С и четыре склада 1, 2, 3, 4. Цех А производит 30, цех В – 40, цех С – 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов: 20; 30; 30; 10 тыс. шт. соответственно. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха А на склады 1, 2, 3, 4 соответственно равна 2; 3; 2; 4 у. е., из цеха В – 3; 2; 5; 1 у. е., из цеха С – 4; 3; 2; 6 у. е. Составьте план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы минимальными.

6. Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. При этом первый завод поставляет 90, второй – 30, третий – 40 платформ грузовиков. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70, второму – 30, третьему – 20, четвертому – 40 шт. Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей, обеспечивающий минимальные расходы. Стоимость перевозки одной платформы от поставщика к потребителю приведена в таблице 9.15.

Таблица 9.15 – Данные о стоимости перевозок

Поставщики	Потребители			
	I	II	III	IV
1	18	20	14	10
2	10	20	40	30
3	16	22	10	20

7. Груз, находящийся на трех складах и требующий для перевозки 60; 80; 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44, второму – 70, третьему – 50 и четвертому – 82 машины груза. При этом стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 у. е. Расстояния от складов до магазинов указаны в таблице 9.16.

Таблица 9.16 – Данные об расстоянии от складов до магазинов

Склады	Машины			
	1	2	3	4
1	18	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный план перевозки груза от складов до магазинов.

8. Производственное объединение имеет в своем составе три филиала, которые производят однородную продукцию соответственно в количествах, равных 50; 30 и 10 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности равны 30; 30; 10 и 20 ед. соответственно. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соот-

ветствующим потребителям задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Со-

ставьте такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

9. Продукция выпускается на трех заводах в количестве 340; 300; 460 единиц. Спрос на эту продукцию определяется соответственно в количестве 350; 200; 450 и 100 единиц. Транспортные расходы на доставку 1 ед. продукции с i -го завода ($i = 1, 2, 3$) k -му потребителю ($k = 1, 2, 3, 4$) определены матрицей

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Определите оптимальный план прикрепления потребителей к

заводам из условия минимизации затрат на транспортировку.

10. Груз доставляется в пункты 1, 2, 3, и 4 в количестве соответственно 30; 40; 50 и 60 единиц со складов А, В, С и Е, в которых находился данный груз в количестве 20; 40; 50 и 70 единиц соответственно. Стоимость перевозки единицы груза от каждого поставщика каждому потребителю задана матрицей

$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Составьте план перевозок, при котором общая стоимость пе-

ревозки груза минимальна.

11. На четырех складах находится соответственно 150; 100; 90 и 110 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуется соответственно 160; 110; 180 т горючего.

При этом стоимость перевозки 1 т горючего с i -го склада ($i = 1, 2, 3, 4$) в k -й

пункт ($k = 1, 2, 3$) задана матрицей стоимостей $\begin{pmatrix} 60 & 10 & 40 \\ 20 & 80 & 60 \\ 30 & 50 & 40 \\ 70 & 20 & 50 \end{pmatrix}$.

Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую стоимость транспортных расходов.

12. Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180; 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110; 90; 120; 80 и 150 ед.

Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Составьте план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

13. Автомобили перевозятся на трейлерах из трех центров четырем продавцам в количестве 50; 60; 80 и 50 шт. соответственно. В каждом из трех центров находилось соответственно 90; 100 и 50 шт. автомобилей. Стоимость перевозки одной единицы транспортного средства задана матрицей $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 4 \\ 7 & 9 & 5 & 8 \\ 5 & 8 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Найдите минимальные суммарные затраты на перевозку автомобилей.

14. На трех складах оптовой базы сосредоточен груз в количествах 90; 60 и 150 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 120; 40; 60 и 80 ед. груза.

Тарифы перевозок единицы груза из складов в магазины заданы матрицей $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Найдите план перевозок, при котором общая стоимость

будет минимальной.

15. На трех хлебокомбинатах производится 110; 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, потребности которых равны соответственно 80; 60; 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к

хлебозаводам задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Составьте план до-

ставки муки, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

16. В угольном бассейне добывается уголь, который хранится на трех складах в количестве 120; 60; 100 ед. соответственно. Добытый уголь доставляется четырем энергетическим установкам соответственно в количестве 70; 90; 50 и 70 ед. Стоимость доставки одной единицы угля из складов к энергетическим установкам задана матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите оптимальный

план доставки угля энергетическим установкам, обеспечивающий суммарные минимальные затраты.

ТЕМА 10.

