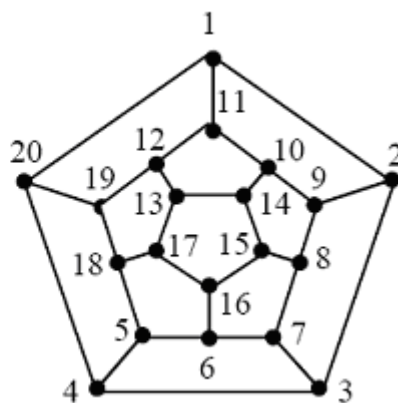
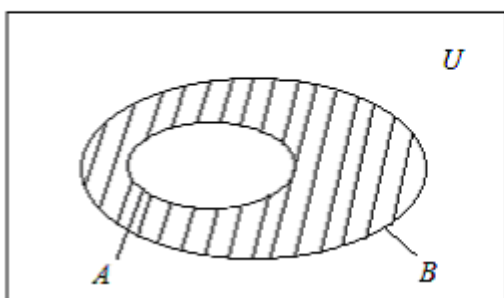


МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А.М.Емельянов, Е.А. Подолько, З.И. Каньшина, И.А. Скабелкина

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие



Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014

УДК 519.2(075.8) ББК 22.171

Элементы дискретной математики: учебное пособие / сост.: А.М. Емельянов, Е.А. Подолько, З.И. Каньшина, И.А. Скабелкина.– Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 106 с.

Учебное пособие составлено в соответствии с государственными общеобразовательными стандартами высшего профессионального образования по направлениям бакалавриата, реализуемым в ДальГАУ.

Данное пособие состоит из пяти глав и рекомендуемого списка литературы. Каждая глава разбита на параграфы, содержащие изложение теории. В конце параграфов представлено достаточное количество заданий для практических занятий, самостоятельных работ. Пособие можно использовать как конспект лекций.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения.

Рецензент – Г.В. Литовка, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой общей математики и информатики Амурского государственного университета

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета Дальневосточного государственного аграрного университета (Протокол № 9 от 2 июня 2014 года).

Издательство ДальГАУ
2014

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – это часть математики, занимающиеся изучением свойств структур дискретного характера, которые возникают как в самой математике, так и в областях ее приложений.

Дискретность – антипод непрерывности. Дискретное – раздельное, состоящее из разрозненных частей.

Дискретная математика стала активно развиваться с начала XX века, когда стали изучаться возможности формализации математики и были получены фундаментальные результаты в области математической логики. Это результаты Поста, Клини и, особенно, Гёделя.

Тесно связаны с математической логикой исследования в области теории алгоритмов Тьюринга, Поста, Чёрча (также в начале XX века).

Информатизация и компьютеризация общества во второй половине XX века в значительной степени стимулировала развитие дискретной математики.

Использование классической или дискретной математики как аппаратов исследования связано с тем, какие задачи ставит перед собой исследователь, и, в связи с этим, какую модель изучаемого явления он рассматривает – дискретную или непрерывную. Например, конечное по количеству – всегда дискретное. В дискретной математике существуют свои методы и задачи, специфика которых обусловлена, в первую очередь, необходимостью отказа от основополагающих понятий классической математики, таких как предел, производная, интеграл, непрерывность функции и тем, что для многих дискретных задач сильные средства классической непрерывности оказываются мало применимы.

Дискретная математика включает в себя такие сложившиеся в самостоятельные дисциплины разделы, как комбинаторный анализ, теория чисел, математическая логика, теория графов, теория функциональных схем, теория кодирования, теория алгоритмов, дискретное программирование. Таким образом, дискретная математика является фундаментом информатики и математической кибернетики – теоретической основе науке об управлении. Методы дискретной математики применяются в решении многих технических и экономико-математических задачах.

Настоящее учебное пособие, рассчитанное на студентов – не математиков: строителей, электриков, агроинженеров, экономистов, менеджеров, является введением в дискретную математику. В него включены следующие главы: теория множеств, бинарные отношения, математическая логика, комбинаторика, теория графов. Эти главы являются основой для изучения технических, экономико-математических дисциплин.

В предлагаемом вниманию учебном пособии представлен теоретический материал, сопровождаемый примерами и пояснениями.

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

п.1.1 Множества

Основные положения теории множеств впервые были разработаны чешским философом, математиком и логиком, профессором теологии (г. Прага) Бернардом Больцано (1781—1848), немецким математиком Рихардом Дедекиндом (1831—1916) и немецким математиком, профессором (с 1872 г.) Галльского университета Георгом Кантором (1845—1918). Г. Кантор внес в теорию множеств (особенно бесконечных) наибольший вклад, поэтому теория множеств тесно связана с его именем.

Понятие множества используется для описания совокупности предметов и объектов (по Г. Кантору — «многое, определяемое как единое». При этом предполагается, что объекты данной совокупности можно отличить друг от друга и от предметов, не входящих в эту совокупность.

Теория множеств — это раздел математики, в котором изучаются общие свойства конечных и бесконечных (в основном бесконечных) множеств.

Главным в теории множеств является вопрос о том, как определить множество, т. е. указать способ, при помощи которого можно было бы однозначно установить, принадлежит ли данный объект заданному множеству или не принадлежит.

Объекты, из которых состоят множества, называются их *элементами*. Принадлежность элемента a множеству P записывают так:

$$a \in P,$$

где \in — *знак принадлежности*. Он представляет собой видоизмененную букву ε греческого алфавита, с которой начинается слово *εστι*, по-русски обозначающее «есть».

Читается запись следующим образом: « a есть элемент множества P », либо « a является элементом множества P », либо «элемент a принадлежит множеству P ».

При необходимости указать несколько элементов, принадлежащих множеству P , все их перечисляют перед знаком \in . Например, запись $a, b, c \in P$ говорит о том, что

$$a \in P, \text{ и } b \in P, \text{ и } c \in P.$$

Если же элемент a не принадлежит множеству P , то пишут:

$$a \notin P.$$

Если множеству P не принадлежит несколько элементов, например, a, b, c , то записывают:

$$a, b, c \notin P.$$

Множество может содержать любое число элементов, *конечное* и *бесконечное*. Множество может содержать один элемент и не содержать ни одного. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается символом \emptyset . Множество, содержащее один элемент, называется *синглтоном* (от англ. single — одиночный).

Задают множества двумя основными способами:

а) путем прямого перечисления его элементов. При этом перечисляемые элементы заключаются в фигурные скобки и отделяются один от другого запятыми. Например, запись

$$P = \{a, b, c, d\}$$

говорит о том, что множество P состоит из четырех элементов a, b, c, d ;

б) при помощи специально сформулированного правила, или свойства, в соответствии с которым всякий объект либо входит в множество, либо не входит (интуитивный принцип абстракции). Такое правило называют формой $P(x)$. Множество, задаваемое формой $P(x)$, имеет вид

$$A = \{x / P(x)\}.$$

Например, множество десятичных цифр можно задать следующим образом:

$$P = \{x / 0 \leq x \leq 9 \wedge x \text{ — целое число}\},$$

где слева от наклонной черты записана переменная x , а справа — правило (форма $P(x)$), указывающее, какие значения x образуют элементы, принадлежащие множеству P , и какие не образуют. Читается запись так: «множество P — это все те значения x , которые больше нуля или равны ему, но меньше или равны девяти и являются целыми числами». Знак \wedge обозначает союз И. Вместо него можно ставить знак $\&$, который также обозначает союз И:

$$P = \{x / 0 \leq x \leq 9 \& x \text{ — целое число}\}. \quad (1)$$

Допускается и такая запись, где вместо логических знаков \wedge и $\&$ ставится запятая либо точка с запятой:

$$P = \{x / 0 \leq x \leq 9, x \text{ — целое число}\}.$$

$$P = \{x / 0 \leq x \leq 9; x \text{ — целое число}\}.$$

При этом необходимо помнить, что и запятая, и точка с запятой заменяют союз И.

Вместо наклонной черты, отделяющей переменную x от формы $P(x)$, в литературе встречается и прямая черта:

$$P = \{x | 0 \leq x \leq 9, x \text{ — целое число}\},$$

а также точка:

$$P = \{x \cdot P(x)\}.$$

Буква x в записи множества сама по себе не является элементом множества P . Она представляет собой переменную, которая может принимать различные значения из некоторой области. В случае выражения (1) вместо переменной x можно подставлять любые числа. Но из них в множество P войдут лишь десять чисел: 0, 1, 2, ..., 9. Число 10 в множество P не входит, поскольку оно не удовлетворяет свойству $x \leq 9$. Не войдет в множество P и число 3,5, так как в P могут входить лишь целые числа.

Множества называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов (интуитивный принцип объемности). Например:

$$\{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}.$$

Элементы этих множеств записаны в различных последовательностях, но наборы элементов совпадают, поэтому множества равны, так как *порядок* записи элементов, образующих множество, *не имеет значения*.

Равными могут быть также множества, заданные различными способами.

Например:

$$P = \{x / 0 < x < 10, x \text{ — простое число}\}, \\ Q = \{2, 3, 5, 7\}.$$

Здесь множество P образуют все значения x , меньшие 10 и входящие в множество простых чисел. Это числа 2, 3, 5, 7. Множество Q образует те же простые числа, но указанные прямым перечислением. Следовательно, $P=Q$.

В некоторых случаях, когда множества задаются прямым перечислением, для того чтобы выяснить, равны ли множества, необходимо уточнять понятие равенства элементов. Например: являются ли равными следующие множества:

$$P = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}; \\ Q = \{\sqrt{1}, \sqrt{16}, \sqrt{81}, \sqrt{256}\}$$

Эти множества не равны, поскольку по форме представления их элементы не совпадают. Но эти множества будут равными, если считать, что их элементы представляют собой натуральные десятичные числа, заданные с использованием математических операций. Достаточно выполнить эти операции, и мы в обоих случаях получим одно и то же множество $\{1, 4, 9, 16\}$, откуда и следует, что $P=Q$.

Для обозначения множеств в общем случае можно использовать любые знаки, но в основном их обозначают прописными буквами латинского алфавита.

Всякое множество характеризуется величиной, которую называют (по Г. Кантору) *кардинальным числом*, показывающим, сколько элементов содержит множество. Для обозначения числа элементов множества часто используют две вертикальные черты, между которыми записывается само множество или его обозначение.

Например, если $P = \{a, b, c\}$, то его кардинальное число равно: $|P| = |\{a, b, c\}| = 3$.

Множества с одинаковыми кардинальными числами называются *эквивалентными*.

Упражнения

1. Как называют: а) множество студентов университета; б) множество артистов, работающих в одном театре?

2. Приведите примеры множеств, составленных из: а) чисел; б) геометрических фигур.

3. A – множество параллелограммов. Принадлежит ли этому множеству: а) ромб; б) трапеция; в) диагональ параллелограмма; г) параллелепипед; д) прямоугольник?

4. Даны множества: M – множества натуральных чисел, больших 8 и меньших 18; P – множества натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 7.

а) Укажите, каким из этих множеств принадлежат числа 12, 17, 0, 3, 7. Запишите это с помощью символа \in .

б) Укажите, каким из этих множеств не принадлежат названные числа. Запишите это с помощью символа \notin .

5. Докажите, что следующие множества пусты:

- а) множество натуральных чисел, меньших нуля;
- б) множество натуральных чисел, больших 8 и меньших 9;
- в) множество натуральных чисел, квадрат которых равен -1.

6. Перечислите элементы следующих множеств:

A – множество различных букв в слове «барабан»;

B – множество столиц России;

C – множество различных цифр числа 214 425;

$D = \{x | x \text{ – день недели, название которого начинается с буквы «п»}\}$.

7. Выберите на листе бумаги точку O и отметьте штриховкой множество точек K таких, что:

- а) $|OK|=5$ см; б) $|OK|>5$ см; в) $|OK|<5$ см.

8. Укажите среди следующих множеств равные:

A – множество ромбов с прямыми углами;

B – множество квадратов;

C – множество прямоугольников с конгруэнтными сторонами;

D – множество четырехугольников с прямыми углами;

E – множество прямоугольников.

9. Является ли множество всех атомов Солнечной системы бесконечным?

10. Привести пример таких множеств A , B , и C , что $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$.

п.1.2. Подмножества

Множество B называется *подмножеством* множества A , если все элементы множества B принадлежат множеству A .

Будем различать следующие две записи:

$$B \subseteq A \text{ и } B \subset A,$$

где символы \subseteq и \subset представляют собой знаки *включения*. Запись $B \subseteq A$ читается: «множество B включено в множество A , причем множество A является подмножеством самого себя». Запись $B \subset A$ говорит о том, что все элементы множества B входят в множество A , но само множество A не является своим подмножеством.

Пустое множество является подмножеством любого множества.

Множество всех подмножеств множества P называют *булеаном* этого множества P и обозначают $B(P)$. Булеан множества $P = \{a, b, c\}$ имеет вид

$$B(P) = \{\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}.$$

Упражнения

1. Даны множества: $A = \{1; 21; 121; 15; 52; 512\}$; $B = \{16; 2; 5\}$; $C = \{1; 21; 15\}$; $D = \{21; 15; 52\}$; $E = \{121; 512\}$; $F = \{12; 15; 25\}$; $K = \{21; 121; 512; 52; 15\}$; $Q = \{512\}$. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами множества A .

2. Какая разница в записях $A \in B$ и $A \subseteq B$?
3. Верно ли, что $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?
4. Верно ли, что $\{1, 2\} \subseteq \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?
5. Привести пример такого множества B , что для некоторого A одновременно $A \in B$ и $A \subseteq B$.
6. Для каждого из двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого: $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{\{1\}, 2, 3\}$, $E = \{3, 2, 1\}$, $F = \{\{1, 2\}, 3\}$.
7. Пусть A – множество выпуклых многоугольников, B – множество четырехугольников, C – множество трапеций, D – множество параллелограммов, E – множество ромбов. Укажите, какие из данных множеств являются подмножествами других. Запишите это при помощи символа \subset .

п.1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество

Операции на множествах можно графически представить в виде *диаграммы Венна* (иногда их называют диаграммами Эйлера, кругами Эйлера, диаграммами Эйлера-Венна), когда множествам сопоставляются замкнутые фигуры на плоскости, взаимное расположение которых определяет результат операции. Так, пересечение двух фигур, сопоставленных множествам A и B , образует новую замкнутую фигуру, соответствующую общей части фигур A и B – результату операции объединения, пересечения, и т.п.

На рисунке 1 показаны два множества:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$M = \{1, 2, 3\}.$$

Из диаграммы видно, что $M \subset P$.

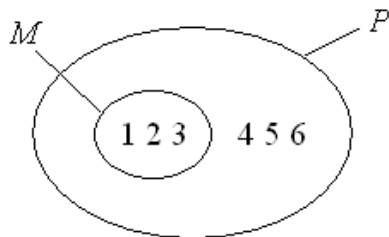


Рис. 1

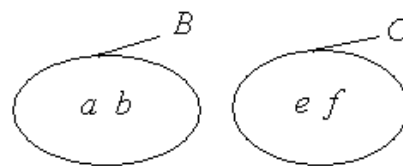


Рис. 2

Если требуется показать, что множества не имеют общих элементов, эти множества изображают непересекающимися кругами. На рис. 2 непересекающимися являются множества

$$B = \{a, b\}; C = \{e, f\}.$$

Одним из важнейших понятий теории множеств является понятие *универсального* множества (иногда употребляется термин «полное множество», а также «универсум»). Обозначается оно обычно символом U (либо I). Множество U — это множество всех тех элементов, которые участвуют в данном рассуждении. Любое рассматриваемое при этом множество является подмножеством универсального множества. Например, если рассматриваются

различные множества целых положительных чисел за исключением нуля, то универсальным можно считать множество всех натуральных чисел. Также, например, универсальным множеством может быть множество студентов факультета, и для него можно рассматривать множества студентов конкретных групп, студентов, получающих именные стипендии и т.п.

На диаграммах Венна универсальные множества изображаются в виде прямоугольников, внутри которых размещаются круги, обозначающие подмножества соответствующих универсальных множеств. На рис. 3 показан пример универсального множества

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

и двух его подмножеств $P = \{2\}$ и $Q = \{2, 3, 5, 7\}$, где P — множество четных простых чисел, а Q — множество всех простых чисел, меньших 10.

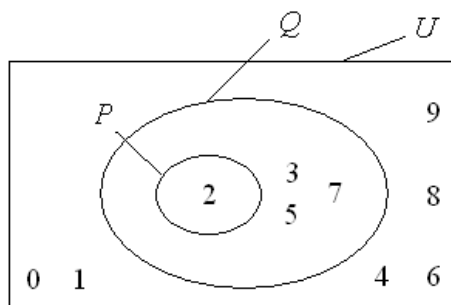


Рис. 3

В общем случае универсальным может быть любое непустое множество.

Упражнения

- Изобразите с помощью диаграмм Венна следующие пары множеств:
 - A — множество студентов некоторого университета и B — множество студентов технологического факультета этого университета;
 - C — множество квадратов и D — множество треугольников.
- Постройте диаграммы Венна для множеств, данных в упражнении 7 пункта 1.2.
- Рассмотрим универсальное множество U книг в библиотеке университета и его подмножества: A — книг по математике, M — книг по алгебре, N — книг по физике, K — множество книг на английском языке. Изобразите эти множества с помощью диаграмм Венна.

п.1.4. Операции над множествами

1. *Объединением* или *суммой* n множеств A_1, A_2, \dots, A_n называется множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из этих n множеств:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n,$$

где знак \cup обозначает операцию объединения множеств.

Операция объединения множеств определяется следующим образом:

$$A = \{x/x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \dots \vee x \in A_n\},$$

где \vee — логический знак, обозначающий союз ИЛИ. Читается эта запись так: множество A — это все те значения x , которые принадлежат множеству A_1 , или множеству A_2 , или множеству A_3 и так далее до множества A_n .

Например, пусть даны множества:

$$A_1 = \{a, b, c\}; A_2 = \{4\}; A_3 = \{b, 54\}.$$

Применив к ним операцию объединения, получим новое множество

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{a, b, c, 4, 54\}.$$

Заметим, что $b \in A_1$ и $b \in A_3$, однако в множество A элемент b входит только один раз (известно, что все элементы множества должны быть различными).

На диаграммах Венна объединение множеств обозначают сплошной штриховкой областей, соответствующих этим множествам. На рис. 4 заштрихована область множества $P \cup Q$. На рис. 5 показана штриховкой область множества $(P \cup Q) \cup R$. На рис. 6 изображено три множества P , Q и R . Штриховкой отмечено множество $Q \cup R$.

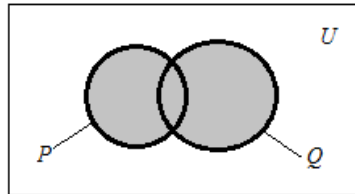


Рис. 4

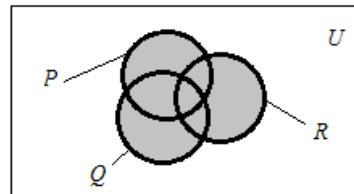


Рис. 5

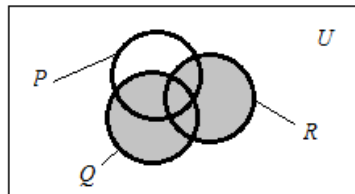


Рис. 6

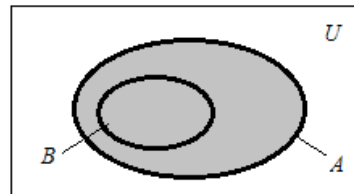


Рис. 7

Операция объединения множеств обладает следующими свойствами:

а) объединение *коммутативно*:

$$A \cup B = B \cup A;$$

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C \text{ и т. д.}$$

б) объединение *ассоциативно*:

$$(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup B = (B \cup C) \cup A = A \cup B \cup C.$$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, соединенных знаком объединения, скобки можно не использовать;

в) если $B \subseteq A$ или $B \subset A$, то $A \cup B = A$. На рис. 7 приведена диаграмма Венна для случая, когда $B \subset A$. Штриховкой отмечена область множества A , которая одновременно относится и к множеству $A \cup B$.

Из свойства «в» следует, что:

$$A \cup A = A; \quad (2)$$

$$A \cup \emptyset = A; \quad (3)$$

$$A \cup U = U. \quad (4)$$

Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U , а внутри его – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, можно заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств. Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

2. *Пересечением* или *произведением* n множеств A_1, A_2, \dots, A_n называется множество A , каждый элемент которого принадлежит каждому из множеств A_1, A_2, \dots, A_n :

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n,$$

где знак \cap обозначает операцию пересечения множеств.

Операция пересечения определяется следующим образом:

$$A = \{x/x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n\},$$

где \wedge — логический знак, обозначающий союз И.

Читается эта запись так: множество A — это все те значения x , которые входят и в множество A_1 , и в множество A_2 , и так далее до множества A_n .

Например, пусть даны множества:

$$A = \{a, b, c, d\}; B = \{b, c, d, e\}; C = \{c, d, e, f\}.$$

Применив к ним операцию пересечения, получим новое множество K :

$$K = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, d, e\} \cap \{c, d, e, f\} = \{c, d\}.$$

Как и в случае объединения множеств, их пересечение на диаграммах Венна обозначается штриховкой. На рис. 8 заштрихована область, относящаяся одновременно к обоим множествам P и Q , где

$$P = \{1, 3, 5, 7\}; Q = \{5, 6, 7, 8\}.$$

Из диаграммы видно, что $P \cap Q = \{5, 7\}$.

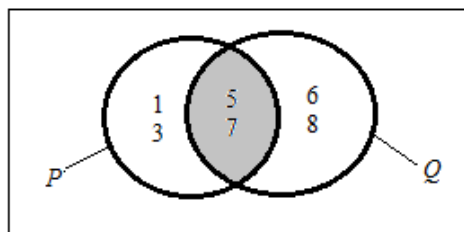


Рис. 8

Операции пересечения множеств присущи те же свойства, что и операции объединения:

а) *пересечение коммутативно*:

$$A \cap B = B \cap A;$$

$$A \cap B \cap C = B \cap A \cap C = C \cap A \cap B \text{ и т. д.};$$

б) *пересечение ассоциативно*:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C.$$

Благодаря ассоциативности при записи нескольких множеств, объединенных знаком пересечения, скобки можно не ставить;

в) если $A \subseteq B$ или $A \subset B$, то $A \cap B = A$. На рис. 9 приведена диаграмма Венна для $A \subset B$. Заштрихована область, относящаяся к обоим множествам A и B . Так как $A \subset B$, то все элементы множества A одновременно являются элементами множества B .

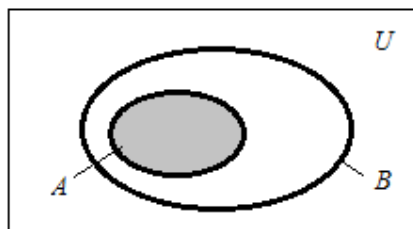


Рис. 9

Из свойства «в» следует, что:

$$A \cap A = A; \quad (5)$$

$$A \cap U = A; \quad (6)$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset. \quad (7)$$

Необходимо отметить еще два свойства: *дистрибутивность пересечения относительно объединения*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (8)$$

и *дистрибутивность объединения относительно пересечения*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (9)$$

В справедливости этих свойств нетрудно убедиться при помощи диаграмм Венна.

Свойство (9) можно получить из свойства (8), если все знаки объединения заменить знаками пересечения, а все знаки пересечения заменить знаками объединения. Точно таким же образом можно получить формулу (8) из формулы (9).