ЗАДАЧА О КОММИВОЯЖЕРЕ

Цель: *приобретение навыков решения задач на определение минимального замкнутого пути в табличном процессоре Excel.*

Задачи: на основании заданных параметров производственных ситуаций определить минимальный замкнутый путь.

Задача о коммивояжере состоит в отыскании наилучшего маршрута для коммивояжера, который должен объехать все порученные ему города, расстояние между которыми известно, и вернуться назад. Нужно выбрать маршрут, минимизирующий общий путь.

Данная задача является одним из видов оптимизационных задач, с использованием представления данных в виде графов.

Алгоритмы, позволяющие решать на компьютере, используются не только для выбора оптимальных маршрутов автотранспорта при кольцевой доставке товаров (например, в торговую сеть), но и при планировании производства на конвейерах, выпускающих машины различных моделей. Например, с помощью таких алгоритмов рассчитывают оптимальные партии, позволяющие выпускать заданный объем продукции с минимумом затрат на переналадку конвейера.

Пример. Необходимо отослать данные так, чтобы они были получены во всех пунктах и вернулись в исходную точку с минимальными затратами; причем лишь для некоторых пунктов указаны путь и количество затрат на пересылку информации. Схемы пунктов, путей и затрат на эти пути изображены в виде графов, где большими буквами обозначены имена вершин, малыми цифрами – затраты на передачу.

Для выполнения задания необходимо определить, что будет являться оптимальным путем прохождения информации по всем заданным пунктам с возвращением в исходную точку с минимальными затратами на пересылку. В данном случае по схеме пунктов, путей и затрат на пути необходимо найти:

- 1) минимальный замкнутый путь, так как должен осуществляться возврат информации в исходную точку отправки;
- 2) минимальные затраты на минимальный путь.

Таким образом, на рисунке 10.1 предложен граф: для каждого перехода из точки в точку указаны весовые характеристики, по которым и будут определяться минимальные затраты. Пунктирной линией выделен путь с наименьшими затратами, который необходимо определить.

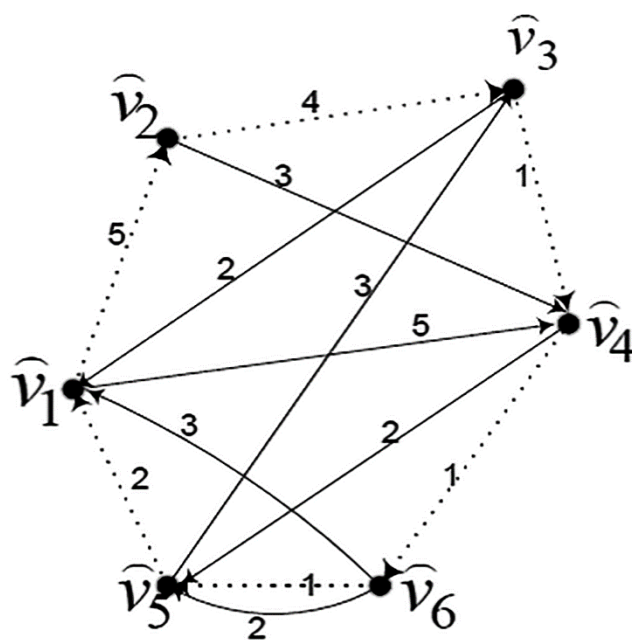


Рисунок 10.1 – Граф

Решение:

1. Первая таблица исходных данных (веса дуг) – таблица затрат на пересылку на данном пути между двумя соседними городами. Она состоит из одинакового количества строк и столбцов, равного количеству исходных пунктов назначения, и заполняется следующим образом:

1) если существует дуга (путь) из вершины в вершину (согласно направлению), то в ячейке на пересечении строки и столбца ставится вес этой дуги – затраты на передачу информации;

2) в противном случае ставится значение заведомо намного больше веса, например, равное 1 000 000.

На рисунке 10.2 представлена таблица исходных данных, составленная для графа, изображенного на рисунке 10.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Исходные данные (веса дуг)						
2		1	2	3	4	5	6
3	1	1000000	5	1000000	5	1000000	1000000
4	2	1000000	1000000	4	3	1000000	1000000
5	3	2	1000000	1000000	1	1000000	1
6	4	1000000	1000000	1000000	1000000	2	1
7	5	2	1000000	3	1000000	1000000	1
8	6	3	1000000	1000000	1000000	2	1000000

Рисунок 10.2 – Таблица исходных данных

2. Вторая таблица для оптимального решения выполняется в следующем порядке:

1) все значения изменяемых ячеек данной таблицы изначально заполняют нулями;

2) исходя из условия, задают ограничение по строкам и столбцам, равное единице, так как должно быть лишь одно прохождение от пункта до пункта, то есть производят суммирование по строкам и столбцам (рис. 10.3);

3) вводят целевую функцию для определения общих затрат на передачу информации, используя СУММПРОИЗВ (массив 1; массив 2), где:

массив 1 – диапазон исходных данных (затрат);

массив 2 – диапазон изменяемых ячеек.

3. Осуществляют поиск решения, выполняя команду *Данные, Поиск решения* (рис. 10.4). При этом необходимо:

10	Оптимальное решение						
11	1	2	3	4	5	6	
12	1	0	0	0	0	0	=СУММ(B12:G12)
13	2	0	0	0	0	0	=СУММ(B13:G13)
14	3	0	0	0	0	0	=СУММ(B14:G14)
15	4	0	0	0	0	0	=СУММ(B15:G15)
16	5	0	0	0	0	0	=СУММ(B16:G16)
17	6	0	0	0	0	0	=СУММ(B17:G17)
18	=СУММ(B12:B17)=СУММ(C12:C17)=СУММ(D12:D17)=СУММ(E12:E17)=СУММ(F12:F17)=СУММ(G12:G17)=СУММПРОИЗВ(B3:G8;B12:G17)						

Рисунок 10.3 – Таблица оптимального решения

Параметры поиска решения

Рисунок 10.4 – Диалоговое окно Поиск решения

- 1) установить целевую ячейку (ссылкой на ее местоположение) и переключатель *Равной минимальному значению*;
- 2) задать изменяемые ячейки – ссылка на диапазон изменяемых ячеек;
- 3) задать ограничения – диапазон сумм по столбцам и строкам (равен единице);
- 4) выполнить поиск оптимального решения.

4. По полученным данным (рис. 10.5) строят минимальный замкнутый путь.

Ответ. Получен следующий оптимальный путь прохождения информации по всем заданным пунктам с возвращением в исходную точку:

$$v1 \rightarrow v2 \rightarrow v3 \rightarrow v4 \rightarrow v6 \rightarrow v5 \rightarrow v1$$

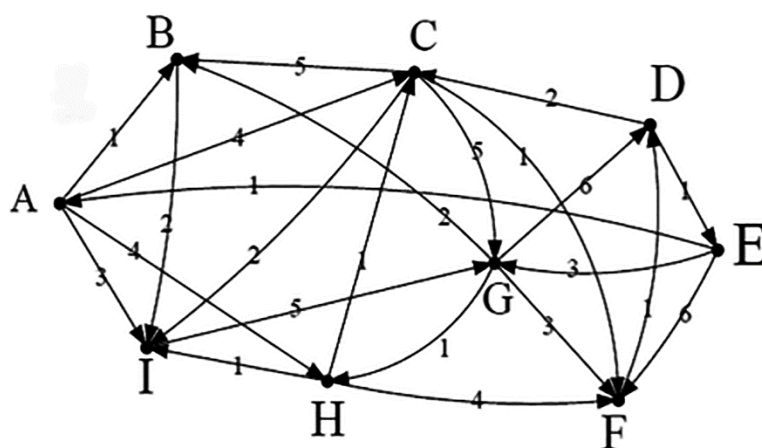
В данном случае минимальные затраты на минимальный путь оказались равными 15 денежных единиц.

10	Оптимальное решение							
11		1	2	3	4	5	6	
12	1	0	1	0	0	0	0	1
13	2	0	0	1	0	0	0	1
14	3	0	0	0	1	0	0	1
15	4	0	0	0	0	0	1	1
16	5	1	0	0	0	0	0	1
17	6	0	0	0	0	1	0	1
18		1	1	1	1	1	1	15