В литературе по дискретной математике принято: если в одном и том же выражении встречаются операции объединения и пересечения, то первой выполняется операция пересечения, а затем — объединения. Поэтому многие формулы можно записывать без скобок и использовать их только в тех случаях, когда порядок действий необходимо изменить.

Для примера рассмотрим формулу:

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) = A \cap B \cup B \cap C.$$

На основании выше сказанного, обе части данного выражения будут восприниматься однозначно.

Если же сначала должна выполняться операция объединения, а затем — пересечения, то необходимо использовать скобки. Например: $(A \cup B \cup C) \cap D$. В этом выражении первой выполняется операция объединения и лишь затем — пересечения.

Упражнения

1. Найдите объединение множеств A и B , если:

а) $A = \{д; о; м\}$, $B = \{м; о; р; е\}$;

б) A – множество цифр числа 482 528, B – множество цифр числа 5 283 824;

в) $A = \{x | x \in N, x \leq 9\}$, $B = \{x | x \in N, x > 10\}$.

2. P – множество прямоугольников, R – множество ромбов. Какие фигуры принадлежат множеству $P \cup R$?

3. Какая фигура является объединением двух смежных углов?

4. Представьте квадрат в виде объединения четырех треугольников.

5. Найдите пересечение множеств:

а) $A = \{a; b; c; d; e; f\}$; $B = \{f; d; a; m\}$;

б) $A = \{x | x \in N, x < 10\}$, $B = \{x | x \in N, x \leq 7\}$.

6. Даны множества E и F . Изобразите эти множества с помощью диаграмм Венна и отметьте штриховкой множество $E \cap F$, если: а) $E \subset F$; б) $F \subset E$; в) $E \cap F = \emptyset$; г) $E = F$.

п.1.5. Дополнение множества

Если U — универсальное множество, то дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые являются элементами множества U , но не входят в множество A . Это значит, что если элементы множества A обладают некоторыми свойствами, то каждый из элементов дополнения множества A этими свойствами не обладает (одним или несколькими).

Обозначается дополнение чертой над символом множества: \bar{A} (в литературе встречаются и другие обозначения: $\neg A$, A' , $\sim A$, NA , \overline{A} и др.).

Формально операцию дополнения можно определить следующим образом:

$$\bar{A} = \{x / x \notin A \wedge x \in U\}.$$

Читается эта запись так: множество \bar{A} — это все те значения x , которые не входят в множество A , но являются элементами универсального множества U .

Например, если U — множество десятичных цифр и $A = \{1, 3, 4\}$, то $\bar{A} = \{0, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

На рис. 10 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая операцию дополнения. Из диаграммы видно:

$$A \cup \bar{A} = U; \quad (10)$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset; \quad (11)$$

$$\overline{\bar{A}} = A \quad (12)$$

(свойство инволюции);

$$\text{если } A = \emptyset, \text{ то } \bar{A} = U, \text{ т. е. } \overline{\emptyset} = U; \quad (13)$$

$$\text{если } A = U, \text{ то } \bar{A} = \emptyset, \text{ т. е. } \bar{U} = \emptyset. \quad (14)$$

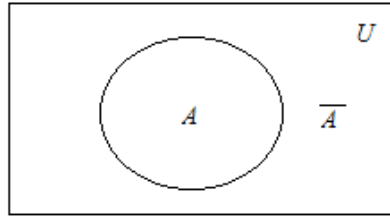


Рис. 10

Дополнение множества A возможно не только до универсального, но и до любого множества Q , если $A \subseteq Q$:

$$\bar{A}^Q = \{x / x \notin A, x \in Q, A \subseteq Q\},$$

где знак Q при символе \bar{A} (т. е. \bar{A}^Q) говорит о том, что операция дополнения осуществляется до множества Q . Например, если

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ и } Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ то } \bar{A}^Q = \{4, 5\}.$$

Упражнения

1. Пусть $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Укажите элементы, входящие в множество \bar{A} , если:

$$\begin{array}{ll} A = \{3, 4\}; & A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; \\ A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}; & A = \emptyset. \end{array}$$

2. Найдите элементы множества \bar{A} , если A — множество всех простых чисел, не превышающих 7, $I = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

3. Дано:

$$A = \{1, 2\}; B = \{1, 2, 3, 4\}; I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Найдите сначала элементы множества $\overline{A^B}$, затем элементы множества \bar{A} .

4. Дано: $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найдите элементы множества A , если $\overline{A^B} = \{6, 7\}$.

Найдите элементы множества C , если $\overline{C^B} = \{3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множества D , если $\overline{D^B} = \emptyset$.

п.1.6. Законы де Моргана

Законы де Моргана устанавливают связь между операциями объединения, пересечения и дополнения:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad (15)$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (16)$$

Закон (15) формулируется следующим образом: *дополнение объединения есть пересечение дополнений*. Аналогично формулируется закон (16): *дополнение пересечения есть объединение дополнений*.

Убедиться в справедливости соотношений (15) и (16) можно при помощи диаграмм Венна. Обратимся к выражению (15). На рис. 11 вертикальной штриховкой обозначена область, соответствующая левой части формулы (15). Она обозначает дополнение множества $A \cup B$.

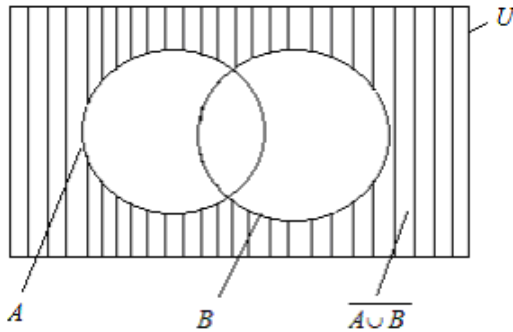


Рис. 11

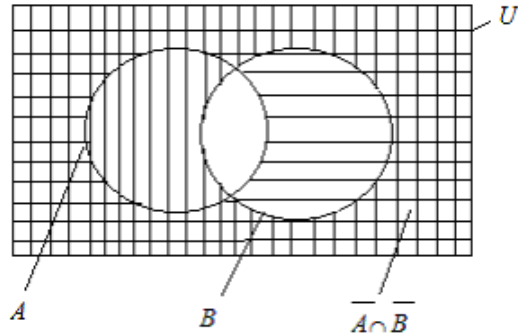


Рис. 12

Правая часть равенства (15) состоит из пересечения множеств \bar{A} и \bar{B} . Множество \bar{A} нанесем на диаграмму Венна горизонтальной штриховкой (рис. 12), а множество \bar{B} — вертикальной. Тогда двойная штриховка будет соответствовать пересечению множеств \bar{A} и \bar{B} .

Из рис. 11 и 12 видно, что множества $\overline{A \cup B}$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$ занимают на диаграммах Венна одну и ту же область, следовательно, соотношение (15) справедливо.

Аналогично можно доказать справедливость формулы (16). На рис. 13 приведена диаграмма Венна для левой части равенства (16). Вертикальной штриховкой на ней обозначено дополнение множества $A \cap B$.

Правая часть равенства (16) есть объединение двух множеств: \bar{A} и \bar{B} . Множество \bar{A} (рис. 14) обозначим горизонтальной штриховкой, а множество \bar{B} — вертикальной. Незаштрихованной осталась область $A \cap B$. Все, что заштриховано, относится к дополнению множества $A \cap B$, то есть $\overline{A \cap B}$. Таким образом, заштрихованные области на рис. 13 и 14 совпадают, что и доказывает справедливость утверждения (16).

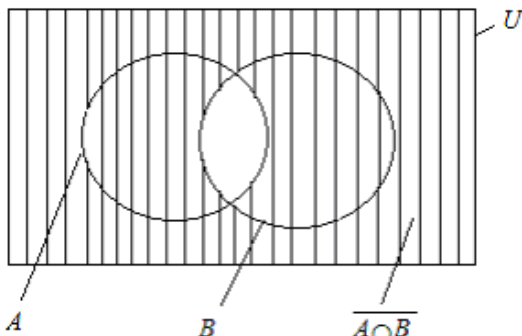


Рис. 13

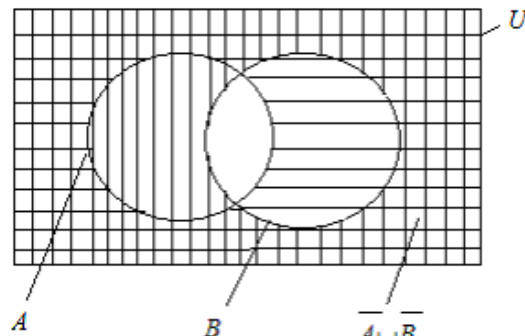


Рис. 14

Правила де Моргана применимы не только к двум, но и к большему числу множеств. Например:

$$\overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}; \quad \overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

$$\overline{A \cup B \cup C \cup D} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D};$$

$$\overline{A \cap B \cap C \cap D} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \cup \bar{D} \text{ и т.д.}$$

Упражнения

1. Даны множества: $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 3, 4\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Найдите элементы множеств:

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \cup B}; & \overline{A \cap B}; & \overline{\overline{A \cap B}}; \\ \overline{\overline{A \cup B}}; & \overline{\overline{A \cap B}}; & \overline{\overline{\overline{A \cup B}}}. \end{array}$$

2. Упростите выражения, если $A \subset B$:

$$\begin{array}{ccc} \overline{A \cup B}; & \overline{A \cap B}; & \overline{\overline{A \cup B}}; \\ \overline{\overline{A \cup B}}; & \overline{\overline{A \cap B}}; & \overline{\overline{\overline{A \cup B}}}. \end{array}$$

3. Вместо точек поставьте знак = или \neq :

$$\begin{array}{ll} A \cup B \dots \overline{A \cup B}; & \overline{A \cup \overline{I}} \dots \overline{A}; \\ \overline{\overline{A \cup B}} \dots A \cup B; & \overline{A \cap B \cup \overline{A}} \dots \overline{A \cap B}; \\ A \cup \overline{B \cap C} \dots A \cup \overline{B} \cup \overline{C}; & \overline{A \cap \emptyset} \cup \overline{B \cap I} \dots \overline{I}. \end{array}$$

4. Упростите выражения, если $A \subset B$, $B = C$.

$$\begin{array}{ll} \overline{\overline{A \cup B \cup C}}; & \overline{A \cup A \cap B \cup A \cap C}; \\ \overline{A \cup B \cap C}; & \overline{A \cup \overline{B \cap C}}. \end{array}$$

п.1.7. Разность множеств

Разностью множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих множеству A , но не входящих в множество B . Обозначать разность множеств будем знаком минус (другими авторами используется также наклонная черта \setminus):

$$A - B = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap \overline{B}.$$

Аналогично записывается разность $B - A$:

$$B - A = \{ x / x \in B \wedge x \notin A \} = \overline{A} \cap B.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{3, 4, 5\}$, тогда $A - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{4, 5\}$.

На рис. 15 приведена диаграмма Венна, где штриховкой обозначена разность $A - B$.

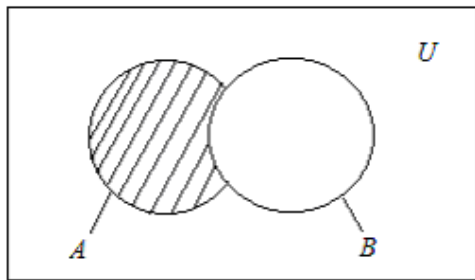


Рис.15

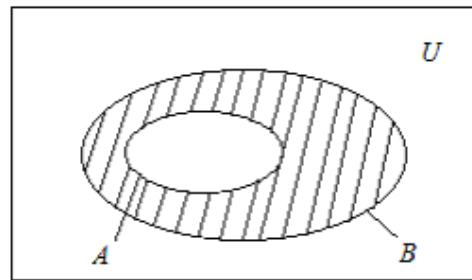


Рис.16

Если $A \subset B$ или $A \subseteq B$, то $A - B = \emptyset$. Пусть $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Чтобы найти множество $A - B$, из множества A необходимо удалить все элементы, принадлежащие множеству B . В результате получится пустое множество.

Если $A \subset B$ то $B - A = \overline{A}^B$ то есть при $A \subset B$ разность $B - A$ совпадает с дополнением множества A до множества B . На рис. 16 множество $B - A$ обозначено штриховкой.

Если $A = B$, то очевидно, что $A - B = B - A = \emptyset$.

Если $B=U$, то $U-A=\bar{A}$, т. е. разность универсального множества и множества A есть дополнение множества A до универсального.

В тех случаях, когда разность множеств применяется к трем и более множествам, необходимо использовать скобки, поскольку

$$(A-B)-C \neq A-(B-C),$$

т. е. разность множеств неассоциативна. Если же условиться выполнять эту операцию в строгом порядке слева направо, то скобки можно не ставить:

$$A-B-C = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}; \quad A-B-C-D = A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}.$$

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A - B$, если $A = \{3, 4, 6, 7\}$; $B = \{6, 7, 8\}$.

2. Найдите элементы множества $A \cup B$, если

$$A - B = \{2, 4, 5\}; \quad B = \{6, 7, 8\}.$$

3. Даны множества: $A = \{0, 1, 2, 3, 5, 6\}$; $B = \{3, 4, 6, 7, 9\}$;

$$C = \{0, 5, 6, 7, 8\}; \quad I = \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Найдите элементы множеств:

$$A - (B \cup C); \quad A - (B \cap C);$$

$$B - (A \cap \bar{C}); \quad C - (\bar{A} \cap B);$$

$$A - (B - C); \quad (A \cup B) - (A \cap B).$$

4. Дано: $A = \{0, 1, 2, 5\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{2, 5, 7\}$; $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Найдите элементы множеств:

$$(A \cup B \cup C) - B; \quad (A \cup B) - (A \setminus B);$$

$$(A \cup B \cup \bar{C}) - (B \cup C); \quad (\bar{A} \cup B) - (A \cap \bar{B});$$

$$A - (B \cap \bar{B}); \quad I - (A \cup B \cup C).$$

5. Укажите пустые множества, если известно, что $A \subset B \subset C$, $A \neq \emptyset$, $\bar{C} \neq \emptyset$:

а) $(B - C) \cap (A \cup B)$; в) $C \cap (B - \bar{A})$;

б) $C \cup (\bar{A} - \bar{B})$; г) $A \cup (B - C)$.

п.1.8. Симметрическая разность множеств

Симметрическая разность множеств A и B (ее иногда называют также дизъюнктивной разностью) — это множество вида

$$A \oplus B = \{x/x \in A \wedge x \notin B, \text{ или } x \notin A \wedge x \in B\},$$

где знак \oplus обозначает операцию симметрической разности (используют и другие знаки, например $A \Delta B$).

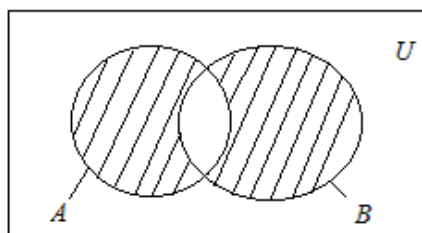


Рис. 17

Симметрическую разность можно выразить через дополнение, пересечение и объединение:

$$A \oplus B = A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B. \quad (17)$$

На рис. 17 приведена диаграмма Венна, иллюстрирующая симметрическую разность множеств. Из диаграммы видно, что симметрическая разность может быть выражена через разность множеств и операцию объединения:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A).$$

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, то

$$A \oplus B = \{1, 2, 5, 6, 7\}.$$

Симметрическая разность множеств обладает свойствами (их нетрудно доказать с помощью диаграмм Венна):

а) коммутативности: $A \oplus B = B \oplus A$;

б) ассоциативности:

$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) = A \oplus B \oplus C,$$

т. е. если знаком симметрической разности соединяются более двух символов, то скобки можно не ставить;

в) дистрибутивности пересечения относительно симметрической разности:

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C).$$

Если условиться считать, что первой всегда выполняется операция пересечения, а затем — симметрической разности, то скобки можно не ставить:

$$A \cap (B \oplus C) = A \cap B \oplus A \cap C.$$

Благодаря свойству дистрибутивности можно раскрывать скобки в сложных выражениях и записывать формулы в виде симметрической разности пересечений.

Например:

$$(A \oplus B \oplus C) \cap (D \oplus E) = A \cap D \oplus A \cap E \oplus B \cap D \oplus B \cap E \oplus C \cap D \oplus C \cap E.$$

Операция симметрической разности множеств не является дистрибутивной относительно пересечения:

$$A \oplus B \cap C \neq (A \oplus B) \cap (A \oplus C). \quad (18)$$

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, выразим обе части неравенства (18) через операции объединения, пересечения и дополнения и результаты представим в виде диаграмм Венна.

Левую часть преобразуем в соответствии с формулой (17):

$$\begin{aligned} A \oplus B \cap C &= A \cap \overline{B \cap C} \cup \overline{A} \cap B \cap C = A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \cup \bar{A} \cap B \cap C = \\ &= A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cap C. \end{aligned}$$

На рис. 18 приведена диаграмма Венна, на которой штриховкой обозначено полученное множество.

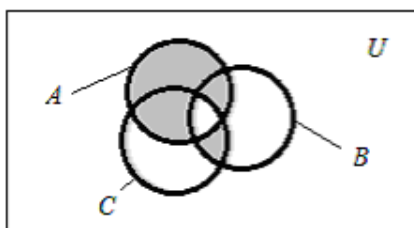


Рис. 18

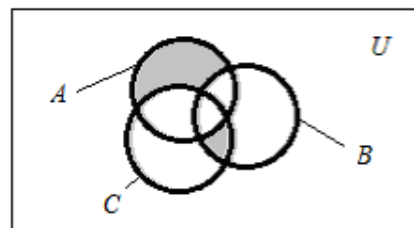


Рис. 19

Аналогично преобразуем правую часть выражения (18):

$$\begin{aligned}(A \oplus B) \cap (A \oplus C) &= (A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B) \cap (A \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap C) = \\ &= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{A} \cap B \cap C.\end{aligned}$$

На рис. 19 приведена диаграмма Венна, на которой заштрихована область, соответствующая полученному выражению. Из диаграмм (рис. 18 и 19) видно, что отмеченные на них множества не совпадают, следовательно, неравенство (18) справедливо.

Рассмотрим еще несколько свойств симметрической разности множеств:

- а) $A \oplus \emptyset = \emptyset \oplus A = A$;
- б) если $A = B$, то $A \oplus A = \emptyset$, что следует из (17);
- в) если $A \subset B$, то $A \oplus B = B - A = \bar{A} \cap B$;
- г) если $A \supset B$, то $A \oplus B = A - B = A \cap \bar{B}$;
- д) если $A \cap B = \emptyset$, то $A \oplus B = A \cup B$;
- е) $A \oplus B \oplus (A \cap B) = A \cup B$.

Упражнения

1. Найдите элементы множества $A \oplus B$, если:

$$A = \{a, b, c\}; B = \{a, c, d, e\}.$$

2. Известно что $A - B = \{1; 2\}$; $B - A = \{3; 4\}$; $A \cap B = \{5; 6\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$. Найдите элементы множества A .

3. Даны множества $A \cap \bar{B} = \{a, b, c\}$; $B = \{d, e, f\}$; $A \cap B = \{d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$.

4. Найдите элементы множества $\overline{A \oplus B}$, если $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A - B = \{1, 6\}$, $B - A = \{3\}$.

5. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A \cap B = \{c, d\}$. Найдите элементы множества $A \oplus B$.

6. Упростите выражения:

$$A \oplus A \oplus A \oplus A; \quad I \oplus B \oplus B \oplus B;$$

$$A \oplus \bar{A} \cap \bar{B} \oplus \bar{A} \cap B; \quad A \oplus \bar{A} \oplus I.$$

7. Даны множества: $A \oplus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $\overline{A \cup B} = \{8\}$; $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$.

8. Укажите верные выражения.

- а) $A \oplus B \oplus C = (A \oplus B) \oplus C$;
- б) $A \oplus B \cap C = A \oplus B \cap C \oplus \emptyset$;
- в) $A \oplus B \oplus I = A \oplus B$;
- г) $A \oplus I \oplus I = A \oplus I$;
- д) $A \oplus \emptyset \oplus \emptyset = A \oplus \emptyset$;
- е) $A \oplus \bar{A} = A \cup \bar{A}$.

п.1.9. Закон поглощения

Закон *поглощения* имеет две формы записи (дизъюнктивная и конъюнктивная соответственно):

$$A \cup A \cap B = A; \quad (19)$$

$$A \cap (A \cup B) = A. \quad (20)$$

На рис. 20 приведена диаграмма Венна для дизъюнктивной формы $A \cup A \cap B = A$. Вертикальной штриховкой на диаграмме обозначена область A , горизонтальной — область $A \cap B$. Штриховка не выходит за пределы области A , следовательно, все элементы множества $A \cup A \cap B$ входят в множество A , что и доказывает справедливость равенства (19).

Из рис. 20 видно, что множество A не изменяется от добавления к нему элементов множества $A \cap B$, т. е. множество A как бы поглощает все элементы множества $A \cap B$, откуда и происходит название закона.

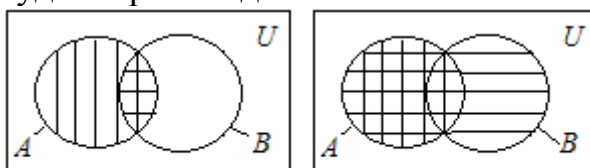


Рис. 20

Рис. 21

На рис. 21 приведена диаграмма Венна для конъюнктивной формы. Вертикальной штриховкой обозначено множество A , горизонтальной — множество $A \cup B$. Двойная штриховка обозначает множество $A \cap (A \cup B)$, что соответствует левой части выражения (20). Она занимает всю область множества A и не выходит за ее пределы. Следовательно, множества $A \cap (A \cup B)$ и A состоят из одних и тех же элементов, то есть равны, откуда следует справедливость формулы (20).

Законы поглощения дают возможность упрощать аналитические выражения, описывающие множества. Проиллюстрируем это на примере. Пусть некоторое множество P представлено выражением вида

$$P = A \cap B \cup A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap C \cap D.$$

Пересечение $A \cap B \cap C$ встречается в этом выражении два раза. Обозначим его $Q = A \cap B \cap C$. Заданное множество P примет вид: $P = A \cap B \cup Q \cup Q \cap D$.

Согласно выражению (19) имеем: $Q \cup Q \cap D = Q$, следовательно,

$$P = A \cap B \cup Q = A \cap B \cup A \cap B \cap C.$$

Снова введем обозначение: $A \cap B = R$, тогда

$$P = R \cup R \cap C = R.$$

В результате получаем окончательно: $P = A \cap B$.

Рассмотрим еще один пример. Упростим выражение

$$S = P \cap \bar{Q} \cap (P \cap \bar{Q} \cup R).$$

Введем обозначение: $P \cap \bar{Q} = V$, тогда множество S представится в виде

$$S = V \cap (V \cup R).$$

Согласно формуле (20) получаем:

$$S = V \cap (V \cup R) = V = P \cap \bar{Q}.$$

Упражнения

1. Упростите выражения:

$$\bar{A} \cap B \cap C \cup \bar{A} \cap B;$$

$$A \cap \bar{B} \cap C \cup \bar{B};$$

$$\begin{array}{ll} A \cap B \cap \bar{D} \cup \bar{D}; & A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap C; \\ \bar{A} \cap B \cap \bar{C} \cup \bar{A}; & A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D} \cup \bar{C}. \end{array}$$

2. Найдите элементы множеств:

$$\begin{array}{ll} A \cap B \cap C \cup A \cap C; & B \cap \bar{C} \cup \bar{C} \cup A \cap \bar{C}; \\ A \cap C \cup A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap D, & \end{array}$$

если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$;
 $D = \{2, 5, 6, 7, 8\}$; $I = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

3. Упростите выражения:

$$\begin{array}{l} A \cap \bar{B} \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap D; \\ B \cap (\bar{A} \cap B \cup \bar{B} \cap B); \\ (\bar{A} \cup B) \cap B \cap (B \cup \bar{C}). \end{array}$$

4. Найдите элементы множества $A \cap B \cap \bar{C} \cup A \cap B \cup B$,
 где $A = \{1, 3, 5, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C = \{1, 2\}$.