Рисунок 10.5 – Оптимальное решение

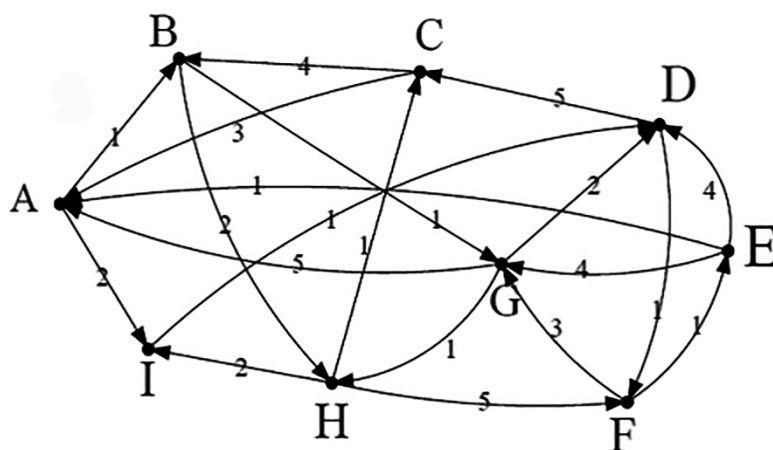
Варианты для выполнения

Используя данные рисунка 10.6, постройте минимальный замкнутый путь и определите минимальные затраты на него.