5. Найдите элементы множества:

$$A \cap B \cap C \cup A \cap C \cap \bar{D} \cup A \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cap D,$$

если $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{2, 3, 6\}$; $C = \{2, 4, 6, 7\}$; $D = \{4, 5, 7\}$.

п.1.10. Закон склеивания

Закон (операция) *склеивания*, как и закон поглощения, имеет дизъюнктивную и конъюнктивную формы:

$$A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A; \quad (21)$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A \quad (22)$$

Рассмотрим дизъюнктивную форму (21). На рис. 22, а множество $A \cap B$ обозначено вертикальной штриховкой, а множество $A \cap \bar{B}$ — горизонтальной. Область A оказалась полностью заштрихованной, при этом вне области A никакой штриховки нет. Следовательно, все элементы множества $A \cap B \cup A \cap \bar{B}$ образуют и множество A , откуда следует справедливость равенства (21).

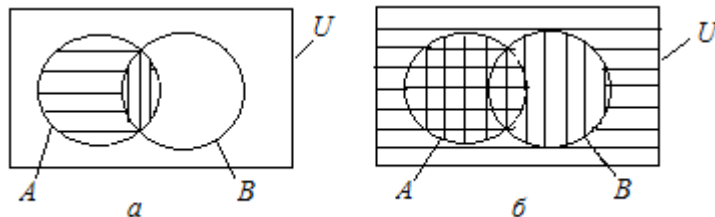


Рис. 22

Перейдем к выражению (22). Оно представляет собой пересечение двух множеств: $A \cup B$ и $A \cup \bar{B}$.

Обозначим множество $A \cup B$ вертикальной штриховкой на диаграмме Венна (рис. 26, б). Горизонтальной штриховкой на той же диаграмме обозначим множество $A \cup \bar{B}$. Двойной штриховкой заполнена область, соответствующая пересечению множеств $A \cup B$ и $A \cup \bar{B}$. Из диаграммы видно, что двойной штриховкой обозначена только область A , следовательно, A и $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$ — это множества, состоящие из одних и тех же элементов, что и доказывает справедливость выражение (22).

Истинность выражений (21) и (22) можно доказать и аналитически. Вынесем за скобки букву A в формуле (21), тогда в скобках получим объединение множества B и его дополнения. Объединение этих множеств есть универсальное множество. Пересечение универсального множества и множества A есть множество A :

$$A \cap B \cup A \cap \bar{B} = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap U = A.$$

Аналогичным образом докажем справедливость выражения (22), раскрыв сначала скобки:

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) &= A \cap A \cup A \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{B} \cup B \cap \bar{B} = \\ &= A \cup A \cap \bar{B} \cup A \cap B = A \cup A \cap (\bar{B} \cup B) = A \cup A \cap U = \\ &= A \cup A = A. \end{aligned}$$

Законы склеивания используются при упрощении аналитических выражений, описывающих множества.

Например:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C \cup A \cap \bar{B} \cap C \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C &= \\ &= A \cap C \cap (B \cup \bar{B}) \cup C \cap (B \cup \bar{B}) = \\ &= A \cap C \cap U \cup C \cap U = A \cap C \cup C = \\ &= C \cap (A \cup U) = C \cap U = C. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Упростите выражения:

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \bar{C}; \\ A \cap \bar{B} \cap C \cup A \cap B \cap C; \\ A \cup \bar{A} \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B. \end{aligned}$$

2. Найдите элементы множеств:

$$\begin{aligned} (A \cap B \cup C) \cap (A \cap B \cup \bar{C}); \\ (A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup \bar{C}); \\ (A \cup \bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup \bar{B} \cup C) \cap B, \end{aligned}$$

если $A = \{1, 2, 4, 5\}$; $B = \{1, 3, 6, 7\}$; $C = \{2, 3, 6, 7\}$.

3. Расставьте вместо троеточий знаки $=$ или \neq .

$$\begin{aligned} A \cup B \cap C \cup \bar{B} \cap C \dots A \cup C; \\ A \cap B \cup A \cap \bar{B} \dots A \cap \bar{B} \cup A \cap B; \\ \bar{B} \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap C \cup B \dots B. \end{aligned}$$

4. Упростите, если $A \subset B \subset C$:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup A \cap C \cup \bar{A} \cap C; \\ B \cap C \cup B \cap \bar{C} \cup A \cup \bar{C}; \\ (B \cap \bar{C} \cup \bar{B} \cap \bar{C}) \cap A. \end{aligned}$$

Представим основные тождества алгебры множеств в виде таблицы 1.

Таблица 1

1. Коммутативность объединения $A \cup B = B \cup A$	1. Коммутативность пересечения $A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность объединения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$	2. Ассоциативность пересечения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
3. Дистрибутивность объединения относительно пересечения $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	3. Дистрибутивность пересечения относительно объединения $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cup \emptyset = A$ $A \cup \bar{A} = U$ $A \cup U = U$	4. Законы действия с пустым и универсальным множествами $A \cap U = A$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
5. Закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$	5. Закон де Моргана $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
6. Закон поглощения $A \cup (A \cap B) = A$	6. Закон поглощения $A \cap (A \cup B) = A$
7. Закон склеивания $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$	7. Закон склеивания $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
8. Закон двойного дополнения $\overline{\bar{A}} = A$	

ГЛАВА 2. БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

п.2.1. Декартово произведение множеств

Декарт Рене — французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики — жил в XVII веке (1596—1659). Название операции «декартово произведение» возникло в связи с тем, что в теории множеств применяется метод координат, разработанный Р. Декартом.

Рассмотрим два непересекающихся множества $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Выберем какой-либо элемент из множества A и припишем к нему справа некоторый элемент множества B . Получим упорядоченную пару. Элементы, образующие пару, будем записывать в круглых скобках, отделяя

один элемент от другого запятой: (a_i, b_j) , где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $j = 1, 2, 3, \dots, m$. (Некоторые авторы упорядоченную пару обозначают иначе: $\langle a_i, b_j \rangle$; x, y). Множество всех упорядоченных пар (a_i, b_j) обычно называют декартовым произведением множеств A и B (иногда — прямым произведением). Для обозначения этой операции используется знак арифметического умножения: $A \times B$.

Формально декартово произведение множеств A и B определяется следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}.$$

Читается эта запись так: декартово произведение множеств A и B — это множество пар (x, y) , где x — элемент множества A , y — элемент множества B .

Точно так же определяется декартово произведение множеств $B \times A$:

$$B \times A = \{(y, x) / y \in B \wedge x \in A\}.$$

Рассмотрим пример. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{a, b, c\}$.

Тогда

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), \\ &\quad (3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c)\}; \\ B \times A &= \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (a, 2), (b, 2), (c, 2), \\ &\quad (a, 3), (b, 3), (c, 3), (a, 4), (b, 4), (c, 4)\}. \end{aligned}$$

Из этих двух выражений следует, что $A \times B \neq B \times A$, то есть операция декартова произведения не коммутативна. Кроме того, $(A \times B) \cap (B \times A) = \emptyset$, если $A \cap B = \emptyset$. При этом множество $A \times B$ содержит те же пары, что и множество $B \times A$, но порядок записи элементов в парах другой. Если же $A \cap B \neq \emptyset$, то и $(A \times B) \cap (B \times A) \neq \emptyset$.

Рассмотрим, например, множества $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{c, d\}$. Пересечение этих множеств непусто:

$$A \cap B = \{c\}.$$

Найдем $A \times B$ и $B \times A$:

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}; \\ B \times A &= \{(c, a), (d, a), (c, b), (d, b), (c, c), (d, c)\}. \end{aligned}$$

По этим двум выражениям видно, что множество $(A \times B) \cap (B \times A) = \{(c, c)\}$, т. е. непусто.

Операция декартова произведения применима не только к двум, но и к большему числу множеств:

$$M = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Так как в общем случае операция декартова произведения не коммутативна, то всякая перестановка множеств в записи декартова произведения дает новое множество упорядоченных пар. Всего возможно $n!$ таких перестановок, следовательно, существует $n!$ множеств.

Операция декартова произведения множеств ассоциативна:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C,$$

благодаря чему при записи декартова произведения нескольких множеств скобки можно не использовать.

Для декартова произведения множеств справедливы следующие законы дистрибутивности:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C);$$

$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C),$$

что позволяет раскрывать скобки в выражениях, содержащих операцию декартова произведения и операции объединения либо разности множеств.

Упражнения

1. Найдите элементы множества $(A \times B) \cap (B \times A)$, если $A = \{a, b\}$; $B = \{b, c\}$. При наборе элементов пар используйте запятую. Например: a, c . Скобки не вводить.

2. Найдите $|A \times B|$ и $|(A \times B) \cap (B \times A)|$, если $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c\}$.

3. Найдите элементы множества A и множества B , если $A \times B = \{(b, m), (c, m), (e, m), (b, n), (c, n), (e, n)\}$.

4. Найдите $|(A \times B) \cup (B \times C)|$, если $A = \{2, 3, 4\}$; $B = \{a, b, c, d, e\}$; $C = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

5. Декартово произведение множеств A и B содержит 12 элементов. Известно, что $A = \{a, b, c\}$; $A \cap B = \emptyset$. Найдите число собственных подмножеств множества B .

6. Даны множества $A = \{a, b, c\}$; $B = \{b, c, d, e\}$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A \cap B$, $Q = \bar{A} \cap B$.

7. Даны множества: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{b, c, e, f\}$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A \oplus B$; $Q = A \cap B$. Найдите $|P \times Q|$, если $P = A$; $Q = \bar{A} \cap B$.

8. Дано: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Укажите номера упорядоченных пар, являющихся элементами множества $A \times B$:

1) $a, 1$; 2) $3, c$; 3) b, c ; 4) $c, 5$; 5) $2, 3$; 6) $4, a$; 7) $b, 4$.

9. Даны множества A, B, C . Известно, что $A \subset B \subset C$; $A \neq \emptyset$; $|A \cup B \cup C| = 3$. Найдите: $|B \times (\bar{B} \cap C)|$; $|A|$; $|B|$; $|C|$.

10. Даны множества I, A, B . Известно, что $I = \{0, 1, \dots, 7\}$; $\overline{A \cup B} = \{2, 3\}$; $A \oplus B = \{0, 1, 4\}$. Найдите элементы множества $A \cap B$. Определите $|\overline{A \oplus B} \times (A \cap B)|$.

п.2.2. Понятие бинарного отношения

Термин «отношение» известен из школьного курса, где рассматривались отношения равенства и неравенства между числами, равенства и подобия фигур и т.д. Каждый конкретный тип отношений обычно определяется тем или иным способом.

Понятие «отношение» между элементами множества можно четко определить, опираясь на основное (неопределяемое) понятие «множество» и единственное основное отношение принадлежности ($x \in M$ – x есть элемент множества M).

Пусть дано декартово произведение двух непустых множеств A и B , при этом множества могут быть любыми: непересекающимися, равными, входящими одно в другое и т. д. Элементами множества $A \times B$ являются упорядоченные пары вида (a_i, b_j) , где $a_i \in A$; $b_j \in B$; $i = 1, 2, \dots, |A|$; $j = 1, 2, 3, \dots, |B|$. Всякое подмножество декартова произведения $A \times B$ называется бинарным отношением, определенным на паре множеств A и B (по латыни «бис» обозначает «дважды»). Термин «бинарное отношение» не является единственным, например, в используется название «диадическое отношение», в — «двухместное отношение». В общем случае по аналогии с бинарными можно рассматривать и n -арные отношения как упорядоченные последовательности n элементов, взятых по одному из n множеств.

Для обозначения бинарного отношения применяют знак R . Поскольку R — это подмножество множества $A \times B$, то можно записать $R \subseteq A \times B$. Если же требуется указать, что $(a, b) \in R$, т. е. между элементами $a \in A$ и $b \in B$ существует отношение R , то пишут $a R b$.

Пусть, например,

$$A = \{1, 2, 3\}; B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \quad (1)$$

Множество $A \times B$ содержит 18 упорядоченных пар. Выделим на этом множестве отношение «больше»: $a > b$, где $a \in A$ и $b \in B$, тогда $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, т. е. из 18 пар множества $A \times B$ три упорядоченные пары принадлежат отношению $a R b$, где R обозначает слово «больше». Если вместо букв подставить их значения, то получим верные утверждения: $2 > 1$; $3 > 1$; $3 > 2$.

Очевидно, что в этом случае справедливо равенство:

$$a R b = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}.$$

Рассмотрим еще один пример. Пусть R обозначает «меньше простого числа» на множествах (1). Тогда

$$a R b = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5)\}.$$

Если вместо всех трех букв a, R, b подставить их значения, то получим шесть верных утверждений:

1 меньше простого числа 2;

1 меньше простого числа 3 и т. д.

При подстановке других значений a и b (но при том же R) будем получать ложные утверждения.

Задавать бинарные отношения можно разными способами. Один из них мы уже рассмотрели. Это использование правила, согласно которому указываются все элементы, входящие в данное отношение. Вместо правила можно привести список элементов заданного отношения путем непосредственного их перечисления.

Существует также и табличный способ задания отношений, в котором составляют прямоугольную систему координат, где по одной оси откладываются элементы одного множества, по второй — другого. Пересечения координат образуют точки, обозначающие элементы декартова произведения.

На рис. 1 изображена координатная сетка для множеств (1).

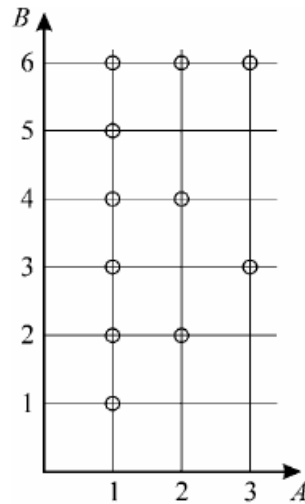


Рис. 1

Точкам пересечения трех вертикальных линий с шестью горизонтальными соответствуют элементы множества $A \times B$. Кружочками на сетке отмечены элементы отношения $a R b$, где $a \in A$ и $b \in B$, R обозначает отношение «делит».

Бинарные отношения задаются двумерными системами координат. А также все элементы декартова произведения трех множеств аналогично могут быть представлены в трехмерной системе координат (тернарное отношение), четырех множеств — в четырехмерной системе и т. д.

Упражнения

1. Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения:
 $a - b = 2$, где $a \in A$; $b \in B$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$:

1) 3, 1; 2) 6, 4; 3) 4, 6; 4) 5, 3; 5) 4, 2; 6) 7, 5; 7) 8, 6.

2. Укажите номера всех пар, являющихся элементами отношения:

$$2a - b = 0, \text{ где } a \in A, b \in B,$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}:$$

1) (4,2); 2) (1,2); 3) (4,8); 4) (3,6); 5) (6,12); 6) (2,4).

3. В множестве $A = \{3, 6, 9, 12\}$ задано отношение R : «Число x делится на число y », причем $x \in A$ и $y \in A$. Выпишите все пары чисел из множества A , находящихся в отношении R . Обозначьте множество всех таких пар буквой Γ .

4. Для каждого из следующих отношений укажите множество, пары элементов которого оно может связывать:

а) « x равно y »;

б) « x является одногруппником y »;

в) « x знаком с y »;

г) « x выше, чем y ».

п.2.3. Симметрия отношений

Пусть дано множество M . Его квадратом является множество M . $M=M^2$. Выделим в этом квадрате подмножество R , представляющее собой некоторое отношение. Всякое бинарное отношение R в множестве M может быть либо симметричным, либо асимметричным, либо несимметричным.

Пусть между элементами $a \in M$ и $b \in M$ имеется отношение R . Переставим местами a и b . Если отношение R сохранится, то такое отношение называется симметричным. Примером может служить отношение «быть братом»: если Костя брат Толи, то и Толя брат Кости.

Отношение называется асимметричным, если оно имеет место между элементами a и b , но отсутствует между элементами b и a . Пример асимметричного отношения: «находится в...». Если «книга находится в шкафу» — верное утверждение, то «шкаф находится в книге» — утверждение ложное.

Отношение называется несимметричным, если оно не является симметричным и не является асимметричным, то есть если имеет место отношение $a R b$, то отношение $b R a$ может быть, но может и не быть. Пример — отношение « a увидел b »: если Саша увидел Игоря, то возможно, что и Игорь увидел Сашу, но мог и не увидеть.

Кроме симметричных, асимметричных и несимметричных отношений в математической литературе рассматривается еще один вид симметрии — антисимметричность. Если отношения $a R b$ и $b R a$ имеют место лишь при $a = b$, то отношение R называют антисимметричным. Примером может служить отношение «меньше или равно».

Упражнения

1. Укажите симметричные отношения:

- 1) Таня — сестра Пети;
- 2) прямая A перпендикулярна прямой B ;
- 3) тетрадь находится в портфеле;
- 4) Зина — сестра Оли;
- 5) $25 + 10 = 15 + 20$;
- 6) прямая A параллельна прямой B .

2. Укажите асимметричные отношения в упражнении 1.

3. Укажите антисимметричные отношения:

- 1) я встретился со своим другом;
- 2) Иван пришел в гости к своему другу Петру;
- 3) дерево свалилось на дорогу;
- 4) Иванов проиграл в шахматы Петрову;
- 5) Андрей не проиграл в шашки Сергею;
- 6) Останкинская башня выше Эйфелевой башни;
- 7) Сидоров хорошо относится к Петрову;
- 8) масса плиты A не превышает массы плиты B .

4. Укажите несимметричные отношения в упражнении 3.

5. Укажите симметричные отношения в упражнении 3.

6. Укажите несимметричные отношения:

- 1) Иван узнал Петра;
- 2) лесоруб спилил дерево;
- 3) столяр изготовил оконную раму;
- 4) Иванов поздоровался с Орловым;
- 5) олень увидел в зарослях тигра;
- 6) число a не больше числа b , где $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$;
- 7) число 325 содержит столько же цифр, что и число 891.

7. Укажите антисимметричные отношения в упражнении 6.

8. В упражнении 6 укажите асимметричные отношения.

9. В упражнении 6 укажите симметричные отношения.

10. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

- 1) существуют отношения, одновременно являющиеся асимметричными и несимметричными?
- 2) существуют отношения, не являющиеся симметричными и не являющиеся асимметричными?
- 3) если отношение асимметрично, то оно не является несимметричным?
- 4) если отношение не является симметричным, то оно либо асимметрично, либо несимметрично?
- 5) если отношение $a R b$ симметрично, то оно останется симметричным при перестановке элементов a и b ?
- 6) если отношение несимметрично, то оно не может быть асимметричным?
- 7) если отношение несимметрично, то оно одновременно является асимметричным?

п.2.4. Транзитивность отношений

Любое бинарное отношение R в множестве M является либо транзитивным, либо интранзитивным, либо нетранзитивным.

Отношение R называется транзитивным, если из $a R b$ и $b R c$ следует $a R c$. Например, отношение «больше» на множестве положительных чисел является транзитивным, поскольку если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Отношение называется интранзитивным, если из $a R b$ и $b R c$ следует, что утверждение $a R c$ является ложным. Примером может служить отношение «больше на 4». Если « a на 4 больше b » и « b на 4 больше c », то утверждение « a на 4 больше c » ложно.

Отношение называется нетранзитивным, если оно не является транзитивным и не является интранзитивным, то есть если имеют место отношения $a R b$ и $b R c$, то утверждение $a R c$ может быть и истинным и ложным.

Например, пусть « A знаком с B » и « B знаком с C », тогда относительно истинности утверждения « A знаком с C » ничего определенного сказать нельзя.

Упражнения

1. Укажите транзитивные отношения:

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1) равно; | 5) меньше на 5; |
| 2) больше или равно; | 6) быть южнее; |
| 3) не равно; | 7) быть врагом; |
| 4) быть другом; | 8) быть логарифмом. |

2. Укажите интранзитивные отношения в упражнении 1.

3. Укажите нетранзитивные отношения в упражнении 1.

4. Укажите интранзитивные отношения:

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| 1) квадратный корень; | 5) равно половине; |
| 2) старше, чем; | 6) является предком; |
| 3) больше в три раза; | 7) является матерью; |
| 4) дружит; | 8) здоровается. |

5. Укажите нетранзитивные отношения в упражнении 4.

6. Укажите транзитивные отношения в упражнении 4.

7. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

- 1) может ли отношение быть интранзитивным и нетранзитивным одновременно?
- 2) верно ли, что если отношение является нетранзитивным, то оно может быть транзитивным?
- 3) существуют ли отношения, которые не являются транзитивными, не являются интранзитивными и не являются нетранзитивными одновременно?
- 4) может ли отношение быть одновременно транзитивным и симметричным?
- 5) существуют ли отношения, не являющиеся транзитивными и не являющиеся симметричными одновременно?
- 6) верно ли, что если отношение нетранзитивно, то оно всегда несимметрично?
- 7) может ли асимметричное отношение быть интранзитивным?

п.2.5. Рефлексивность отношений

Отношение R в множестве M называется рефлексивным, если для всякого $a \in M$ утверждение $a R a$ является истинным. Например, отношение параллельности прямых является рефлексивным, так как всякая прямая параллельна самой себе.

Отношение называется антирефлексивным, если ни один элемент $a \in M$ не находится в отношении R с самим собой. (В такие отношения называются иррефлексивными.) Например, отношение перпендикулярности прямых является антирефлексивным, поскольку всякая прямая не является перпендикулярной самой себе.

Существуют отношения, не являющиеся ни рефлексивными, ни антирефлексивными. Пусть, например, M — множество точек на плоскости. Рассмотрим отношение: «точка a симметрична точке b относительно прямой,

лежащей в той же плоскости». Если точки лежат не на прямой, то утверждения $a R a$ и $b R b$ являются ложными. Но все точки, лежащие на прямой, симметричны сами себе. Следовательно, данное отношение не является рефлексивным и не является антирефлексивным.

Упражнения

1. Укажите рефлексивные отношения:

- 1) Таня — сестра Зины;
- 2) $a \leq b$, где a и b — натуральные числа;
- 3) $a \neq b$, где a и b — натуральные числа;
- 4) треугольник a подобен треугольнику b ;
- 5) площадь круга a больше площади круга b ;
- 6) Иван написал письмо Петру;
- 7) выражения a и b имеют одно и то же значение в множестве числовых выражений.

2. Укажите транзитивные отношения в упражнении 1.

3. Укажите симметричные отношения в упражнении 1.

4. Укажите рефлексивные отношения:

- 1) точка a удалена от точки b на 4 см;
- 2) по количеству жителей город A равен городу B ;
- 3) дробь a равна дроби b в множестве дробей;
- 4) число a делится на b без остатка в множестве целых положительных чисел;
- 5) площадь фигуры a равна площади фигуры b в множестве геометрических фигур на плоскости;
- 6) числа a и b при делении на 5 дают одинаковые остатки;
- 7) $a - b \neq 0$, где $a, b \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$; $a - b$ — положительное число.

5. Укажите симметричные отношения в упражнении 4.

6. Укажите транзитивные отношения в упражнении 4.

7. Укажите рефлексивные отношения:

- 1) a похож на b (в множестве людей);
- 2) в книге a в два раза больше страниц, чем в книге b ;
- 3) фраза a имеет тот же смысл, что и фраза b ;
- 4) Петров и Сидоров имеют одинаковый рост;
- 5) дорога a имеет ту же длину, что и дорога b ;
- 6) Смирнов и Васильев живут на третьем этаже;
- 7) поезд a идет быстрее, чем поезд b .