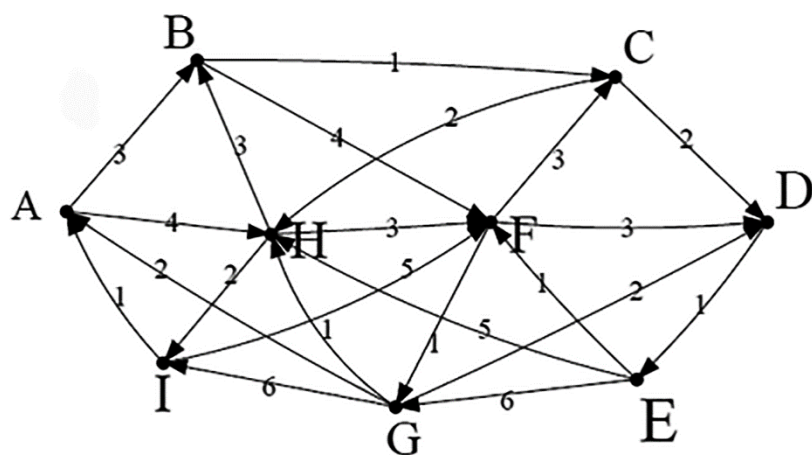
Целевая функция=14

Вариант 1



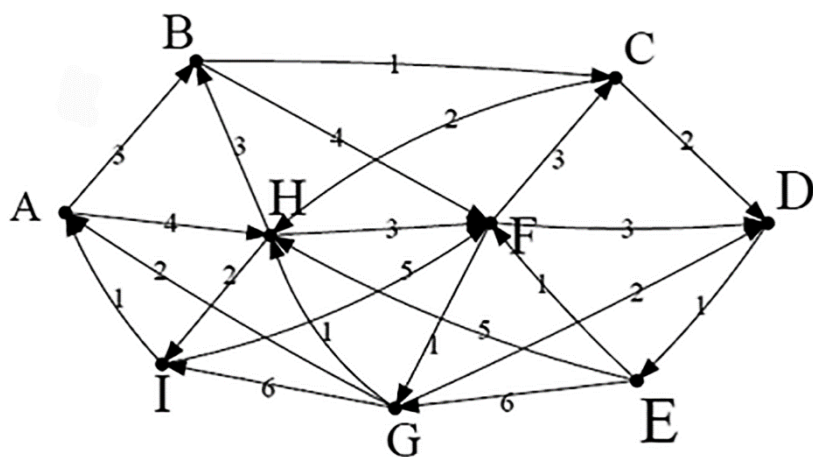
Целевая функция=13

Вариант 2



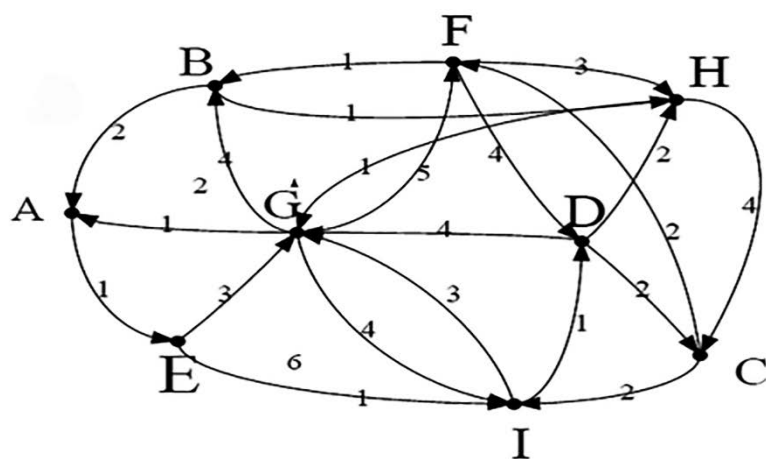
Целевая функция=13

Вариант 3



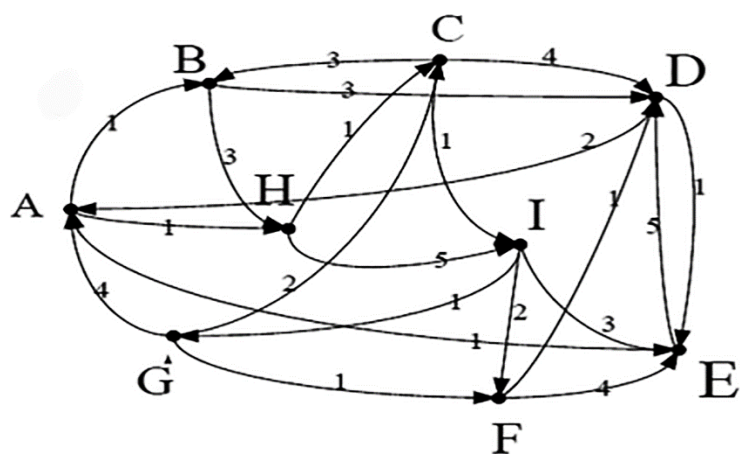
Целевая функция=12

Вариант 4



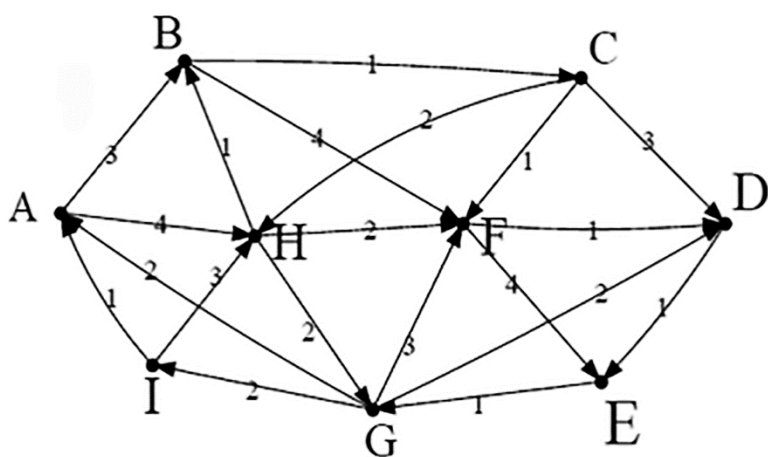
Целевая функция=11

Вариант 5



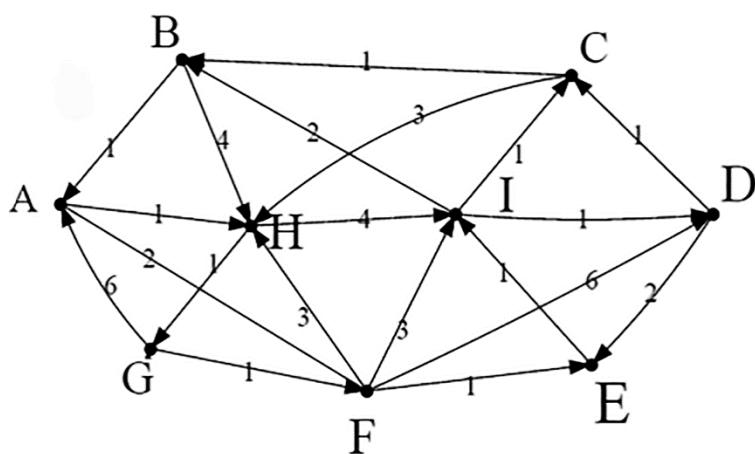
Целевая функция=11

Вариант 6



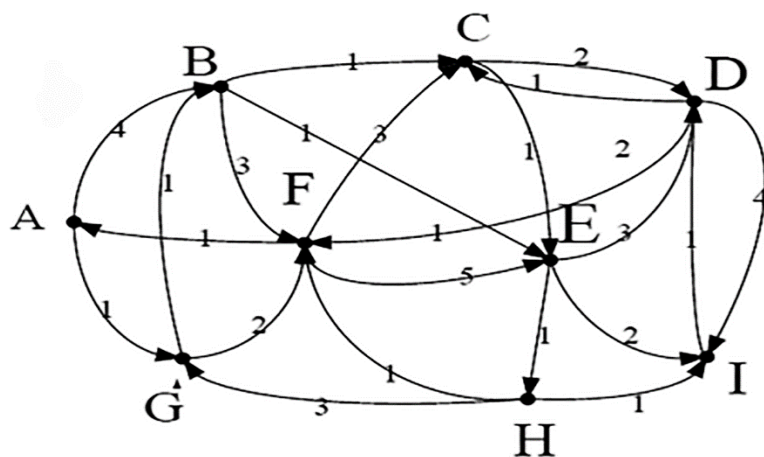
Целевая функция=10

Вариант 7



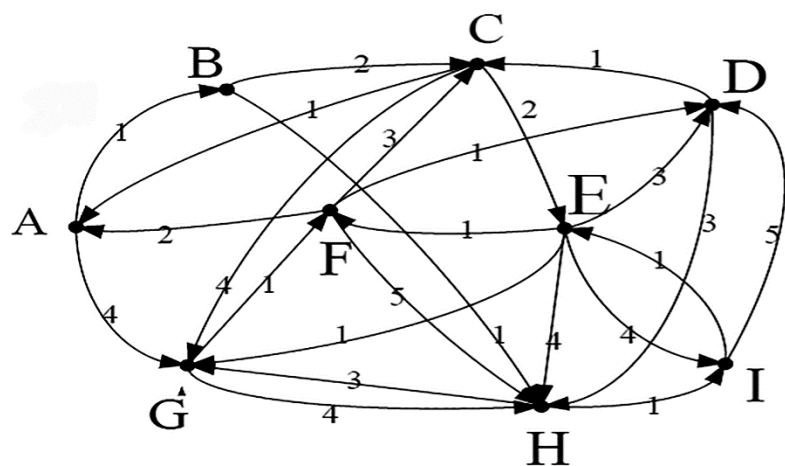
Целевая функция=9

Вариант 8



Целевая функция=9

Вариант 9



Целевая функция=9

Вариант 10

**Рисунок 10.6 – Варианты выполнения заданий
на решение задачи о коммивояжере**

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубков, Е. П. Методы принятия управленческих решений. Часть 1 : учебник и практикум / Е. П. Голубков. – Москва : Юрайт, 2022. – 183 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/489387>.
2. Голубков, Е. П. Методы принятия управленческих решений. Часть 2 : учебник и практикум / Е. П. Голубков. – Москва : Юрайт, 2023. – 249 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/512626>.
3. Дубина, И. Н. Основы математического моделирования социально-экономических процессов : учебник и практикум / И. Н. Дубина. – Москва : Юрайт, 2020. – 349 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/450960>.
4. Емельянов, А. М. Экономико-математические методы и модели : учебное пособие / А. М. Емельянов, Л. Г. Крючкова. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2010. – 59 с.
5. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум / А. В. Королев. – Москва : Юрайт, 2020. – 280 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/451297>.
6. Методы принятия управленческих решений : учебное пособие / под ред. П. В. Иванова. – Москва : Юрайт, 2023. – 276 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/517133>.