8. Укажите отношения, являющиеся одновременно транзитивными и рефлексивными:

- 1) число a равно числу b ;
- 2) Иванов и Петров служат в одном полку;
- 3) a и b равновеликие треугольники;
- 4) число a не больше числа b ;
- 5) тетрадь a дороже тетради b ;
- 6) Афанасьев слушает Васильева;

7) Иванов дал книгу Петрову.

п.2.6. Отношения эквивалентности

Если отношение R в множестве M обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, то оно называется отношением эквивалентности. Пусть M — множество студентов. Тогда отношение $a R b$, где $a, b \in M$, а R обозначает «быть однокурсником», является отношением эквивалентности, поскольку оно рефлексивно (студент является однокурсником по отношению к себе), симметрично (если a — однокурсник по отношению к b , то и b — однокурсник по отношению к a), транзитивно (если a — однокурсник по отношению к b , b — однокурсник по отношению к c , то a — однокурсник по отношению к c).

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся классы эквивалентности. В рассмотренном примере отношение «быть однокурсником» разбивает все множество студентов на пять непересекающихся классов (при пятилетней системе обучения), где первый класс образуют все студенты первого курса, второй — второго курса и т. д. Множество всех классов эквивалентности образует фактор-множество M / R множества M , где M — исходное множество (в рассмотренном примере M — множество студентов всех курсов). Очевидно, что классы фактор-множества являются непересекающимися.

Упражнения

1. Укажите отношения эквивалентности:

- 1) быть попутчиком в одном вагоне пассажирского поезда;
- 2) $a + b = 100$, где $a, b \in \{1, 2, \dots, 100\}$;
- 3) $a = b$, где $a, b \in \{1, 4, 8, 9\}$;
- 4) прямая a перпендикулярна прямой b ;
- 5) треугольник a подобен треугольнику b ;
- 6) Сидоров живет двумя этажами выше Михайлова;
- 7) a сердит на b .

2. Укажите отношения эквивалентности:

- 1) Иванов задал вопрос Петрову;
- 2) книга a имеет такую же цену, что и книга b ;
- 3) Смирнов попрощался с Федоровым;
- 4) Саша позвал в гости Игоря;
- 5) Павлов и Васильев смотрят один и тот же фильм;
- 6) высота горы a равна высоте горы b ;

3. Укажите отношения эквивалентности:

- 1) солдат Петров идет в ногу с солдатом Ивановым в одном и том же отряде;
- 2) Смирнов позвонил на работу Чичикову;
- 3) Павлов встретил на вокзале своего друга Васильева;

- 4) автомобиль «Москвич» едет по той же дороге, что и автомобиль «Жигули»;
- 5) автомобиль a столкнулся с автомобилем b ;
- 6) Иванов прочитал книгу, написанную Соколовым;
- 7) Юра прилетел в Москву одновременно с Борисом.

6. Укажите номера свойств, которыми обладает отношение сравнимости целых чисел по модулю натурального числа:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) асимметричность; | 5) рефлексивность; |
| 2) несимметричность; | 6) симметричность; |
| 3) транзитивность; | 7) интранзитивность. |
| 4) нетранзитивность; | |

п.2.7. Отношения строгого порядка

Если элементы некоторого множества расположены в определенном порядке, то сначала выбираем первый элемент, затем второй и т. д., т. е., элементы множества упорядочены, если они каким-либо образом пронумерованы. Очевидно, что в этом случае между элементами существует отношение «следовать за»: a следует за b . Отношение следования обладает свойством транзитивности (если a следует за b , а b следует за c , то a следует за c), но является асимметричным (если a следует за b , то b не может следовать за a) и не является рефлексивным (элемент a не может следовать за самим собой).

Если отношение R в множестве M является транзитивным и асимметричным и не является рефлексивным, то оно называется отношением строгого порядка.

Примером может служить отношение « a больше b » на множестве $M = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (3, 2), (4, 2), (4, 3)\}.$$

Упражнения

1. Укажите отношения строгого порядка:

- 1) Иванов выше Сидорова;
- 2) Лена — сестра Наташи;
- 3) отрезок a короче отрезка b ;
- 4) отрезок a длиннее отрезка b на 2 см;
- 5) Васильев знает Петрова;
- 6) Иванов живет этажом выше Соколова;
- 7) лыжник Костюнин бежит непосредственно за Швецовым.

2. Укажите отношения строгого порядка:

- 1) число a непосредственно следует за числом b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$;
- 2) число a на 4 больше числа b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$;
- 3) между числами a и b находится точно одно число ($a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$);
- 4) число a равно числу b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$;
- 5) число a следует за числом b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 10\}$;
- 6) число a больше в два раза числа b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 20\}$;

7) Саша старше Димы.

3. Найдите $|a R b|$, где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, если R — отношение «меньше».

п.2.8. Отношения нестрогого порядка

Если отношение R в множестве M рефлексивно, антисимметрично и транзитивно, то оно называется отношением нестрогого порядка (используются также термины: «отношение частичного порядка», «отношение квази-порядка», «отношение неполного порядка»). Например, отношение «не больше» на множестве натуральных чисел является отношением нестрогого порядка: $a \leq b$, так как оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Это отношение представляет собой объединение двух отношений R_1 и R_2 , где R_1 — асимметричное отношение «меньше»; R_2 — отношение «равно»:

$$R = R_1 \cup R_2 = a R_1 b \cup a R_2 b.$$

Если $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$, то

$$R_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\};$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\};$$

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Упражнения

1. Укажите отношения нестрогого порядка:

- 1) автомобиль a едет быстрее автомобиля b ;
- 2) число a не меньше числа b , где $a, b \in \{1, 2, \dots, 50\}$;
- 3) числа a и b не равны числу 6, где a и b — натуральные числа;
- 4) число a без остатка делится на число b , где $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
- 5) $a > 5$ и $b > 5$, где $a, b \in \{1, 2, \dots, 8\}$;
- 6) Петров и Иванов — друзья;
- 7) угол α не больше угла β .

2. Укажите отношения нестрогого порядка:

- 1) числа a и b не являются двузначными;
- 2) точка a на числовой оси находится левее точки b ;
- 3) самолет a летит не быстрее самолета b ;
- 4) расстояние между городами равно 100 км;
- 5) дом a не выше дома b ;
- 6) отрезок a не короче отрезка b ;
- 7) хорошее лучше плохого.

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Введение

Слово «логика» происходит от греческого «логос», что с одной стороны, означает «слово» или «речь», а с другой то, что выражается в речи, т. е. мышление. Логика изучает лишь те акты мышления, которые фиксированы в языке в виде слов, предложений и их совокупностей. Таким образом, логика имеет непосредственное отношение к языку, речи. С помощью логических средств наш естественный язык уточняется, приобретает четкость и определенность.

Логика как наука сформировалась очень давно – в IV в. до н. э. Ее создал древнегреческий ученый Аристотель. В течение многих веков логика почти совсем не развивалась. Это, конечно, свидетельствует о гениальности Аристотеля, которому удалось создать столь полную научную систему, что, казалось, «не убавить, не прибавить». Однако в силу такой неизменности логика приобрела славу мертвой, застывшей науки и вызывала у многих скептическое к себе отношение.

В XVII веке великий немецкий ученый Лейбниц задумал создать новую логику, которая была бы «искусством исчисления». В этой логике, по мысли Лейбница, каждому понятию соответствовал бы символ, а рассуждения имели бы вид вычислений. Эта идея Лейбница, не встретив понимания современников, не получила распространения и развития.

Только в середине XIX века ирландский математик Дж. Буль частично воплотил в жизнь идею Лейбница. Им была создана алгебра логики, в которой действуют законы, схожие с законами обычной алгебры, но буквами обозначаются не числа, а предложения.

Алгебра логики Буля явилась зародышем новой науки – математической логики. В отличие от нее логику, восходящую к Аристотелю, называют традиционной формальной логикой. В названии «математическая логика» отражены две характерные черты этой науки: во-первых, математическая логика – это логика, использующая язык и методы математики; во-вторых, математическая логика была вызвана к жизни потребностями математики.

Математическая логика сама стала областью математики, поначалу казавшейся в высшей степени абстрактной и бесконечно далекой от практических приложений. П. С. Эренфест указал на возможность применения аппарата логики высказываний в технике. Была обнаружена теснейшая связь математической логики с кибернетикой. Сегодня математическая логика используется в биологии, медицине, лингвистике, педагогике, психологии, экономике, технике, в развитии вычислительной техники.

п.3.1. Высказывание. Элементарные и составные высказывания

Высказывание – это предложение, которое либо истинно, либо ложно. Высказывания могут быть выражены с помощью слов, а также математических, химических и прочих знаков.

Приведем примеры:

- а) Марс дальше от Солнца, чем Венера (истинное высказывание);
- б) $2+6>8$ (ложное высказывание);
- в) все треугольники – равнобедренные (ложное высказывание).

Не всякое предложение является высказыванием. Так к высказываниям не относятся вопросительные и восклицательные предложения («Вы были в театре?», «Пейте томатный сок!» и так далее). Не являются высказываниями и определения («Медианой называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны»). Здесь лишь устанавливается название некоторого объекта. Не являются высказываниями и такие предложения: «Каша – вкусное блюдо», «Математика – интересный предмет»; нет, и не может быть единого мнения о том, истинны эти предложения или ложны.

Предложение, которое содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием при подстановке вместо всех переменных их значений, называют *высказывательной формой или неопределенным высказыванием*.

Таковы, например, предложения:

- а) $2x+5=11$;
- б) $x^2-4x+3=0$;
- в) человек x рыжеволос;
- г) в городе x имеется метро.

Из них можно получить различные высказывания придавая переменной x те или иные значения. Так, в первом приведенном примере равенство $2x+5=11$ при $x=3$ обращается в истинное высказывание, а при $x=1$ – в ложное.

Рассмотрим предложение «Число делится на 7». Это предложение не содержит переменную в явном виде, но тем не менее является высказывательной формой. Оно становится высказыванием, если на место слова «число» подставить целые числа. Это предложение можно записать так: «Число x делится на 7».

Из высказывательных форм можно получить высказывания не только подстановкой вместо переменных их значений, но и с помощью специальных слов: «всякий» (а также его синонимов «любой», «каждый») и «существует» (а также выражений «некоторые», «по меньшей мере один»). Например, высказывание «Всякое число x делится на 7» - ложное; высказывание «Существует число x , которое делится на 7» - истинное.

Выражение «для всякого x » называется *квантором общности* по переменной x (вместо x может быть любая другая переменная). Это выражение кратко записывается так: $\forall x$.

Выражение «существует x такое, что...» называется *квантором существования* по переменной x и обозначается так: $\exists x$.

Высказывание, которое можно разложить на части называется *составным*, а не разложимое высказывание – элементарным.

Например, высказывание «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x » состоит из двух частей: «Функция $y = ax^2 + bx + c$ непрерывна при всех значениях x » и «Функция $y = ax^2 + bx + c$ дифференцируема при всех значениях x ».

Из двух данных высказываний можно образовывать новые высказывания с помощью союзов «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда». С помощью частицы «не» или словосочетания «неверно, что» из ??? одного высказывания можно получить новое.

Союзы «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда» и частицу «не» и словосочетание «неверно, что» называют *логическими связками*.

Образование составного высказывания с помощью логической связки называют *логической операцией*.

Пример: Укажите какие из следующих предложений являются высказываниями и определите, истинны они или ложны:

а) $\frac{1917}{852} = \frac{9}{4}$;

б) «Все треугольники – равнобедренные»;

в) «Вы были в университете?»;

г) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

д) $a \in \{a, b, c\}$.

Решение: Среди приведенных предложений высказываниями являются те, про которые можно сказать, истинны они или ложны. Значит, предложения а), б), д) являются высказываниями, причем а) и д) – истинны, б) – ложно. Предложения в), г) не являются высказываниями. Отметим, что г) – неопределенное высказывание (высказывательная форма).

Упражнения

1. Установите какие из следующих предложений являются высказываниями; высказывательными формами; ни тем, ни другим:

а) $3+2=5$; б) $3<2$; в) $3x<2$; г) $y^2 \geq 0$; д) «Число слов в этом предложении равно семи»; е) «Осень – лучшая пора года»; ж) «Знаете ли вы украинскую ночь?»; з) «В четырехугольнике противоположные стороны равны»; и) «Во всяком четырехугольнике противоположные стороны равны»; к) «В некоторых четырехугольниках противоположные стороны равны»; л) «Существует число x такое, что $x^2 < 0$ »; м) «Для всякого числа x $|x| > 0$ »; и) «В городе N более 100000 жителей»; о) «Существует наибольшее натуральное число».

2. Укажите, какие из высказываний в упражнении 1 истинные и какие ложные.

3. Каждую высказывательную форму из упражнения 1 превратите в истинное высказывание с помощью слова «всякий» или «существует».

4. В данных составных высказываниях выделите составляющие их элементарные высказывания и логические связки: а) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам»; б) «Я буду изучать немецкий или английский»; в) «Если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра»; г) «Треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда все его углы равны»; д) «Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2».

5. Из высказываний «Солнце всходит на востоке» и «Солнце заходит на западе» составьте новые высказывания с помощью всех логических связок.

п. 3.2. Логические операции

Будем обозначать высказывания большими буквами латинского алфавита.

3.2.1. Отрицание высказываний

Логическая операция, соответствующая логической связке «не» («неверно, что»), называется *отрицанием*. Отрицание высказывания A записывается так: \bar{A} .

Примеры:

1. A : «3 равно 2»; \bar{A} : «3 не равно 2».
2. A : «Во всякий треугольник можно вписать окружность»; \bar{A} : «Неверно, что во всякий треугольник можно вписать окружность».

В примере 1 отрицание ложного высказывания является истинным высказыванием, в примере 2 отрицание истинного высказывания является ложным высказыванием.

Таким образом, если некоторое высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот.

Этот вывод можно записать при помощи таблицы, в которой буква «и» означает истинное высказывание, а буква «л» - ложное.

Таблицы подобного вида называют *таблицами истинности*.

A	\bar{A}
$И$	$Л$
$Л$	$И$

Обычно для построения отрицания данного высказывания надо присоединить к сказуемому частицу «не» или, если она уже есть, опустить ее. В математике отрицание высказывания, записанного с помощью тех или иных знаков, часто выражают, перечеркивая соответствующий знак или опуская перечеркивающую линию. Например, A : « $2+3=5$ » и \bar{A} : « $2+3\neq 5$ », или B : « $a \neq b$ » и \bar{B} : « $a|b$ ».

Пусть A – некоторое высказывание. Его отрицание \bar{A} также является высказыванием, и поэтому можно образовать отрицание высказывания \bar{A} , т. е. высказывание $\overline{\bar{A}}$, которое называют *двойным отрицанием высказывания A* .

Например, если A есть высказывание «17 – простое число», то отрицание \bar{A} имеет вид: «17 не является простым числом», а высказывание $\overline{\bar{A}}$ будет таким: «Неверно, что число 17 – непростое». Это высказывание можно сформулировать короче: «17 – простое число». Таким образом, сделав двойное отрицание, мы снова вернулись к высказыванию A .

Упражнения

1. Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний: а) «Луна – спутник Марса»; б) «32 не делится на 4»; в) « $5 > 2$ »; г) « $3 \leq 5$ »; д) «Существуют параллелограммы с равными диагоналями».

2. Дано высказывание A : «Существуют четные простые числа». Определите истинно оно или ложно; укажите среди следующих высказываний отрицание высказывания A . B : «Существуют нечетные простые числа»; C : «Неверно, что существуют четные простые числа»; D : «Любое простое число нечетно».

3. Следующие высказывания запишите без знака отрицания:

а) $\overline{a < b}$; б) $\overline{a \leq b}$; в) $\overline{a \geq b}$; г) $\overline{a > b}$.

3.2.2. Конъюнкция высказываний

Пусть A и B произвольные высказывания.

Логическая операция, соответствующая логической связке «и», называется *конъюнкцией*.

Обозначают эту операцию символом « \wedge ». Запись $A \wedge B$ читается так: « A и B ».

Конъюнкция двух высказываний истинна в том и только в том случае, когда истинны оба высказывания. Если же хотя бы одно из них ложно, то и конъюнкция ложна. Это распространяется и на любое конечное число высказываний.

Таблица истинности $A \wedge B$ выглядит так:

A	B	$A \wedge B$
I	I	I
I	L	L
L	I	L
L	L	L

Примеры:

1. Рассмотрим высказывание «Число 2 четное и простое». Оно является конъюнкцией двух высказываний: «Число 2 четное» и «Число 2 простое». Так как оба эти высказывания истинны, то истинны и их конъюнкция.

2. Высказывание «Функция $y = \sin x$ четная и периодическая» является конъюнкцией. Она ложна, так как высказывание «Функция $y = \sin x$ четная» - ложно, а высказывание «Функция $y = \sin x$ периодическая» - истинно.

3.2.3. Дизъюнкция высказываний

Логическая операция, соответствующая логической связке «или», называется *дизъюнкцией*.

Дизъюнкцию высказываний A и B обозначают $A \vee B$ и читают: « A или B ».

Дизъюнкция ложна только в том случае, когда оба высказывания, из которых она образована, ложны; во всех остальных случаях дизъюнкция истинна. Это распространяется и на любое конечное число высказываний.

Таблица истинности $A \vee B$ выглядит так:

A	B	$A \vee B$
I	I	I
I	L	I
L	I	I
L	L	L

Примеры:

1. Рассмотрим высказывание «Дважды два равно пяти или небо голубое». Оно является дизъюнкцией двух высказываний: «Дважды два равно пяти» и «Небо голубое». Первое высказывание ложно, второе – истинно, следовательно, их дизъюнкция также истинна (см. таблицу истинности).

2. Дизъюнкцией высказываний может служить нестрогое неравенство $3 \leq 7$. Такое неравенство считается истинным, если истинно хотя бы одно из входящих в него высказываний $3 < 7$, $3 = 7$.

Упражнения

1. Даны высказывания A : « $4 \cdot 2 = 8$ » и B : « $(-5)^2 = 25$ ». Образуйте конъюнкцию и дизъюнкцию данных высказываний и определите, истинны они или ложны.

2. Определите значения истинности следующих высказываний:

- «Париж расположен на Сене и $2+3=5$ »;
- «1 – простое число и 2 – простое число»;
- «1 – простое число или 2 – простое число»;
- « $2 \cdot 2 = 4$, и $2 \cdot 2 \leq 5$, и $2 \cdot 2 \geq 4$ »;
- « $2 \cdot 2 = 4$ или белые медведи живут в Африке».

3. Определите значения высказываний A , B , C и D , если:

- а) $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ – истинное высказывание;
 б) $B \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ – ложное высказывание;
 в) $C \vee (2 \cdot 2 = 5)$ – истинное высказывание;
 г) $D \vee (2 \cdot 2 = 5)$ – ложное высказывание.

4. Изобразите на координатной плоскости множества точек, координаты которых обращают следующие высказывательные формы в истинные высказывания:

- а) $(x > 0) \wedge (y > 0)$; б) $(x > 0) \wedge (y < 0)$;
 в) $(x < 0) \wedge (y \leq 0)$; г) $(x = 0) \wedge (y = 0)$;
 д) $(x > 0) \vee (y > 0)$; е) $(x > 0) \vee (y < 0)$;
 ж) $(x < 0) \vee (y = 0)$; з) $(x = 0) \vee (y = 0)$.

5. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого предложения (a и b действительные числа):

- а) $a \cdot b \neq 0$; б) $a \cdot b = 0$; в) $a^2 + b^2 = 0$; г) $\frac{a}{b} = 0$; д) $|a| = 2$; е) $|a| < 2$; ж) $|a| > 2$.

3.2.4. Импликация высказываний

Логическая операция, соответствующая логической связке «если ..., то ...», называется *импликацией*. Импликацию высказываний A и B обозначают $A \rightarrow B$ и читают: «если A , то B ».

Импликация $A \rightarrow B$ ложна лишь в одном случае: высказывание A истинно, а высказывание B ложно; во всех других случаях импликация истинна. Высказывание A называют условием (или посылкой), а B – заключением (следствием).

Таблица истинности A и B выглядит так:

A	B	$A \rightarrow B$
I	I	I
I	L	L
L	I	I
L	L	I

Примеры:

1. Рассмотрим импликацию $A \rightarrow B$: (Если некоторый поезд прибывает на данную станцию, то подается сигнал «путь закрыт»). Здесь A : (Некоторый поезд прибывает на данную станцию) и B : (Подается сигнал «путь закрыт»). Для наглядности используем таблицу:

		Сигнал	
		Путь закрыт ($B=I$)	Путь открыт ($B=L$)
Поезд	Прибывает ($A=I$)	I	L
	Не прибывает ($A=L$)	I	I

Мы видим, что импликация истинна, если:

- а) поезд прибывает, сигнал «путь закрыт»;
- б) поезд не прибывает, сигнал «путь открыт»;
- в) поезд не прибывает, сигнал «путь закрыт».

Ведь в тексте ничего не говорится о том, какой сигнал надо подавать, если поезд не прибывает (путь можно закрыть и по другой причине, аварии не будет).

Импликация ложна лишь тогда, когда:

- г) поезд прибывает, сигнал «путь открыт».

2. Рассмотрим импликацию $A \rightarrow B$: (Если телепатия существует, то некоторые физические законы требуют пересмотра). Высказывание A : (Телепатия существует) – ложно, относительно высказывания B : (Некоторые физические законы требуют пересмотра) можно допустить и истинность и ложность. В любом случае импликация $A \rightarrow B$ будет истинной.

3.2.5. Эквиваленция высказываний

Логическая операция, соответствующая логической связке «тогда и только тогда, когда», называется *эквиваленцией*.

Эквиваленцию высказываний A и B обозначают $A \leftrightarrow B$ и читают: « A тогда и только тогда, когда B ».

Эквиваленция $A \leftrightarrow B$ истинна, если оба высказывания A и B истинны или оба высказывания A и B ложны.

Таблица истинности $A \leftrightarrow B$ выглядит так:

A	B	$A \leftrightarrow B$
I	I	I
I	L	L
L	I	L
L	L	I

Пример:

1. Рассмотрим эквиваленцию $A \leftrightarrow B$: ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ тогда и только тогда, когда $2 \cdot 2 = 5$). Высказывание A : ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$) – истинно, высказывание B : ($2 \cdot 2 = 5$) – ложно. Следовательно, высказывание $A \leftrightarrow B$ будет ложным.

2. Рассмотрим эквиваленцию $A \leftrightarrow B$: ($2 \cdot 2 = 5$ тогда и только тогда, когда параллельные прямые пересекаются), которая является истинной, так как оба высказывания A : ($2 \cdot 2 = 5$) и B : (Параллельные прямые пересекаются) – ложные.

Замечание: Каждому высказыванию можно приписать истинное значение i (истина) или l (ложь). Вместо этих символов часто употребляются числа 1 и 0 соответственно.

Таблицы истинности логических операций выглядят так:

A	\bar{A}
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логическую связку «и» называют логическим умножением

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Логическую связку «или» называют логическим сложением

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1
A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Пример: Даны высказывания A : (Я купил велосипед), B : (Я участвовал в соревнованиях по велоспорту), C : (Я путешествовал по Англии). Сформулируйте высказывания, соответствующие следующим выражениям:

а) $A \wedge B$; б) $A \vee B$; в) $\bar{A} \wedge B$; г) $(\bar{A} \wedge B) \vee \bar{C}$; д) $\overline{A \wedge B}$; е) $\bar{A} \vee \bar{C}$; ё) $A \rightarrow B$; ж) $A \leftrightarrow B$.

Решение:

- а) $A \wedge B$: (Я купил велосипед и участвовал в соревнованиях по велоспорту);
 б) $A \vee B$: (Я купил велосипед или участвовал в соревнованиях по велоспорту);
 в) $\bar{A} \wedge B$: (Я не купил велосипед и участвовал в соревнованиях по велоспорту);
 г) $(\bar{A} \wedge B) \vee \bar{C}$: (Я не купил велосипед и участвовал в соревнованиях по велоспорту или не путешествовал по Англии);
 д) $\overline{A \wedge B}$: (Неверно, что я купил велосипед и участвовал в соревнованиях по велоспорту);
 е) $\bar{A} \vee \bar{C}$: (Я не купил велосипед или не путешествовал по Англии);

ё) $A \rightarrow B$: (Если я купил велосипед, то участвовал в соревнованиях по велоспорту);

ж) $A \leftrightarrow B$: (Я купил велосипед тогда и только тогда, когда участвовал в соревнованиях по велоспорту).

Упражнения

1. Определите значения истинности следующих высказываний:

- а) «Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3»;
- б) «Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3»;
- в) «Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3»;
- г) «Если 15 делится на 3, то 15 делится на 6»;
- д) «Если Париж расположен на Темзе, то белые медведи обитают в Африке»;
- е) «12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3»;
- ж) «15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3»;
- з) «15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4»;
- и) «Солнце всходит на востоке тогда и только тогда, когда оно заходит на западе».

2. Пусть через A обозначено высказывание «9 делится на 3», а через B – высказывание «10 делится на 3». Определите значения истинности следующих высказываний:

- а) $A \rightarrow B$; б) $B \rightarrow A$; в) $\bar{A} \rightarrow B$; г) $\bar{B} \rightarrow A$; д) $\bar{A} \rightarrow \bar{B}$; е) $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$; ж) $A \rightarrow \bar{B}$; з) $B \rightarrow \bar{A}$; и) $A \leftrightarrow B$; к) $\bar{A} \leftrightarrow \bar{B}$; л) $\bar{A} \leftrightarrow B$; м) $A \leftrightarrow \bar{B}$.

3. Определите значения истинности высказываний A , B , C и D в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два ложны:

- а) «Если 4 – четное число, то A »;
- б) «Если B , то 4 – нечетное число»;
- в) «Если 4 – четное число, то C »;
- г) «Если D , то 4 – нечетное число».

4. Определите значения истинности высказываний A , B , C и D в следующих предложениях, первые два из которых истинны, а последние два – ложны:

- а) $A \leftrightarrow (2 < 3)$; б) $B \leftrightarrow (2 > 3)$; в) $C \leftrightarrow (2 < 3)$; г) $D \leftrightarrow (2 > 3)$.

5. Сформулируйте в виде импликаций следующие предложения:

- а) «Во всяком треугольнике сумма величин внутренних углов равна 180^0 »;
- б) «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны»;
- в) «Во вписанном четырехугольнике суммы величин противоположных углов равны»;
- г) «Во всякий треугольник можно вписать окружность»;
- д) «В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов»;
- е) «Всякий элемент множества A принадлежит множеству B ».

п. 3.3. Алгебра логики

Подобно тому, как в алгебре изучают общие свойства числовых выражений, так и в математической логике изучают общие свойства выражений, составленных из высказываний с помощью логических операций. Этот раздел математической логики называют *алгеброй логики*.

В обычной алгебре числа заменяют буквами и когда формулируют какой-либо закон, например $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, то подразумевают, что он выполняется на некотором множестве числовых значений тех переменных, которые в него входят. В алгебре логики тоже используют буквы не только для обозначения конкретных высказываний, но и для обозначения логических переменных. Только эти переменные могут принимать лишь два значения *И* и *Л* (истина и ложь). Логические выражения, полученные из этих переменных с помощью логических операций, также могут принимать лишь два значения *И* и *Л*. Пользуясь таблицами истинности операций, можно составить таблицы истинности и различных выражений.

Пусть X, Y и Z – переменные, вместо которых можно подставлять любые элементарные высказывания (или их значения истинности); такие переменные будем называть *высказывательными (или истинностными) переменными*. С помощью высказывательных переменных и символов логических операций любое высказывание можно *формализовать*, т. е. заменить формулой, выражающей его логическую структуру. Например, высказывание «Если 100 делится на 2 и на 5, то 100 делится на 10» формализуется в виде $(X \wedge Y) \rightarrow Z$; такая же формула соответствует высказыванию «Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм».

3.3.1. Основные символы алгебры высказываний

- 1) X, Y, Z, X_i, Y_i, Z_i (i – натуральное число) – символы для обозначения высказывательных переменных;
- 2) u, l – символы, обозначающие логические константы «истина» и «ложь»;
- 3) $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ – символы логических операций;
- 4) $()$ – скобки (вспомогательные символы, служащие для указания порядка выполнения операций).

3.3.2. Формулы алгебры высказываний

1. Всякая высказывательная переменная – формула.
2. Символы u, l – формулы.
3. Если F – формула, то \bar{F} – формула.
4. Если F_1 и F_2 – формулы, то $(F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2), (F_1 \leftrightarrow F_2)$ – формулы.

5. Никаких других формул в логике высказываний нет.

В п. 1 и 2 определены элементарные формулы; в п. 3 и 4 даны правила образования из любых данных формул новых.

Опишем *процедуру формализации высказываний*:

1. Если высказывание – простое, то ему ставится в соответствие элементарная формула.

2. Если высказывание – составное, то для составления соответствующей формулы нужно: а) выделить все элементарные высказывания и логические связи, образующие данное составное высказывание; б) заменить их соответствующими символами (различные элементарные высказывания обозначаются различными символами); в) расставить скобки в соответствии со смыслом данного высказывания.

Подобным образом формализуются и высказывательные формы.

Пусть F – некоторая формула логики высказываний. Если каждой переменной, входящей в эту формулу, приписать одно из значений истинности ($И$ или $Л$), то, пользуясь определениями логических операций, можно найти значение формулы F при данном наборе значений ее переменных.

Пример: Составить таблицу истинности для формулы $(\bar{X} \vee Y) \rightarrow \bar{Y}$.

Решение: В первых двух столбцах таблицы выпишем всевозможные пары значений переменных X и Y ; таких пар – четыре. В последующие столбцы запишем значения формул \bar{X} , $\bar{X} \vee Y$, \bar{Y} и $(\bar{X} \vee Y) \rightarrow \bar{Y}$ согласно определениями операций. В результате получим таблицу:

X	Y	\bar{X}	$\bar{X} \vee Y$	\bar{Y}	$(\bar{X} \vee Y) \rightarrow \bar{Y}$
$И$	$И$	$Л$	$И$	$Л$	$Л$
$И$	$Л$	$Л$	$Л$	$И$	$И$
$Л$	$И$	$И$	$И$	$Л$	$Л$
$Л$	$Л$	$И$	$И$	$И$	$И$

Формулы, принимающие значение $И$ при всех наборах значений входящих в них переменных, называются *тавтологиями*. Их называют также *тождественно истинными формулами*.

Пример: Доказать, что формула $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$ является тавтологией.

Решение: Составим таблицу истинности для формулы:

X	Y	$(X \rightarrow Y)$	\bar{Y}	\bar{X}	$(\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$	$(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$
$И$	$И$	$И$	$Л$	$Л$	$И$	$И$
$И$	$Л$	$Л$	$И$	$Л$	$Л$	$И$
$Л$	$И$	$И$	$Л$	$И$	$И$	$И$
$Л$	$Л$	$И$	$И$	$И$	$И$	$И$

Формула $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\bar{Y} \rightarrow \bar{X})$ принимает значение и при всех наборах значений переменных. Следовательно, является тавтологией.

Может случиться, что для двух внешне различных формул таблицы истинности одинаковы. Такие формулы принято называть *равносильными*.

Формулы F_1 и F_2 называются *равносильными*, если их эквиваленция $F_1 \leftrightarrow F_2$ – тавтология. Равносильность двух формул логики высказываний обозначается $F_1 \equiv F_2$ или $F_1 \Leftrightarrow F_2$.

Пример: Равносильны ли формулы $\overline{X \wedge Y}$ и $\bar{X} \vee \bar{Y}$?

Решение: Составим таблицу истинности для формулы $\overline{X \wedge Y}$:

X	Y	$X \wedge Y$	$\overline{X \wedge Y}$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>

Составим таблицу истинности для формулы $\bar{X} \vee \bar{Y}$:

X	Y	\bar{X}	\bar{Y}	$\bar{X} \vee \bar{Y}$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>

Сравнивая таблицу истинности $\overline{X \wedge Y}$ с таблицей истинности $\bar{X} \vee \bar{Y}$, видим, что они одинаковые. Значит, $\overline{X \wedge Y} \equiv \bar{X} \vee \bar{Y}$.

Задача: На вопрос, кто из трех учащихся изучал логику, был получен правильный ответ: если изучал первый, то изучал и второй, но неверно, что если изучал третий, то изучал и второй. Кто из учащихся изучал логику?

Решение: Обозначим через A , B , C высказывания, состоящие соответственно в том, что первый, второй, третий учащиеся изучали логику. Запишем условие задачи с помощью A , B , C и логических операций. Получим формулу $(A \rightarrow B) \wedge (\overline{C \rightarrow B})$.

Составим таблицу истинности для формулы:

A	B	C	$A \rightarrow B$	$C \rightarrow B$	$\overline{C \rightarrow B}$	$(A \rightarrow B) \wedge (\overline{C \rightarrow B})$
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>
<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>

<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>
<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>	<i>И</i>	<i>И</i>	<i>Л</i>	<i>Л</i>

Только в предпоследней строке формула принимает значение *и*, а все остальные значения *л*. При этом высказывания *A* и *B* – ложные, а *C* – истинно. Значит, логику изучал только третий учащийся.

Упражнения

1. Формализуйте следующие высказывания:

- «2 – простое число и 3 – простое число»;
- «Ломоносов – великий ученый и талантливый поэт»;
- «Неверно, что две стороны трапеции равны и параллельны»;
- «Две стороны трапеции не равны или не параллельны»;
- «100 не делится ни на 3, ни на 7»;
- «Я сделаю зарядку и, если будет хорошая погода, то поеду за город»;
- «Четырехугольник является квадратом тогда и только тогда, когда все его стороны и все углы равны».

2. Для каждой формулы придумайте два формализуемых ею высказывания:

- $\overline{X \rightarrow Y}$;
- $\overline{X} \rightarrow (Y \vee Z)$;
- $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$.

3. Составьте таблицы истинности для формул:

- $(\overline{X} \rightarrow Y) \vee \overline{X} \wedge \overline{Y}$;
- $\overline{X \vee Y} \rightarrow (X \leftrightarrow \overline{Z})$;
- $(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$;
- $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z)$.

4. Буквами *X* и *Y* обозначены соответственно предложения «Число *n* четно» и «Число *n* делится на 3».

- Формализуйте предложение *P*: «Неверно, что число *n* нечетно и не делится на 3»;
- составьте для полученной формулы таблицу истинности;
- сформулируйте условия, при которых предложение *P* истинно.

5. Установите с помощью таблиц истинности, какие из следующих формул – тавтологии:

- $\overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$; б) $\overline{X} \wedge \overline{Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$; в) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \vee \overline{Y})$; г) $\overline{X \vee Y} \leftrightarrow (\overline{X} \wedge \overline{Y})$;
- $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (Y \rightarrow X)$; е) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \leftrightarrow A$.

6. Какие из данных формул равносильны:

- $\overline{X \vee Y}$; б) $X \wedge \overline{Y}$; в) $X \rightarrow Y$; г) $Y \rightarrow X$; д) $\overline{X} \rightarrow \overline{Y}$; е) $\overline{Y} \rightarrow \overline{X}$;

ж) $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$; з) $X \leftrightarrow Y$.

7. Установите, какие из следующих высказываний истинны:

а) $X \equiv \bar{\bar{X}}$; б) $X \equiv X \wedge X$; в) $Y \equiv Y \vee Y$; г) $X \wedge Y \equiv X \vee Y$; д) $X \vee \bar{X} \equiv u$; е) $X \wedge \bar{X} \equiv l$;

ж) $l \rightarrow X \equiv u$; з) $X \rightarrow u \equiv u$; и) $X \rightarrow Y \equiv \bar{X} \vee Y$; к) $X \vee \bar{X} \equiv Y \rightarrow (X \rightarrow Y)$;

л) $(X \wedge Y) \rightarrow X \equiv X \rightarrow (X \vee Z)$.

ГЛАВА 4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика – это раздел дискретной математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных элементов (объектов) с учетом тех или иных условий. Как самостоятельная ветвь математики комбинаторика возникла в XVII веке в связи с развитием теории вероятностей, хотя отдельные комбинаторные задачи были сформулированы еще в древности. Название этому математическому направлению дал немецкий языковед, философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716), опубликовавший в 1666 году свою работу «Об искусстве комбинаторики», в которой впервые появился термин «комбинаторный».

Исходным в комбинаторике является интуитивно ясное понятие выборки (синонимы – «расстановки», «комбинации», «соединения»), как набора m элементов из некоторого исходного множества, причем наборы могут быть как упорядоченными, так и неупорядоченными, с повторениями элементов и без повторений.

В настоящее время комбинаторика представляет собой один из важнейших разделов современной дискретной математики, имеющей многочисленные применения на практике.

n. 4.1. Основные формулы комбинаторики

4.1.1. Понятие факториала

Произведение первых n натуральных чисел, т. е. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, называют « n – факториал» и обозначают $n!$, т. е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$n!$ можно записать в виде $n! = (n-1)! \cdot n$. При $n=1$ имеем: $1! = (1-1)! \cdot 1 = 0! \cdot 1 = 1!$. Откуда следует, что $0! = 1$.

Пример 1: Записать со знаком факториала: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Решение: Это произведение чисел натурального ряда, но число 4 в нем встречается два раза, следовательно: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 4 \cdot 6!$

Пример 2: Записать со знаком факториала: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

Решение: Здесь пропущены два числа: 2 и 4. Умножим и разделим на $2 \cdot 4$. Получим: $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$

Пример 3: Упростить $\frac{(n!)^2 + (n-1)!(n-2)!}{((n-2)!)^2}$

Решение: Запишем выражение в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{n! \cdot n! + (n-1)!(n-2)!}{(n-2)!(n-2)!} &= \frac{(n-2)!(n-1) \cdot n \cdot (n-1)! + (n-2)!(n-2)!}{(n-2)!(n-2)!} = \\ &= \frac{(n-2)!(n-1)!(n^2 \cdot (n-1) + 1)}{(n-2)!(n-2)!} = \frac{(n-2)!(n-1) \cdot (n^3 - n^2 + 1)}{(n-2)!} = \\ &= n^4 - n^3 - n^3 + n^2 + n - 1 = n^4 - 2n^3 + n^2 + n - 1. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Запишите следующие произведения с использованием знака факториала:

а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-4) \cdot (n-3)$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)$;

г) $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$;

д) $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$.

2. Упростите и результат запишите с использованием знака факториала:

а) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{(n+1) \cdot (n+2)}$;

б) $\frac{(n-2)! - 2 \cdot (n-1)!}{3-2n}$;

в) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot (k+1)}{k+1}$.

3. Упростите:

а) $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$;

б) $\frac{(n-2)! + (n-1)! + n!}{(n-1)!}$.

4.1.2. Правило произведения в комбинаторике

Если один элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент – m способами, то выбор того и другого элемента в заданном порядке может быть осуществлен N способами, где $N=n \cdot m$.

В общем случае, если один элемент множества A_1 можно выбрать n_1 способами, элемент множества A_2 – n_2 способами и так далее до множества A_k один элемент которого можно выбрать n_k способами, то выбрать k элементов в заданном порядке можно N способами, где

$$N = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot \dots \cdot n(A_k) = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k.$$

Это утверждение называют в комбинаторике *правилом произведения*.

Пример 1: Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Один элемент из этого множества можно выбрать $n=5$ способами. Останется четыре элемента. Один элемент из них можно выбрать $m=4$ способами. Следовательно, выбор двух элементов возможен $5 \cdot 4 = 20$ способами, список которых имеет вид: 12, 13, 14, 15, 21, 23, 24, 25, 31, 32, 34, 35, 41, 42, 43, 45, 51, 52, 53, 54. Заметим, что в каждой выборке цифры разные.

Пример 2: В урне пять шаров с номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимают один шар и записывают его номер. Шар возвращают в урну и наугад снова выбирают один шар и номер его записывают справа от первой цифры. Получится двухразрядное число. Сколько возможно таких чисел?

Решение: На первом месте может стоять один из пяти цифр, т. е. $n=5$. На втором месте – также одна из пяти цифр. Следовательно, $m=5$. Тогда искомое число $n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25$. Среди всех этих 25 выборов (в отличие от предыдущего примера) существуют пары с одинаковыми цифрами.

Пример 3: Найти число слов содержащих 4 буквы, в которых любые две соседние буквы различны (число букв в алфавите равно 33; при этом допускаются и слова, лишённые смысла, например «ваха»).

Решение: Первую букву слова можно выбрать 33 способами. После того как она выбрана, следующую букву можно выбрать лишь 32 способами, так как повторить выбранную букву нельзя. Третья буква отлична от второй, хотя и может совпадать с первой, а потому ее можно выбрать 32 способами, равно как и четвертую. Поэтому общее число способов выбора равно $33 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 = 1081344$.

Пример 4: Автомобильные номера имеют формат $AZZZZAA$ (A – любая буква русского алфавита, кроме \tilde{E} , \tilde{I} , \tilde{Y} , \tilde{L} , \tilde{B} , которые не употребляются в номерах; Z – произвольная цифра). Число различных возможных номеров равно произведению $28 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 28 = 219520000$.

Упражнения

1. Имеется пять видов конвертов без марок и четыре вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?
2. Сколькими способами можно из слова «здание» выбрать две буквы, одна из которых гласная, другая согласная?
3. Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три дороги. Сколько путей, проходящих через B , ведут из A в C ?
4. Сколькими способами можно из слова «космонавт» выбрать две буквы, одна из которых гласная, а другая согласная?
5. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?

4.1.3. Правило суммы в комбинаторике

Обозначим число элементов конечного множества A через $n(A)$, множество, состоящее из n элементов, назовем n – множеством. Например, если $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, то $n(A) = 6$, и поэтому A является 6 – множеством.

Пусть A содержит m элементов, а B содержит n элементов. Найдем, сколько элементов содержит объединение $A \cup B$. Эта задача имеет однозначное решение лишь в случае, когда множества A и B не пересекаются, т. е. $A \cap B = \emptyset$. В этом случае множество $A \cup B$ содержит $m+n$ элементов. (Например, если $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g\}$, то $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ содержит $4+3=7$ элементов).

Таким образом, справедливо следующее утверждение: Если множества A и B конечны, причем $A \cap B = \emptyset$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Это утверждение называют в комбинаторике *правилом суммы*. Его формулируют следующим образом:

Если элемент множества A может быть выбран m способами, а элемент множества B – n способами, то выбор «либо элемент множества A , либо элемент множества B » может быть осуществлен $m+n$ способами.

Пример 1: В тарелке лежат 6 яблок и 4 груши. Сколькими способами можно выбрать один плод?

Решение: Обозначим A – множество яблок, B – множество груш. Условие задачи можно записать так: $n(A) = 6$, $n(B) = 4$. Тогда $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 6 + 4 = 10$, т. е. один плод можно выбрать 10 способами.

Аналогично рассматривается вопрос о числе элементов в объединении нескольких конечных множеств. Если эти множества A_1, A_2, \dots, A_m попарно не пересекаются (т. е. если $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то справедливо равенство:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_m).$$

Рассмотрим случай, когда $A \cap B \neq \emptyset$. Например, объединение множеств $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g\}$ состоит лишь из семи элементов: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, а не из $5+4=9$ элементов. Это объясняется тем, что элементы d и e принадлежат и A и B , а в объединение $A \cup B$ эти элементы входят лишь один раз (для множеств не имеет смысла говорить, что некоторый элемент входит в них несколько раз). Поэтому из суммы $5+4$ приходится вычесть 2, т. е. число элементов пересечения $A \cap B$.

Вообще для любых двух конечных множеств A и B имеет место равенство: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

В случае трех конечных множеств A, B, C правило суммы имеет вид:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

Пример 2: Сколько человек участвовало в прогулке, если известно, что 16 из них взяли с собой бутерброды с ветчиной, 24 – с колбасой, 15 – с сыром, 11 – и с ветчиной и с колбасой, 8 – и с ветчиной и с сыром, 12 – и с колбасой

и с сыром, 6 – бутерброды всех трех видов, а 5 вместо бутербродов взяли с собой пирожки?

Решение: Обозначим через A множество участников, взявших с собой бутерброды с ветчиной, через B – с колбасой, через C – с сыром и через D – множество участников, взявших с собой пирожки. Тогда условие задачи можно записать так:

$$n(A)=16, n(B)=24, n(C)=15, n(A \cap B)=11, n(A \cap C)=8, n(B \cap C)=12, n(D)=5.$$

Найдем $n(A \cup B \cup C)$, т.е. число участников прогулки, взявших с собой один или несколько видов бутербродов. По формуле получаем:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = \\ &= 16 + 24 + 15 - 11 - 8 - 12 + 6 = 30. \end{aligned}$$

Значит, бутерброды взяли с собой 30 человек, а всего в прогулке участвовали $30+5=35$ человек.

Упражнения

1. Из 40 студентов группы 35 человек сдали экзамен по математике, а 37 – по русскому языку. Двое студентов получили неудовлетворительные оценки по обоим предметам. Сколько студентов имеют академическую задолженность?

2. Из 100 студентов английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5, все три языка знают 3 человека. Сколько студентов не знают ни одного иностранного языка?

3. 12 туристов взяли с собой по коробке спичек, 19 туристов – по зажигалке. Н спичек, ни зажигалок не взяли 6 человек. Всего в отряде 27 человек. Сколько человек взяли с собой и спички и зажигалки?

4.1.4. Перестановки без повторений

Пусть дано множество вида $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Зафиксируем элементы этого множества в каком-либо порядке. Затем переставим местами некоторые элементы. Получим новую последовательность. Снова переставим некоторые элементы и так далее. Сколько существует таких последовательностей (различных!)?

Указанные последовательности называются *перестановками без повторений*. Число всех перестановок обозначается P_n , где n – число, показывающее, сколько различных элементов участвует в перестановках.

Формулу для числа перестановок без повторений можно вывести на основе правила произведения. Первый из n элементов можно выбрать n способами. Останется $(n-1)$ элементов. Следовательно, второй элемент можно выбрать $(n-1)$ способами, третий – $(n-2)$ способами и так далее до последнего элемента, который выбирается единственным способом. По правилу произведения, получим:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Итак, доказали, что $P_n = n!$

Перестановки без повторений из n элементов состоят из одних и тех же n элементов, а отличаются друг от друга лишь порядком этих элементов. При этом элементы в них не повторяются.

Пример 1: Сколькими способами можно составить четырехцветный флаг из горизонтальных полос, имея четыре различных цвета?

Решение: В этом случае различные флаги отличаются друг от друга лишь порядком цветов. Их число равно числу перестановок из четырех элементов, т. е. $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Пример 2: Сколько различных слов можно составить из букв слова «зачет», если под словом понимать всякую последовательность из пяти букв?

Решение: В заданном слове все буквы разные, следовательно, искомое число равно: $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Пример 3: Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих повторяющихся цифр, если используются только цифры 3, 5, 9?

Решение: В данном случае $n=3$, следовательно, искомое число равно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Все эти перестановки имеют вид: 359, 395, 539, 593, 953, 935.