7. Орлова, И. В. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : учебное пособие / И. В. Орлова. – Москва : ИНФРА-М, 2012. – 389 с.
8. Смагин, Б. И. Экономико-математические методы : учебник / Б. И. Смагин. – Москва : Юрайт, 2020. – 272 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/453058>.

9. Трофимова, Л. А. Методы принятия управленческих решений : учебник и практикум / Л. А. Трофимова, В. В. Трофимов. – Москва : Юрайт, 2023. – 335 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/510561>.

10. Цветкова, Л. А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование : лабораторный практикум / Л. А. Цветкова, Л. А. Горюнова. – Благовещенск : Дальневосточный государственный аграрный университет, 2012. – 106 с.

11. Экономико-математические методы и модели : учебник / под общ. ред. А. М. Попова. – Москва : Юрайт, 2019. – 345 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/425189>.

12. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник / под ред. В. В. Федосеева. – Москва : Юрайт, 2019. – 328 с. // Образовательная платформа Юрайт : [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/406453>.

Учебное издание

*Цветкова Людмила Алексеевна,
кандидат экономических наук, доцент
Павличенко Анастасия Альбертовна,
кандидат экономических наук, доцент*

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Практикум

Подписано в печать 06.08.2024 г.
Формат 60х90/16. Уч.-изд. л – 3,81. Усл. печ. л. – 7,76.
Тираж по требованию. Заказ 104.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Дальневосточный государственный аграрный университет»

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии
Дальневосточного государственного
аграрного университета
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86