Упражнения

1. Сколькими способами можно посадить на скамейку 9 человек?
2. Сколько различных чисел можно образовать, переставляя цифры 3, 4, 5, 7, 9?
3. Известно, что операция арифметического сложения коммутативна. Например, выражение $a+b+c+d$ можно записать иначе: $b+c+a+d$ либо $c+a+d+b$ и так далее. Сколько существует способов записи этого выражения?
4. Сколькими способами можно получить различные расположения семи цветов радуги, меняя местами цвета?
5. Составляют буквенно-цифровой код: записывают в некотором порядке четыре буквы a, b, c, d , затем справа приписывают три цифры 1, 2, 3, также в некотором порядке, например, $bcdal132$, $abcdl123$ и так далее. Сколько существует таких кодов?
6. Известно, что n человек могут разместиться в очереди 3628800 способами. Найти n .

4.1.5. Перестановки с повторениями

Даны n_1 элементов вида a (неразличимых между собой), n_2 элементов вида b, \dots, n_k элементов вида x . Из всех этих элементов образуют n – элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы, т. е. $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Одна из последовательностей имеет вид:

$$\underbrace{a a a \dots a}_{n_1} \underbrace{b b b \dots b}_{n_2} \dots \underbrace{x x x \dots x}_{n_k}$$

Ее элементы можно переставлять любым способом. Сколько существует таких перестановок?

Число перестановок из n элементов равно $n!$, если все n элементов различны. Однако в данном случае $n_1!$ Перестановок неразличимы. Неразличимы и $n_2!$ Перестановок и так далее. Следовательно

$$\bar{P}_n = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!},$$

где черта над знаком P_n говорит о том, что в перестановках есть повторяющиеся элементы.

В формуле k – это число различных элементов. Если повторяющихся элементов нет, то $n=k$, так как $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$, и тогда формула превращается в формулу $P_n = n!$, т. е. формула $P_n = n!$ – это частный случай более общей формулы $\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Пример 1: Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

Решение: В слове «математика» 10 букв. Из них две буквы «м», три буквы «а», две буквы «т», одна буква «е», одна буква «и», одна буква «к». Следовательно, $n=10$, $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=2$, $n_4=1$, $n_5=1$, $n_6=1$. Искомое число различных слов равно: $\bar{P}_{10} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200$.

Пример 2: Сколько существует четырехбуквенных слов, в которых три буквы «а» и одна буква «в»?

Решение: Здесь $n=4$, $n_1=3$, $n_2=1$. Искомое число равно: $\bar{P}_4 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$.

Пример 3: Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Решение: Здесь $n=8$, $n_1=2$, $n_2=2$, $n_3=2$, $n_4=1$, $n_5=1$. Число способов равно: $\bar{P}_8 = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040$.

Упражнения

1. Сколько чисел можно образовать, переставляя цифры 1, 2, 3, 5, если в каждом числе три единицы, одна двойка, две тройки и две пятерки?

2. Сколько различных слов можно образовать путем перестановки букв в слове «территория»?

3. На полке пять книг синего цвета, две желтого и одна зеленого. Сколькими способами их можно расставить на полке, если слева всегда стоят две книги синего цвета?

4. В числе 3 двойки, 4 тройки, 2 четверки, 3 пятерки. Сколько чисел можно образовать, переставляя эти цифры, если каждое число начинается с последовательности 335 и оканчивается тремя двойками?

4.1.6. Размещения без повторений

Дано множество A , содержащее n элементов. Из них образуют упорядоченные последовательности длины m , в которых каждый элемент множества A встречается не более одного раза. Эти последовательности называют *размещениями без повторений*. Сколько существует таких последовательностей?

Первый элемент можно выбрать n способами, второй – $(n-1)$ способами (поскольку один элемент множества A удален при первой выборке). Третий элемент можно выбрать $(n-2)$ способами и так далее до элемента m , который можно выбрать $(n-m+1)$ способами. По правилу произведения число всех размещений без повторений равно:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1),$$

где A_n^m - символ, обозначающий число размещений из n элементов по m без повторений.

Умножим и разделим полученное число на $(n-m)!$

$$\begin{aligned} A_n^m &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m)!}{(n-m)!} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

Числитель этой дроби есть произведение натуральных чисел от 1 до n , следовательно,

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Это окончательная формула для определения числа размещений из n элементов по m без повторений.

Пример 1: Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержащих четных цифр и не содержащих одинаковых цифр?

Решение: Нечетные цифры – это 1, 3, 5, 7, 9. Следовательно $n=5$, $m=3$. По формуле получим:

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60.$$

Пример 2: Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?

Решение: По условию $n=5$, $m=3$. Тогда $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 60$.

Пример 3: Множество E содержит 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько может быть получено 4 – буквенных слов, оканчивающихся буквой а?

Решение: Число 4 – буквенных слов, оканчивающихся буквой а равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одной букве из 9

(буква а исключена из рассмотрения, поскольку ее место уже определено).

$$\text{Таким образом, } A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 504.$$

Упражнения

1. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков (русского, английского, немецкого, французского и итальянского) на любой другой из них?

2. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если ни одно из этих чисел не содержит двух повторяющихся цифр?

3. Сколько четырехбуквенных последовательностей можно образовать из всех гласных букв русского алфавита, если в каждой последовательности повторяющихся букв нет? (В русском алфавите 10 гласных букв: а, е, ё, и, о, у, ы, э, ю, я).

4. Из 10 цифр образуют семизначные десятичные числа, в каждом из которых нет повторяющихся цифр. Сколько существует таких чисел, если каждое число начинается с последовательности цифр 897?

5. Три студента выбирают по одной книге из 11 предложенных. Все книги разные. Сколькими способами может быть осуществлен выбор?

4.1.7. Размещения с повторениями

Дано множество, содержащее n элементов. Из них образуют размещения с повторениями, т. е. упорядоченные последовательности длины m , причем одни и те же элементы в любую последовательность могут входить многократно. Сколько всего существует таких последовательностей?

Размещения с повторениями отличаются одно от другого и элементами и порядком записи элементов. Следовательно, для нахождения числа размещений с повторениями можно воспользоваться правилом произведения. Если множество содержит n элементов, то первый элемент можно выбрать n способами, второй — n способами и так далее. В результате получаем $\overline{A}_n^m = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^m$, где символ \overline{A}_n^m используется для обозначения числа размещений из n элементов по m с повторениями.

Пример 1: Сколько можно образовать четырехразрядных чисел, используя только цифры 3, 7, 8, 9, если повторения возможны?

Решение: По правилу произведения на первом месте может находиться любая из четырех цифр. Следовательно, имеем 4 случая. Так как повторы разрешены, то на втором месте может находиться любая из четырех заданных цифр — имеем снова 4 случая. Для двух остальных разрядов имеем еще по 4 случая. Таким образом, $\overline{A}_4^4 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$.

Пример 2: Сколько всего существует трехразрядных десятичных чисел, которые могут быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8?

Решение: На месте старшего разряда может находиться одна из цифр 1, 2, 4, 5, 6, 8 – всего их шесть. По шесть цифр могут находиться и в двух младших разрядах. Следовательно, $\overline{A}_6^3 = 6^3 = 216$.

Пример 3: Из 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам?

Решение: Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7 – кратном выборе с возвращениями номера лунки и записи 7 – буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки). Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку – шар № 7, в третью – шар № 3, в четвертую – шары № 5 и № 6.

Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу 7 – буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т. е. $\overline{A}_4^7 = 4^7 = 16384$.

Упражнения

1. Сколько двухбуквенных слов можно образовать из 10 гласных букв русского алфавита?
2. Сколько слов длины 12 можно составить из двух букв а и в?
3. Сколькими способами из колоды, содержащей 36 карт, можно выбрать по одной карте каждой масти?
4. Пять различных предметов раздают 8 людям, причем может случиться, что некоторые получают по несколько предметов. Сколькими способами может быть произведен раздел?
5. Пятнадцать занумерованных бильярдных шаров разложены по шести лузам. Сколькими способами это можно сделать?

4.1.8. Сочетания без повторений

Пусть множество A содержит n элементов. Выделим из множества A некоторое подмножество, содержащее m элементов ($m \leq n$). Сколько существует таких подмножеств?

Каждое подмножество множества A , содержащее m элементов, называется *сочетанием m элементов из n* , где $n = n(A)$. Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается символом C_n^m . Нижний индекс n в этом обозна-

чении есть число всех тех элементов, из которых осуществляются выборки. Верхний индекс m показывает, сколько элементов входит в выборку.

Запишем формулу числа размещений без повторов: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Размещения, описываемые этой формулой, отличаются друг от друга элементами или порядком элементов. Сочетания же отличаются одно от другого только элементами. Если число A_n^m разделить на $m!$, то получим формулу для числа сочетаний из n элементов по m :

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 1: Сколькими способами можно выбрать делегацию в 5 человек из группы, содержащей 12 человек?

Решение: Так как порядок членов делегации роли не играет, то в данном случае $n=12$, $m=5$. Следовательно, искомое число равно:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{5!7!} = \frac{7!8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{7!1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792.$$

Пример 2: Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных шашек?

Решение: Поля для белых шашек можно выбрать C_{32}^{12} способами. После этого остается 20 полей, из которых можно C_{20}^{12} способами выбрать поля для черных шашек. Всего получаем:

$$C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12} = \frac{32!}{12!20!} \cdot \frac{20!}{12!8!} = \frac{32!}{12!12!8!} \text{ способов.}$$

Пример 3: Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Сколькими различными способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? В скольких случаях окажется ровно один туз? В скольких случаях – ровно 4 туза?

Решение: Выбрать 10 карт из 52 карты можно сделать C_{52}^{10} способами. Найти число способов, когда среди выбранных карт есть хотя бы один туз, на первый взгляд сложнее – надо разбирать случаи, когда есть ровно один туз, ровно два туза, ровно три туза, ровно четыре туза. Но проще найти сначала, в скольких случаях среди выбранных карт нет ни одного туза – во всех остальных случаях будет хотя бы один туз. Но если среди выбранных карт нет ни одного туза, то выбор совершался не из 52, а из 48 карт (всех карт, кроме тузов), а поэтому число таких выборов равно C_{48}^{10} . Следовательно, хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ случаях.

Чтобы найти, в скольких случаях будет ровно один туз, разобьем операцию выбора карт на две – сначала выбирают из четырех тузов один туз – это можно сделать C_4^1 способами. А потом из оставшихся 48 карт выберем 9, что можно сделать C_{48}^9 способами. По правилу произведения получаем, что весь выбор можно сделать $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ способами.

Наконец, выбор, содержащий четыре туза, можно сделать C_{48}^6 способами – надо взять 4 туза и выбрать еще 6 карт из 48.

Числа C_n^m обладают целым рядом замечательных свойств. Рассмотрим некоторые из них.

1. Если $0 \leq m \leq n$ и числа m и n целые, то верно равенство $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. Для любых m и n , таких, что $0 \leq m \leq n$, верно равенство $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$.
3. Для любого целого числа $n \geq 0$ верно равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^k + \dots + C_n^n = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n.$$

4. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.
5. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1}$ при четном n ;
 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^n$ при нечетном n .
6. $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.
7. $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Упражнения

1. Сколькими способами можно выбрать четыре краски из шести различных красок?
2. Рота состоит из трех офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и 20 рядовых?
3. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них 4 пары для танца?
4. В районе 8 населенных пунктов. Сколько различных маршрутов для самолета можно составить, если известно, что каждый маршрут соединяет три пункта?
5. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если любые две команды встречаются между собой один раз?

4.1.9. Сочетания с повторениями

Дано множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Сколько существует выборок по m элементов, если в них могут входить повторяющиеся элементы и если порядок элементов в выборках безразличен? Такие выборки называют *сочетаниями с повторениями*.

Нахождение числа сочетаний с повторениями поясним на примере.

Пример 1: В магазине имеется 4 вида конфет: «Пилот», «Ромашка», «Весна», «Снежинка». Требуется купить 10 конфет в любом сочетании из перечисленных. Сколькими способами это можно сделать?

Решение: При покупке возможны варианты:

- купили 10 конфет «Весна»;

- купили 5 конфет «Пилот», 3 конфеты «Ромашка» и 2 конфеты «Весна» (всего 10 конфет);
- купили 6 конфет «Весна», и 4 конфеты «Ромашка» и так далее.

Закодируем покупку следующим образом.

Пусть решено купить три конфеты «Пилот», две конфеты «Ромашка», одну конфету «Весна» и четыре конфеты «Снежинка». Запишем три единицы (это конфеты «Пилот»), после которых поставим нуль. Затем запишем две единицы (это конфеты «Ромашка») и нуль. Далее поставим одну единицу и нуль. В конце запишем четыре единицы (конфеты «Снежинка»), но нуль после них не ставим. Получилась последовательность:

111	0	11	0	1	0	1111
«Пилот»	«Ромашка»	«Весна»	«Снежинка»			

Нули в этой последовательности выполняют только одну роль – они отделяют один вид конфет от других. Например:

1111001011111 – куплено четыре конфеты «Пилот», ни одной конфеты «Ромашка», одна конфета «Весна» и пять конфет «Снежинка»;

0001111111111 – куплено 10 конфет «Снежинка», все остальные конфеты в покупке не вошли;

0101111111110 – конфет «Пилот» и «Снежинка» в покупке нет. Куплено одна конфета «Ромашка» и девять конфет «Весна».

Таким образом, число вариантов покупок равно числу всех возможных 13 – разрядных двоичных кодов, в каждом из которых десять единиц и три нуля:

$$\bar{C}_4^{10} = C_{13}^{10} = \frac{13!}{10!3!} = 286,$$

где символом \bar{C}_4^{10} обозначено число сочетаний с повторениями из четырех элементов по 10.

В общем случае, если множество A содержит n элементов, из которых составляются выборки по m элементов с повторениями, то число всех таких выборок равно: $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{m-1}$.

В числе $n+m-1$ единица вычитается по той причине, что число нулей, которыми отделяются группы одинаковых элементов, на единицу меньше числа $n(A)$.

Пример 2: Сколькими способами можно ставить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Решение: Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается выборкой длиной 8 из 4 элементов (названий сортов пирожных), причем порядок элементов выборки не играет роли. Иными словами, надо найти число различных выборок. А это число равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 8, т. е. $\bar{C}_4^8 = C_{11}^8 = 165$. Значит, существует 165 различных наборов.

Упражнения

1. В магазине продают четыре вида конфет. Сколькими способами можно купить 15 конфет?

2. Продаются тетради пяти цветов: с синей обложкой, фиолетовой, красной, зеленой и оранжевой.

а) Требуется купить 10 тетрадей любого цвета. Сколькими способами это можно сделать?

б) Требуется купить 15 тетрадей. Пять из них должны быть с фиолетовой обложкой, а обложки всех остальных тетрадей могут быть любого цвета, кроме фиолетового. Сколькими способами возможна такая покупка?

в) Требуется купить 16 тетрадей, среди которых 4 тетради должны быть с зеленой обложкой и 5 тетрадей – с оранжевой. Цвет обложки остальных тетрадей значения не имеет. Сколькими способами возможна покупка?

г) Требуется купить 14 тетрадей, среди которых каждого цвета из пяти должно быть не менее чем по две тетради. Сколько существует вариантов покупки?

n. 4.2. Упражнения по всему курсу комбинаторики

Основные формулы комбинаторики:

1. перестановки без повторений: $P_n = n!$;

2. перестановки с повторениями: $\overline{P}_n = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$. где $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$;

3. размещения из n элементов по m без повторений: $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$;

4. размещения из n элементов по m с повторениями: $\overline{A}_n^m = n^m$;

5. сочетания из n элементов по m без повторений: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$;

6. сочетания из n элементов по m с повторениями: $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Упражнения

1. В вышеприведенном списке основных формул комбинаторики укажите номера формул, в которых:

а) учитывается порядок элементов в выборках;

б) порядок элементов не имеет значения;

в) различные выборки могут содержать различные элементы;

г) выборки отличаются одна от другой только элементами.

2. Укажите номера правильных формул:

а) $A_n^m = \frac{P_n}{(n-m)!}$;

$$\text{б)} A_n^m = \frac{P_m}{(n-m)!};$$

$$\text{в)} P_m = \frac{A_n^m}{C_n^m};$$

$$\text{г)} C_n^m = \frac{P_n}{P_m(n-m)!};$$

$$\text{д)} C_n^m = \frac{P_m}{P_n(n-m)!};$$

$$\text{е)} C_{r+k}^r = \frac{(r+k)!}{r!k!}.$$

3. Укажите номера верных утверждений:

а) в формуле числа сочетаний из n элементов по m без повторений всегда $n \geq m$;

б) в формуле числа размещений из n элементов по m без повторений возможно соотношение $n < m$;

в) в формуле числа размещений из n элементов по m с повторениями возможно соотношение $n > m$;

г) в формуле числа сочетаний из n элементов по m с повторениями возможны случаи, когда $m > n$;

д) в формуле числа перестановок из n элементов без повторений величина n может принимать нулевые значения.

4. Вычислить (ответ – обыкновенная несократимая дробь):

$$\text{а)} \frac{C_3^2}{C_7^3}; \quad \text{б)} C_n^2 \cdot \frac{(n-2)!}{(n-1)!n}; \quad \text{в)} \frac{C_{10}^4 \cdot C_{10}^6}{(C_{11}^5)^2}.$$

5. Найдите сумму: $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

6. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое надо выбрать по одному фехтовальщику для участия в состязаниях. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

7. Упростите:

$$\text{а)} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-2) \cdot (k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)};$$

$$\text{б)} \frac{(k-2)! + (k-1)! + k!}{(k-2)!};$$

$$\text{в)} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)};$$

$$\text{г)} \frac{(n-2)! - 2 \cdot (n-1)!}{3-2n};$$

$$\text{д)} \frac{3 \cdot (n-1)! + 4 \cdot n!}{2(3+4n) \cdot (n-2)!};$$

$$\text{е)} \frac{(n+2)!}{(n+1) \cdot (n+2)}.$$

8. Сколько существует различных инициалов имени и отчества, если считать, что с букв Ё, Ы, Ъ, Ь, Й имена не начинаются?

9. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и кассира. Сколькими способами это можно сделать?

10. Надо отправить шесть срочных писем. Сколькими способами это можно сделать, если доставку писем осуществляют три курьера и каждое письмо можно дать любое из них?

11. Сколькими способами можно расставить на полке восемь учебников, из которых три учебника физики, три учебника химии и два учебника истории?

12. Сколькими способами можно разложить по пяти пакетам 12 апельсинов при условии, что ни один пакет не должен быть пустым?

13. На экзаменационную сессию выносятся пять экзаменов:

- а) высшая математика;
- б) информатика;
- в) история;
- г) экономическая теория;
- д) растениеводство.

Сколькими способами можно составить расписание экзаменов для одной студенческой группы?

14. Экзаменационный билет состоит из двух вопросов. Сколько можно составить билетов, если вопросов всего 30?

15. Сколько вариантов кода банковского сейфа можно составить, если код состоит из 6 цифр:

- а) цифры различные;
- б) допускается повторение цифр.

16. Сколькими способами можно составить наряд из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 4 офицера?

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Введение

Понятие о графах, как о геометрических схемах в виде набора точек, которые соединяются между собой какими-нибудь линиями, появились в XVIII веке. Данные сведения были разрозненными и относились к головоломкам, развлечениям и играм.

Первой работой теории графов как математической дисциплины считают статью Леонардо Эйлера (1736 г.), в которой рассматривалась задача о Кенигсбергских мостах. В данной задаче необходимо было обойти все 4 части суши, пройдя по каждому мосту один раз, и вернуться в исходную точку. Эйлер показал, что нельзя обойти сеть городских мостов и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз.

Существуют и другие не менее интересные задачи.

Задача о трех домах и трех колодцах. Есть три дома и три колодца. Жители домов поссорились. Требуется от каждого дома проложить тропинку к каждому колодцу так, чтобы эти тропинки не пересекались. (Решена Куратовским в 1930)

Задача о четырех красках. Любую карту на плоскости раскрасить четырьмя красками так, чтобы никакие две соседние области не были покрашены одинаково. Эта задача была сформулирована в середине XIX века, и попытки ее решить привели к появлению некоторых исследований графов, имеющих теоретическое и прикладное значение.

Многие результаты середины XIX века были получены при решении практических задач. Например, Кирхгоф: система уравнений токов и напряжений в электротехнической схеме представлялась графом и решалась с помощью методов теории графов. Задача о перевозках, решение которой привело к созданию эффективных методов решения транспортных задач. В XX веке задачи, связанные с графами, получили распространение не только в физике, электротехнике, химии, биологии, медицине, психологии, экономике, но и внутри различных разделов математики (алгебра, теория чисел, теория вероятностей и другие области).

С графами встречаемся постоянно. Например, графом является сеть улиц в городе (вершины – перекрестки, улицы – ребра). Исследуя свою родословную и возводя ее к далекому предку, мы строим так называемое генеалогическое древо. И это древо – граф.

Графы служат удобным средством описания связей между объектами. Например, рассматривая граф, изображающий сеть дорог между населенными пунктами, можно определить маршрут проезда от пункта A до пункта B . Если таких маршрутов окажется несколько, хотелось бы выбрать наиболее оптимальный, например самый короткий или самый безопасный. Для решения задачи выбора необходимо проводить определенные вычисления над графами. При решении подобных задач удобно использовать алгебраическую технику. Для понимания теории графов требуется знание элементарной теории множеств и теории матриц.

В настоящее время теория графов охватывает большой материал и активно развивается.

п.5.1. Основные понятия

5.1.1 Граф

В общем случае граф – это множество V точек, соединенных между собой линиями, необязательно прямыми. Точки множества V называются вершинами графа, а соединяющие их линии – ребрами. Вершины графа обычно нумеруют десятичными числами, но можно использовать и любые другие знаки. Если вершины пронумерованы, то ребра обозначают неупорядоченными парами номеров вершин. Каждую пару образуют номера тех вершин, которые соединены ребром.

Граф называется простым (или линейным), если любые две его вершины соединены не более чем одним ребром и каждое ребро соединяет различные вершины. Пример простого графа приведен на рис. 1.

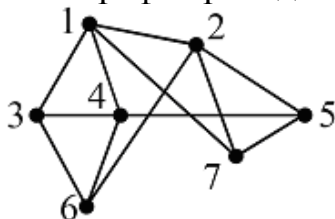


Рис. 1

Всякий простой граф может быть представлен не только в виде рисунка, но и аналитически. Пусть E – множество ребер графа, тогда можно записать (рис. 1): $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $E = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,7\}\}$, где E – множество двухэлементных подмножеств множества V , каждое из которых определяет ребро, соединяющее вершины $v \in V$ и $w \in V$.

5.1.2. Псевдограф. Мультиграф

Существуют графы, в которых те или иные пары вершин соединены не одним ребром, а несколькими. Такие ребра называют кратными (параллельными). Кроме того, граф может содержать ребра, соединяющие какую-либо вершину саму с собой. Такие ребра называются петлями. Вершина называется изолированной, если у нее нет петель и из нее не выходит ни одного ребра.

Граф, содержащий петли или кратные ребра, называется псевдографом. Пример псевдографа приведен на рис. 2, где вершина 1 имеет кратные петли, вершина 2 – одиночную петлю, а вершины 2 и 3 соединены кратными ребрами.

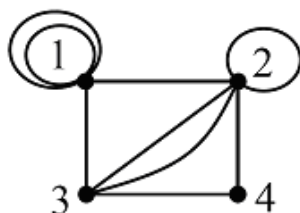


Рис. 2

Псевдограф без петель называется мультиграфом. Пример мультиграфа приведен на рис. 3.

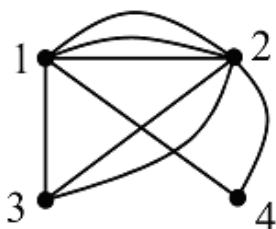


Рис. 3

Упражнения

1. Укажите псевдографы на рис. 4.
2. Укажите мультиграфы на рис. 4.
3. Укажите простые графы на рис. 4.
4. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) может ли быть простым граф, содержащий 4 вершины и 8 ребер?
- 2) может ли граф с одним ребром быть псевдографом?
- 3) может ли граф быть псевдографом, если в нем нет кратных ребер?
- 4) может ли граф с одним ребром быть мультиграфом?
- 5) граф содержит одну вершину. Может ли он быть мультиграфом?
- 6) граф содержит одну вершину. Может ли он быть псевдографом?
- 7) граф содержит одну вершину. Может ли он быть простым графом?

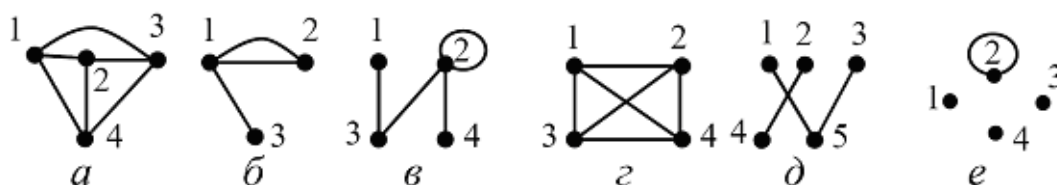


Рис. 4

5.1.3. Подграф. Надграф. Частичный граф.

Если из графа G удалить одну или несколько вершин, то будут удалены и выходящие из них ребра. Оставшиеся вершины и ребра образуют подграф G' графа G . Из определения следует, что всякий граф является подграфом самого себя.

Вернемся к рис. 1. Удалим из графа вершину 1. Вместе с ней удалятся и четыре ребра: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,7\}$. В результате получится подграф, изображенный на рис. 5.

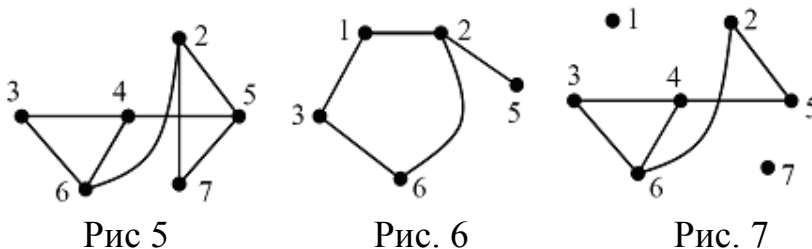


Рис 5

Рис. 6

Рис. 7

Удалим из графа (рис.1) вершины 4 и 7 (вершину 1 не удаляем). Получим подграф, приведенный на рис. 6.

Удалить из графа G можно и все вершины. Тогда от графа ничего не останется. Граф, не содержащий вершин, называется пустым графом. Пустой граф является подграфом любого графа.

Непустой подграф называется собственным, если он не совпадает с исходным графом G . Граф G и пустой граф называются несобственными подграфами (по аналогии с несобственными подмножествами).

Пусть дан граф G на n вершинах. Добавим к ним одну вершину и соединим ее произвольно с вершинами графа G . Новый граф с $n + 1$ вершинами называется надграфом графа G . Например, изображенный на рис. 1 граф является надграфом графа, приведенного на рис. 5.

По заданному графу подграф находится однозначно, то есть, удалив из графа одну или несколько вершин, получим единственный подграф. Обратная операция неоднозначна.

Если в графе G все вершины оставить на своих местах и удалить одно или несколько ребер, то получится частичный граф. Формально частичный граф определяется следующим образом. Пусть V и E – множества вершин и ребер исходного графа G . Граф G' называется частичным графом графа G , если $V' = V$ и $E' \subseteq E$. Согласно этому определению всякий граф является частичным по отношению к самому себе.

Из графа G можно удалить и все ребра. Тогда останется граф, состоящий только из изолированных вершин. Граф, в котором нет ни одного ребра, называется нуль-графом. Удалим из графа (рис. 1) ребра $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,7\}$, $\{2,7\}$, $\{5,7\}$. Тогда останется частичный граф (рис. 7). Его аналитическое представление имеет вид:

$$V' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = V;$$

$$E' = \{\{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}\} \subset E.$$

Упражнения

1. Определите число вершин и число ребер подграфа, построенного на основе графа G (рис.1) путем удаления из него: вершины 4; вершин 1, 5, 6.

2. Сколько различных подграфов можно получить на основе графа, изображенного на рис. 1.

3. Сколько собственных подграфов имеет граф, изображенный: на рис. 5? на рис. 7?

4. Сколько надграфов имеет граф, содержащий 7 вершин, если в каждом надграфе 8 вершин?

5. Граф содержит 5 вершин. К этому графу добавили 2 вершины. Получился надграф, содержащий 7 вершин. Сколько возможно таких надграфов?

6. Сколько частичных графов имеет граф: на рис. 1? на рис. 5? на рис. 7?

7. На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) является ли пустой граф частичным по отношению к графу, приведенному на рис. 6?

2) является ли нуль-граф, содержащий 7 вершин, частичным для графа на рис. 7?

3) является ли пустой граф подграфом нуль-графа?

4) является ли нуль-граф графа G на рис. 6 подграфом графа G ?

5) верно ли, что если подграф G' некоторого графа G содержит n вершин, то всякий частичный граф подграфа G' также содержит n вершин?

6) верно ли, что если частичный граф G' некоторого графа G содержит n ребер, то всякий подграф частичного графа G' также содержит n ребер?

7) верно ли, что нуль-граф является частичным графом любого графа?

8. Сколько существует частичных графов, которые можно получить на основе графа, приведенного на рис. 1, путем удаления из него: одного ребра? двух ребер? трех ребер?

9. В простом графе 10 ребер. Сколько существует частичных графов, содержащих не менее 7 ребер?

5.1.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины

Две вершины $v \in V$ и $w \in V$, где V – множество вершин графа G , называются смежными, если они соединены ребром. Например на рис. 7 смежными являются вершины 3 и 4, 3 и 6, 4 и 6 и др.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину. На рис. 7 смежными являются ребра $\{3,4\}$ и $\{3,6\}$, $\{4,5\}$ и $\{2,5\}$ и др.

Если вершина является концом ребра, то вершина и ребро называются инцидентными. На рис. 7 ребро $\{3,4\}$ инцидентно вершине 3. Оно инцидентно и вершине 4.

Число $\rho(v)$ ребер, инцидентных вершине v , называется степенью этой вершины v . Например, степень вершины 3 (рис. 7) равна 2, степень вершины 4 равна 3.

Степень изолированной вершины равна нулю. Степень изолированной вершины, содержащей одну петлю, равна 2.

Вершина, степень которой равна 1, называется висячей. На рис. 6 висячей является вершина 5.

Сумма степеней всех вершин графа есть четное число. Половина суммы степеней всех вершин равна числу всех ребер графа (любого, в том числе псевдографа и мультиграфа). Этим свойством можно пользоваться для определения числа ребер графа. Например, сумма степеней вершин графа, приведенного на рис. 7, равна:

$$\rho(1) + \rho(2) + \dots + \rho(7) = 0 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 0 = 12,$$

откуда следует, что в графе шесть ребер.

Вершина называется четной, если ее степень есть четное число. Вершина называется нечетной, если ее степень есть нечетное число.

В любом графе число нечетных вершин четно. Например, нечетными являются следующие вершины графа, приведенного на рис. 1: 3, 5, 6, 7, то есть всего нечетных вершин 4 (четное число).

Число четных вершин в графе может быть любым – как четным, так и нечетным. Например, на рис. 2 граф имеет четыре четные вершины: 1, 2, 3, 4, а на рис. 7 – пять четных вершин: 1, 2, 3, 5, 7.

Упражнения

1. Укажите номера всех пар вершин, являющихся смежными (рис. 1):

1) 1 и 2; 3) 3 и 4; 5) 1 и 7; 7) 6 и 7;

2) 1 и 5; 4) 3 и 5; 6) 2 и 7; 8) 2 и 1.

2. Укажите номера всех пар ребер, являющихся смежными (рис. 1):

1) {1, 4} и {2, 5}; 4) {1, 7} и {2, 7};

2) {3, 4} и {4, 5}; 5) {2, 6} и {5, 7};

3) {4, 6} и {2, 6}; 6) {2, 6} и {2, 5}.

3. Укажите номера вершин, инцидентных ребру {2, 6} (рис.7).

4. Укажите графы, имеющие висячие вершины (рис. 4).

5. Сумма степеней всех вершин некоторого графа равна 20. К этому графу добавили три ребра (число вершин не меняли). Чему равна сумма степеней всех вершин нового графа? Сколько в нем ребер?

6. Сколько четных и сколько нечетных вершин в графе, изображенном: на рис. 4, г? на рис. 4, д? на рис. 4, е? на рис. 3?

7. Сколько висячих вершин в каждом из графов а, б, в, г, д, е (рис. 4)?

8. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) существуют ли графы, в которых степень каждой вершины равна нулю?

2) можно ли построить граф, в котором число четных вершин нечетно?

3) существует ли граф, содержащий одну вершину и одно ребро?

4) существуют ли смежные вершины в нуль-графе?

5) верно ли что, если к каждому ребру графа на рис. 4, в добавить по одному кратному ребру, то степени всех вершин удвоятся?

6) можно ли построить граф, в котором одна нечетная вершина и три – четные?

5.1.5. Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа

Граф называется однородным, если степени всех его вершин равны между собой:

$$\rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(n),$$

где n – число вершин графа; $\rho(i)$ – степень i -й вершины графа ($i = 1, 2, \dots, n$).

Приведем примеры однородных графов, см. рис. 8.

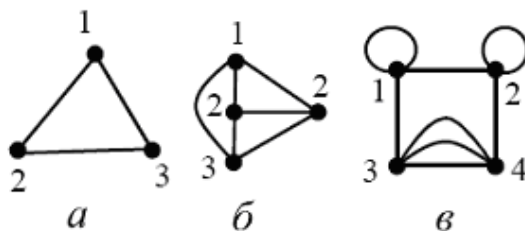


Рис. 8

Сумма степеней всех вершин однородного графа равна ρn , где ρ – степень вершины, n – число вершин. Таким образом, число ребер однородного графа равно:

$$K = \frac{\rho n}{2}.$$

Граф без петель называется полным, если каждая пара его вершин соединена одним ребром (рис. 9).

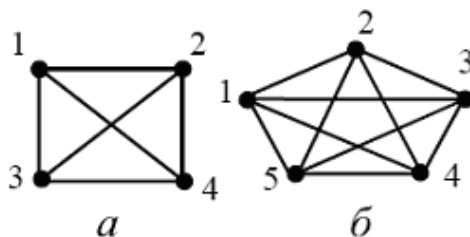


Рис. 9

Степень любой вершины полного графа равна $n-1$, где n – число его вершин, так как каждая вершина соединена ребрами с $n-1$ остальными вершинами графа. Отсюда следует, что число K ребер полного графа равно:

$$K = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Всякий полный граф является однородным.

Пусть дан неполный граф. Построим на его вершинах полный граф, а затем из полного графа удалим все те ребра, которые входят в заданный граф. Получится граф, являющийся дополнением заданного графа до полного.

Дополнение графа можно определить следующим образом. Пусть G – полный граф, E – множество ребер полного графа; G' – частичный граф полного графа, и пусть E' – множество ребер частичного графа G' , E'' – множество ребер полного графа, не входящих в множество E' , т. е.

$$E' \cup E'' = E; E' \cap E'' = \emptyset.$$

Тогда граф $\{V, E''\}$ называется дополнением графа G' до полного, где V – множество вершин графа G .

На рис. 10 пунктирными линиями показано дополнение графа G . На рис. 11 дополнение представлено отдельным графом.

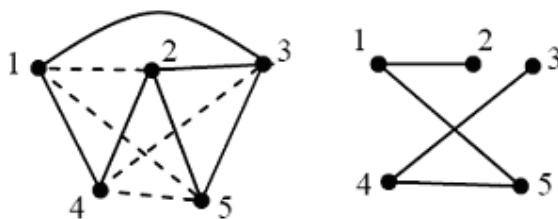


Рис. 10

Рис. 11

Дополнением полного графа на n вершинах является нуль-граф, то есть граф, состоящий из n изолированных вершин, а дополнением нуль-графа является полный граф.

Упражнения

1. Сколько ребер в однородном графе, если $n = 7$ и $\rho = 6$?
2. Найдите числа n и ρ однородного графа, если он содержит 19 ребер.

3. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Возможен ли однородный граф, в котором:

- 1) пять вершин и степень каждой вершины равна 3?
- 2) шесть вершин и степень каждой из них равна 4?
- 3) четыре вершины и шесть ребер?
- 4) пять вершин и шесть ребер?
- 5) семь вершин и степень каждой вершины равна 5?
- 6) шесть вершин и девять ребер?
- 7) восемь вершин и степень каждой из них равна 3?

4. В полном графе 18 вершин. Сколько в нем ребер, инцидентных одной вершине?

5. Сколько ребер имеет полный граф, если число его вершин равно 10?

6. Полный граф имеет 105 ребер. Найдите число его вершин.

7. Частичный граф полного графа, насчитывающего 12 вершин, имеет 54 ребра. Сколько ребер имеет дополнение частичного графа?

8. Из полного графа на 20 вершинах несколько вершин удалили. В оставшемся подграфе стало 66 ребер. Сколько вершин удалено? Сколько ребер удалено?

9. Степень вершины полного графа равна 7. Из графа удалили несколько ребер так, что степень каждой вершины получившегося частичного графа стала равной 5. Сколько ребер удалили? Сколько ребер осталось?

10. Найдите степень вершины полного графа, имеющего 91 ребро.

11. В однородном графе степень вершины равна 5. Число ребер равно 35. Найдите число вершин.

12. Каждую вершину полного графа G , имеющего 28 ребер, соединили ребром с каждой вершиной полного графа G' . Получился граф, насчитывающий 55 ребер. Сколько вершин в графе G' ? Сколько ребер соединяют вершины графа G с вершинами графа G' ?

5. 1.6. Объединение и пересечение графов

Объединением графов $G_1=\{V_1,E_1\}$ и $G_2=\{V_2,E_2\}$ называют граф $G=G_1 \cup G_2=\{V, E\}$, где $V=V_1 \cup V_2$; $E=E_1 \cup E_2$.

На рис. 12 приведен пример, иллюстрирующий операцию объединения графов.

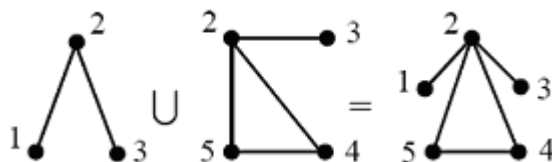


Рис. 12

Очевидно, что если $V_1=V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то $G=G_1 \cup G_2=G_2$ (рис. 13).

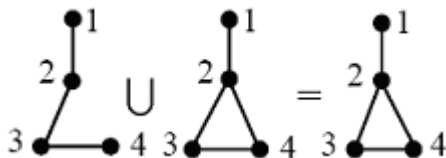


Рис. 13

Если же $V_1=V_2$ и $E_1=E_2$, то $G=G_1 \cup G_2=G_1=G_2$.

Пересечением двух графов G_1 и G_2 называется граф $G=\{V,E\}$, где $V=V_1 \cap V_2$; $E=E_1 \cap E_2$ (рис. 14).

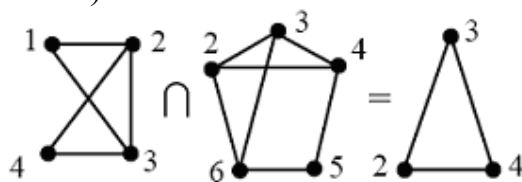


Рис. 14

Из определения следует, что $G=G_1 \cap G_2=\emptyset$, если $V_1 \cap V_2=\emptyset$, то есть если два графа не имеют одинаково обозначенных вершин, то их пересечение есть пустой граф (рис. 15).

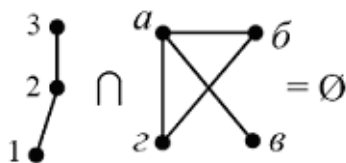


Рис. 15

Если же $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, а $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $G=G_1 \cap G_2$ есть нуль-граф, множество вершин которого равно $V_1 \cap V_2$ (рис. 16).

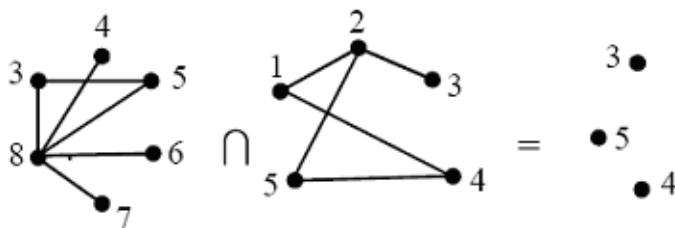


Рис. 16

Если $V_1=V_2$ и $E_1 \subset E_2$, то $G=G_1 \cap G_2=G_1$. Если же $V_1=V_2$ и $E_1=E_2$, то $G=G_1 \cap G_2=G_1=G_2$.

Упражнения

Графы G_1 , G_2 и G_3 представлены в виде:

$G_1 = \{V_1, E_1\}$, где $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
 $E_1 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}\}$;
 $G_2 = \{V_2, E_2\}$, где $V_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $E_2 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{6, 8\}\}$;
 $G_3 = \{V_3, E_3\}$, где $V_3 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $E_3 = \{\{3, 5\}, \{3, 6\}, \{3, 8\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{7, 9\}, \{8, 9\}\}$.

1. Найдите число вершин и число ребер графа:

$G = G_1 \cup G_2$; $G = G_1 \cup G_2 \cap G_3$;
 $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$; $G = (G_1 \cup G_2) \cap G_3$;
 $G = G_1 \cap G_2$; $G = G_1 \cap (G_2 \cup G_3)$.

2. Укажите вершины графа:

$G = G_1 \cup G_1 \cap G_2$;
 $G = G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cap G_3$;
 $G = G_1 \cap G_2 \cup G_1 \cap G_2 \cup G_2 \cap G_3$.

5.1.7. Матрицы смежности и инцидентности

Рассмотрим другой способ задания графов – матрица смежности. Матрица смежности представляет собой квадратную таблицу размерами $n \times n$, где n – число вершин графа. Строкам и колонкам матрицы ставятся в соответствие вершины, а на пересечениях строк и колонок записываются числа, показывающие, сколько ребер соединяют соответствующие вершины графа.

Разберем на примере построение матрицы смежности на рис. 17.

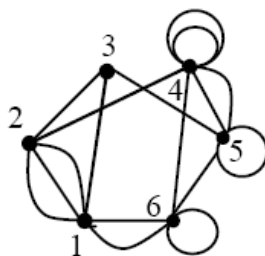


Рис. 17

В графе шесть вершин, следовательно, матрица смежности имеет шесть строк и шесть колонок (рис. 18).

	1	2	3	4	5	6
1	0	3	1	0	0	2
2	3	0	1	1	0	0
3	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	2	2	1
5	0	0	1	2	1	1
6	2	0	0	1	1	1

Рис. 18

В первой строке слева записан нуль. Это значит, что вершина 1 не имеет петли. Справа от нуля записано число 3. Оно говорит о том, что вершины 1 и 2 соединены тремя кратными ребрами и т. д.

При помощи матрицы смежности легко определить степень любой вершины. Для этого необходимо сложить все числа в соответствующей строке (или колонке) и добавить к результату число, находящееся на пересечении данной строки с главной диагональю. Например, степень вершины 4 равна $(1 + 2 + 2 + 1) + 2$, где выражение в скобках представляет собой сумму всех чисел четвертой строки, а последнее слагаемое – это диагональное число строки 4.

Если найти сумму всех чисел матрицы (вместе с диагональными), прибавить к ней сумму всех диагональных чисел и результат разделить на два, то получим число всех ребер графа. Например, для графа, изображенного на рис. 18, имеем: $(3+1+2+3+1+1+1+1+1+2+2+1+1+2+1+1+1)+2+1+1=34$, где в первом выражении, стоящее в скобках представлена сумма всех чисел матрицы, во втором – сумма диагональных чисел. Разделив число 34 на два, находим, что граф, изображенный матрицей (рис. 18), имеет 17 ребер.

Для построения матрицы смежности подграфа в исходной матрице достаточно удалить i -ю строку и i -й столбец ($i = 1, 2, \dots, n$; i – номер удаляемой вершины; n – число вершин графа). Например, если требуется найти матрицу смежности подграфа путем удаления вершины 1 (рис. 18), то, вычеркнув строку 1 и колонку 1, получим матрицу (рис. 20), граф которой приведен на рис. 19.

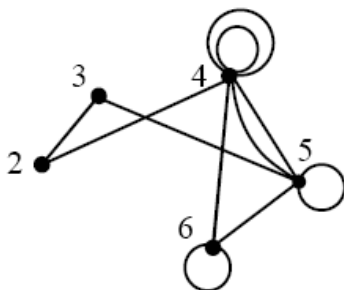


Рис. 19

	2	3	4	5	6
2	0	1	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	1	0	2	2	1
5	0	1	2	1	1
6	0	0	1	1	1

Рис. 20

По матрице смежности несложно определить, какой это граф – простой, мультиграф или псевдограф. Если в матрице кроме нулей и единиц нет никаких других чисел и всю главную диагональ занимают нули, то граф является простым. Если во всей главной диагонали записаны нули, а в других позициях матрицы встречаются числа, превосходящие единицу, то граф является мультиграфом. Если в главной диагонали имеются числа, не равные нулю, то граф содержит петли и, таким образом, является псевдографом.

На рис. 22 изображена матрица инцидентности для графа на рис. 21.

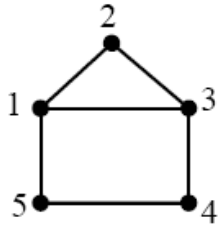


Рис. 21

	{1,2}	{1,3}	{1,5}	{2,3}	{3,4}	(4,5)
1	1	1	1	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	1	0	0	0	1	0

Рис. 22

В этой матрице для каждого ребра указаны инцидентные вершины. Строкам матрицы поставлены в соответствие номера вершин, колонкам – ребра графа. Вершина 1 инцидентна трем ребрам: {1,2}, {1,3}, {1,5}, поэтому на пересечении строки 1 с первыми тремя колонками записаны единицы. Подобным образом заполнены все остальные строки матрицы.

В графе могут быть кратные ребра и петли. В таких случаях в матрице инцидентностей необходимо предусматривать отдельные колонки для каждого ребра и для каждой петли. Например, в графе на рис. 23 всего десять ребер (вместе с петлями). В соответствии с этим матрица инцидентностей содержит десять колонок (рис. 24).

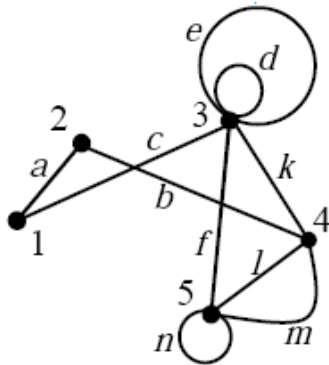


Рис. 23

	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	2	2	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0	1	1	2

Рис. 24

Петли в матрице удобно обозначать цифрой 2, так как при этом очень легко определяются степени вершин: для этого необходимо найти сумму всех чисел какой-либо строки. Эта сумма и будет равна степени соответствующей вершины. Например, степень вершины 3 (рис. 24) равна 7:

$$\rho_3 = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7.$$

Так же нетрудно найти матрицу инцидентности для дополнения заданного графа. Для этого достаточно построить матрицу, содержащую те же строки, а колонкам поставить в соответствие только те ребра, которые не входят в исходную матрицу, но входят в множество ребер полного графа (на тех же вершинах).

Представление графов в виде матриц инцидентности значительно упрощает выполнение операций над графами (например, пересечения и объединения).

В матрице смежности при наличии кратных ребер указывается только их количество, а сами ребра являются неразличимыми.

Упражнения

1. Укажите номера простых графов (рис. 25).
2. Укажите степени вершин графа 2 (рис. 25) в порядке их нумерации (сами вершины не указывать).
3. Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 4 (рис. 25).
4. Укажите номера псевдографов (рис. 25).
5. Укажите номера мультиграфов (рис. 25).
6. Укажите номера графов, являющихся частичными по отношению к графу 8 (рис. 25).

<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	1	0	1	1	2	0	1	1	1	3	1	1	1	0	4	1	1	0	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	0	0	0	2	2	0	0	3	0	3	0	3	0	0	4	2	0	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	1	0	0	0	2	0	2	0	0	3	0	0	2	0	4	0	0	0	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	0	1	1	1	2	1	0	1	1	3	1	1	0	1	4	1	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	0	1	0	1	2	1	0	1	0	3	0	1	0	1	4	1	0	1	0
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	1	0	1	1																																																																																																																													
2	0	1	1	1																																																																																																																													
3	1	1	1	0																																																																																																																													
4	1	1	0	1																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	0	0	0	2																																																																																																																													
2	0	0	3	0																																																																																																																													
3	0	3	0	0																																																																																																																													
4	2	0	0	0																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	1	0	0	0																																																																																																																													
2	0	2	0	0																																																																																																																													
3	0	0	2	0																																																																																																																													
4	0	0	0	1																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	0	1	1	1																																																																																																																													
2	1	0	1	1																																																																																																																													
3	1	1	0	1																																																																																																																													
4	1	1	1	0																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	0	1	0	1																																																																																																																													
2	1	0	1	0																																																																																																																													
3	0	1	0	1																																																																																																																													
4	1	0	1	0																																																																																																																													
1	2	3	4	5																																																																																																																													
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	0	1	1	0	2	1	0	0	1	3	1	0	0	1	4	0	1	1	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	3	1	0	0	0	4	0	1	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	3	1	1	1	1	4	1	1	1	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	1	0	1	0	2	0	1	0	1	3	1	0	1	0	4	0	1	0	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>		1	2	3	4	1	1	0	0	0	2	0	1	0	0	3	0	0	1	0	4	0	0	0	1
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	0	1	1	0																																																																																																																													
2	1	0	0	1																																																																																																																													
3	1	0	0	1																																																																																																																													
4	0	1	1	0																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	0	0	1	0																																																																																																																													
2	0	0	0	1																																																																																																																													
3	1	0	0	0																																																																																																																													
4	0	1	0	0																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	1	1	1	1																																																																																																																													
2	1	1	1	1																																																																																																																													
3	1	1	1	1																																																																																																																													
4	1	1	1	1																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	1	0	1	0																																																																																																																													
2	0	1	0	1																																																																																																																													
3	1	0	1	0																																																																																																																													
4	0	1	0	1																																																																																																																													
	1	2	3	4																																																																																																																													
1	1	0	0	0																																																																																																																													
2	0	1	0	0																																																																																																																													
3	0	0	1	0																																																																																																																													
4	0	0	0	1																																																																																																																													
6	7	8	9	10																																																																																																																													

Рис. 25

7. Укажите вершины, инцидентные ребру a (рис. 26).
8. Укажите номера вершин, содержащих петли (рис. 26).

	a	b	c	d	e	f	k	l	m	n
1	1				2				1	2
2		1								
3			1	2		1	1			
4		1	1				1	1	1	
5	1					1		1		

Рис. 26

9. Укажите номера вершин, степень которых нечетна (рис. 26).
10. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:
 - 1) может ли в какой-либо колонке матрицы инцидентности находиться только одна единица?

- 2) могут ли в матрице инцидентности содержаться колонки, в которых записано три единицы?
- 3) существуют ли матрицы инцидентности, все строки которых заполнены единицами (то есть нет ни одного нуля)?
- 4) могут ли в матрице инцидентности быть колонки, содержащие две цифры 2?
- 5) существуют ли матрицы инцидентности, в каждой строке которых содержится точно по одной единице?
- 6) существуют ли матрицы инцидентности, в каждой строке которых содержится точно по одной цифре 2?
- 7) существуют ли матрицы инцидентности, содержащие хотя бы одну колонку, в которой записана цифра 1 и цифра 2?

11. Укажите номера висячих вершин (рис. 26).

12. Сколько колонок в матрице инцидентности полного графа на десяти вершинах?

13. Сколько колонок содержит матрица инцидентности дополнения графа (рис. 22)?

п. 5.2. Связные графы

5.2.1. Маршруты, цепи, циклы

Пусть граф G содержит множество V вершин и множество E ребер. Маршрутом длины n называется непустая последовательность n ребер вида

$$v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \dots, v_n, e_n, v_{n+1}, \quad (1)$$

где ребро e_j ($j = 1, 2, \dots, n$) соединяет вершины v_j и v_{j+1} . В последовательности (1) одни и те же вершины могут повторяться. (вместо термина «маршрут» используется слово «путь».)

Примеры маршрутов (рис.1):

$$1 e_1 2 e_4 3 e_6 3 e_2 2 e_1 1; \quad (2)$$

$$2 e_2 3 e_3 2 e_4 3 e_7 4; \quad (3)$$

$$4 e_8 1 e_5 3 e_6 3 e_7 4 e_7 3$$

и т. д.

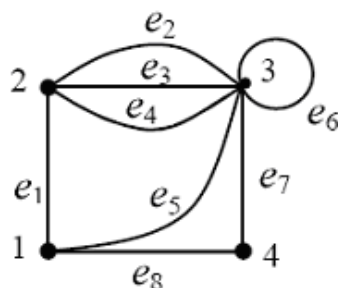


Рис. 1

В каждой из этих последовательностей вершины обозначены цифрами, ребра – буквой e с числовыми индексами.

Маршрут называется цепью, если в нем нет повторяющихся ребер. Примером может служить маршрут (3).

Цепь называется простой, если в ней нет повторяющихся вершин (лишь первая и последняя вершины могут совпадать). Примеры простой цепи (рис. 1):

$$1 e_5 3 e_4 2; 2 e_2 3 e_7 4 e_8 1.$$

Маршруты, цепи и простые цепи могут быть замкнутыми и разомкнутыми. В замкнутых маршрутах (а также цепях и простых цепях) начальная и конечная вершины совпадают, в разомкнутых — не совпадают. Примером замкнутого маршрута является (2).

Замкнутая цепь называется циклом. Пример (рис. 1):

$$2 e_2 3 e_7 4 e_8 1 e_5 3 e_4 2.$$

Простая замкнутая цепь называется простым циклом. Примеры простых циклов (рис.1):

$$2 e_2 3 e_5 1 e_1 2; 3 e_2 2 e_3 3; 3 e_6 3.$$

В случае простых графов (не содержащих петель и кратных ребер) для обозначения маршрутов, цепей и циклов можно использовать только номера вершин.

Такое представление маршрутов называется вершинным. Поясним это на примере при помощи графа (рис. 2).

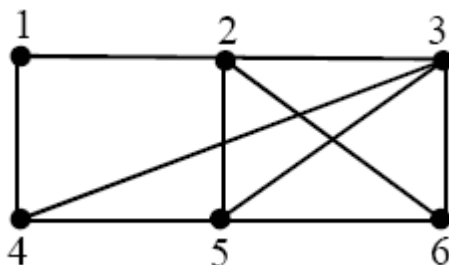


Рис. 2

Маршрут: 1, 2, 6, 3, 6, 5; цепь: 2, 3, 6, 5, 2, 1, 4; цикл: 6, 3, 4, 1, 2, 3, 5, 6; простая цепь: 1, 2, 3, 5, 6; простой цикл: 2, 3, 5, 6, 2.

Число ребер, входящих в цепь, называется длиной цепи или расстоянием между соответствующими вершинами. Например, цепь 1, 2, 3, 5, 6 (рис. 2) содержит четыре ребра, следовательно, расстояние между вершинами 1 и 6, а также длина цепи равны 4.

В любой простой цепи, заданной последовательностью вершин (вершинное представление цепи), число вершин на единицу больше числа ребер.

Упражнения

1. В нижеприведенном списке укажите (рис. 1): маршруты; циклы; замкнутые маршруты; простые цепи; цепи; простые циклы.

- 1) $2 e_3 3$; 4) $3 e_7 4 e_8$; 7) $e_4 3 e_7 2 e_4$;
 2) $1 e_8 4 e_8 1$; 5) $3 e_6 3$; 8) $1 e_5 3 e_7 4$;
 3) $2 e_2 3 e_6 3$; 6) $2 e_4 3 e_2 2$; 9) $1 e_5 3 e_7 4 e_8 1$.

2. В списке, приведенном в упражнении 1, укажите: последовательности, не являющиеся маршрутами; простые цепи длины 1; цепи длины 2; простой цикл наибольшей длины. Укажите длину этого цикла.

3. В нижеприведенном списке укажите (рис. 2): маршруты; циклы; замкнутые маршруты; простые цепи; простые циклы; цепи.

- | | | |
|----------------------|----------------|-------------------------|
| 1) 3, 4, 5, 3, 6, 3; | 4) 2, 6; | 7) 2, 3, 6, 2, 3, 6, 2; |
| 2) 1, 2, 3, 4, 1; | 5) 3, 5, 4, 3; | 8) 3, 3; |
| 3) 5; | 6) 2, 6, 2; | 9) 3, 4, 5, 2, 3. |

4. На какие вопросы Вы ответите «да»?

- 1) может ли последовательность, обозначающая маршрут, начинаться номером ребра и оканчиваться номером вершины?
- 2) может ли цепь состоять из одного ребра (и двух вершин)?
- 3) может ли простой граф содержать цикл, состоящий из одного ребра?
- 4) существуют ли маршруты в нуль-графе, множество вершин которого не является синглетоном?
- 5) верно ли, что если граф содержит одну вершину и не является нуль-графом, то он содержит цикл?
- 6) верно ли, что если простой граф состоит из двух вершин и не является нуль-графом, то в нем нет циклов?
- 7) могут ли в цикле повторяться вершины?
- 8) верно ли, что если в графе нет циклов, то в нем число ребер равно числу вершин?

5.2.2. Связность графа

Две вершины v и w графа называются связными, если существует соединяющая их цепь. Если же в графе нет ни одной цепи, соединяющей вершины v и w , то вершины v и w являются несвязными. Например, вершины 1 и 5 (рис. 3) связны, так как их соединяет цепь $1,7,6,5$ (а также $1,7,2,5$; $1,7,6,2,5$ и $1,7,2,6,5$), а вершины 2 и 3 связными не являются, так как ни одна цепь их не соединяет.

Граф называется связным, если каждые две его вершины связны. Если же в графе имеется хотя бы одна пара вершин, не соединенных цепью, то граф называется несвязным. Таким образом, граф, изображенный на рис. 2, является связным, а граф, приведенный на рис. 3, – несвязным.

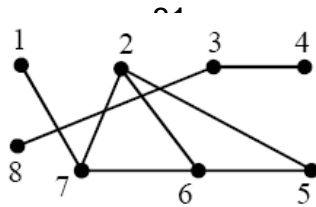


Рис. 3

Отношение связности вершин v и w является рефлексивным (всякая вершина, имеющая петлю, связна сама с собой), симметричным (если вершины v и w связны, то связны и вершины w и v), транзитивным (если вершины v и w связны и связны вершины w и t , то связны и вершины v и t), следовательно, множество связных вершин образует класс эквивалентности. Классы эквивалентности, из которых состоит несвязный граф, называются его компонентами.

Число компонент, из которых состоит граф, называется степенью связности. Граф, представленный на рис. 3, имеет степень связности, равную 2. Степень связности графа, приведенного на рис. 4, равна 5.

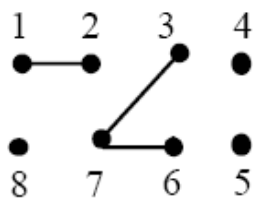


Рис. 4

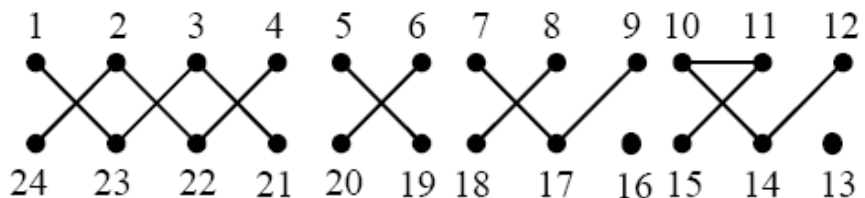


Рис. 5

Упражнения

1. Укажите степень связности графа (рис. 5).
2. Определите степень связности подграфа, построенного на основе рис. 3 путем удаления из графа вершин 3 и 7; путем удаления из него вершин 2, 3, 6, 7.

3. Ниже дан список графов, заданных множествами их ребер. Каждый граф содержит 6 вершин. Укажите номера графов: трехкомпонентных; четырехкомпонентных.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $\{\{1,2\}, \{2,6\}, \{3,4\}\}$; | 5) $\{\{1,2\}, \{2,5\}, \{3,6\}\}$; |
| 2) $\{\{1,5\}, \{3,5\}\}$; | 6) $\{\{2,3\}, \{5,6\}\}$; |
| 3) $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{5,6\}\}$; | 7) $\{\{1,2\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$; |
| 4) $\{\{1,6\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$; | 8) $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$. |

4. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) может ли нуль-граф быть однокомпонентным?
- 2) может ли граф быть однокомпонентным, если в нем 10 вершин и 8 ребер?
- 3) верно ли, что граф на n вершинах, не содержащий ни одного ребра, имеет степень связности, равную n ?
- 4) относится ли пустой граф к однокомпонентным?
- 5) относится ли пустой граф к многокомпонентным?

6) может ли граф, содержащий n вершин и n ребер, иметь степень связности, равную n ?

7) В графе 20 ребер. Степень каждой вершины равна 2. Может ли граф иметь степень связности, равную 15?

5. В графе 20 вершин. Степень каждой вершины равна 1. Сколько в графе компонент? Сколько ребер?

5.2.3. Пути и циклы Эйлера

Пусть $G = G(V, E)$ – граф. Цикл, который включает все ребра и вершины графа G , называется эйлеровым циклом, замкнутой эйлеровой цепью.

Если это условие выполняется, говорят, что граф G имеет эйлеров цикл. Граф, содержащий эйлеров цикл, получил название эйлерова графа. Если граф содержит разомкнутую цепь, содержащую все ребра этого графа, то такой граф называется полуэйлеровым.

Приведем несколько теорем об эйлеровых графах.

Теорема 1. Граф с более чем одной вершиной имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и каждая его вершина имеет четную степень.

Построим граф по рис. 6.

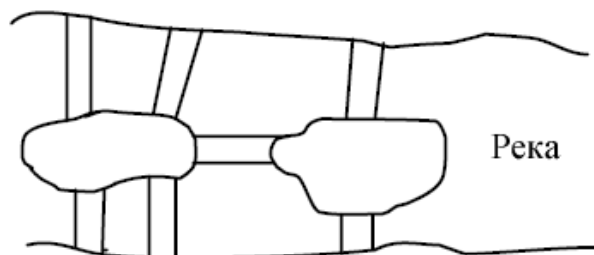


Рис. 6

В результате получим рис. 7.

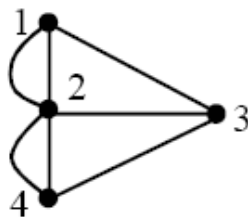


Рис. 7

Вершины 1 и 4 этого графа обозначают берега, вершины 2 и 3 – острова на реке, а ребра – мосты. Степени всех вершин графа нечетны, следовательно, в графе нет эйлерова цикла и нет эйлеровой цепи.

На рис. 8 приведен граф, в котором степени всех вершин четны. Обход его ребер можно начать с любой вершины. Обозначим ребра буквами $a, b, c, d, e, f, k, m, n$.

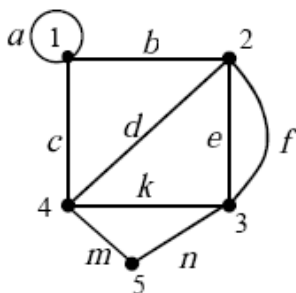


Рис. 8

Тогда примером эйлерового цикла может служить следующая последовательность ребер и вершин:

$$4, c, 1, a, 1, b, 2, f, 3, n, 5, m, 4, k, 3, e, 2, d, 4. \quad (1)$$

Теорема 2. Если в связном графе две вершины нечетны, а все остальные – четны, то этот граф содержит эйлерову разомкнутую цепь.

Если на рис. 8 удалить вершину 5, то получится подграф, в котором вершины 3 и 4 являются нечетными, а вершины 1 и 2 – четными. Примером эйлеровой цепи в подграфе может служить следующая последовательность вершин и ребер:

$$4, c, 1, a, 1, b, 2, d, 4, k, 3, e, 2, f, 3. \quad (2)$$

Любую линию, которую можно провести, проходя по заданным участкам точно по одному разу, называют уникарсальной. При рассмотрении эйлеровых графов можно отметить, что провести уникарсальную линию означает пройти по всем ребрам графа по одному разу, не отрывая карандаш от бумаги. Например, последовательность (1) представляет собой замкнутую уникарсальную линию, а примером разомкнутой уникарсальной линии является последовательность (2). Отметим, что разомкнутая уникарсальная линия всегда начинается с нечетной вершины и заканчивается в другой нечетной вершине. Если же начать обход полуэйлерового графа с четной вершины, то уникарсальную линию, ни замкнутую, ни разомкнутую, построить не получится.

Эйлеровы графы иногда называют уникарсальными.

Теорема 3. Если в связном графе G содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых эйлеровых цепей, в совокупности содержащих все ребра графа G точно по одному разу.

На основании понятия уникарсальной линии, эту теорему можно сформулировать следующим образом: если в связном графе содержится $2k$ нечетных вершин, то в нем имеется k разомкнутых уникарсальных линий. Чтобы

изобразить такой граф, карандаш придется оторвать от бумаги не менее $k - 1$ раз. Например, граф на рис. 2 содержит четыре нечетные вершины, следовательно, $k = 2$. При его изображении карандаш от бумаги придется оторвать один раз. Если начать с вершины 1, то получим две уникарсальные линии: 1,3,4,2,1,2,4 и 2,3.

Теорема 4. В любом связном графе можно построить замкнутый маршрут, проходящий через каждое ребро точно два раза.

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно каждое ребро графа заменить двумя параллельными ребрами и считать, что маршрут проходит по каждому ребру точно один раз. Тогда все вершины станут четными. Согласно теореме 1 в таком графе всегда существует эйлеров цикл.

Из теоремы 4 следует, что любой граф можно изобразить, не отрывая карандаш от бумаги и проходя по каждому ребру не более двух раз. Например, граф, приведенный на рис. 7, можно изобразить в виде последовательности вершин так: 1,2,4,2,1,3,2,3,4, откуда следует, что два раза карандаш прошел только по ребру {2,3}.

Упражнения

1. Укажите номера графов на рис. 9, содержащих эйлеров цикл (замкнутую уникурсальную линию).

2. Укажите номера графов на рис. 9, содержащих разомкнутую уникурсальную линию.

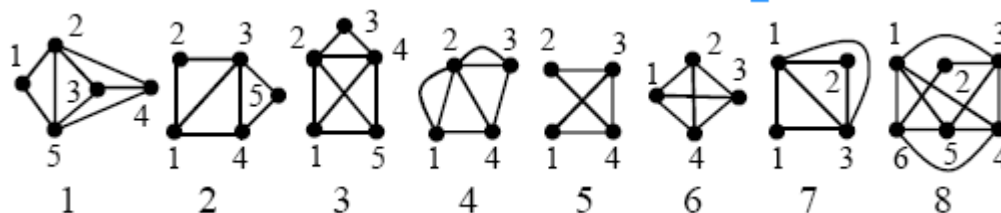


Рис. 9

3. Укажите номера вершин, с которых следует начать обход ребер графа (рис. 10), чтобы получить разомкнутую уникурсальную линию.

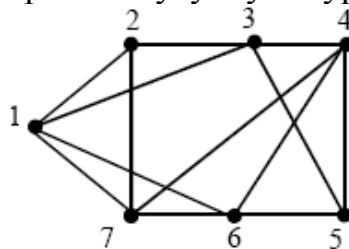


Рис. 10

4. Укажите номера вершин на графе 3 (рис.9), которые не могут быть началом (и концом) разомкнутой уникурсальной линии.

5. Укажите номера вершин, с которых можно начать обход графа 8 (рис. 9),

чтобы получить замкнутую уникурсальную линию (номера вершин упорядочить по возрастанию).

6. На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) верно ли, что в эйлеровой цепи каждая вершина встречается точно один раз?

- 2) верно ли, что всякая эйлерова цепь проходит через все вершины связного графа?
- 3) существует ли эйлерова цепь (замкнутая или разомкнутая) в связном графе, содержащем одну нечетную вершину?
- 4) верно ли, что во всяком эйлеровом графе существует единственная последовательность ребер и вершин, образующая эйлеров цикл?
- 5) верно ли, что в эйлеровом графе уникальная линия может начинаться с любой вершины?
- 6) верно ли, что всякая эйлерова цепь является простой цепью?
- 7) может ли связный граф быть полуэйлеровым, если он содержит точно одну четную вершину?

7. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) верно ли, что разомкнутая эйлерова цепь в простом графе может начинаться с любой вершины?
- 2) верно ли, что в любом полном графе на n вершинах имеется эйлеров цикл, если n – нечетно?
- 3) верно ли, что в полном графе на n вершинах степень каждой вершины равна $n - 1$?
- 4) существует ли цикл в однородном графе, содержащем 33 нечетные вершины?
- 5) в простом графе n вершин, среди которых 5 вершин являются четными. Возможна ли эйлерова разомкнутая цепь при $n = 100$?
- 6) можно ли изобразить связный граф, отрывая карандаш от бумаги не более 35 раз, если в нем 35 вершин, среди которых 20 вершин являются четными?
- 7) существует ли замкнутая уникальная линия в полном графе на n вершинах при условии, что n – нечетное число?

5.2.4. Гамильтоновы графы

Ирландский математик, Гамильтон Уильям Роуэн (1805–1865), в 1859 г. придумал игру - головоломку под названием «путешествие по додекаэдру». Додекаэдр – это объемная фигура, многогранник, в котором все грани являются правильными пятиугольниками. В додекаэдре 12 граней, 20 вершин и 30 ребер. Каждой вершине Гамильтон поставил в соответствие название одного из крупных по тем временам городов: Брюссель, Дели, Франкфурт и т. д. Задача состояла в том, чтобы, переходя по ребрам из города в город, обойти все города, побывав в каждом из них точно по одному разу, и вернуться в исходный город. Во все вершины додекаэдра были вбиты гвозди, благодаря чему каждый путь можно было обозначать ниткой, протягиваемой от вершины к вершине. Как игра головоломка оказалась довольно скучной, поэтому широкого распространения не получила даже после того, как Гамильтон громоздкий додекаэдр заменил соответствующим графом (рис.11). Но математики головоломкой заинтересовались и в память о ней всякий цикл, содержащий по одному разу каждую вершину графа, стали называть гамильтоно-

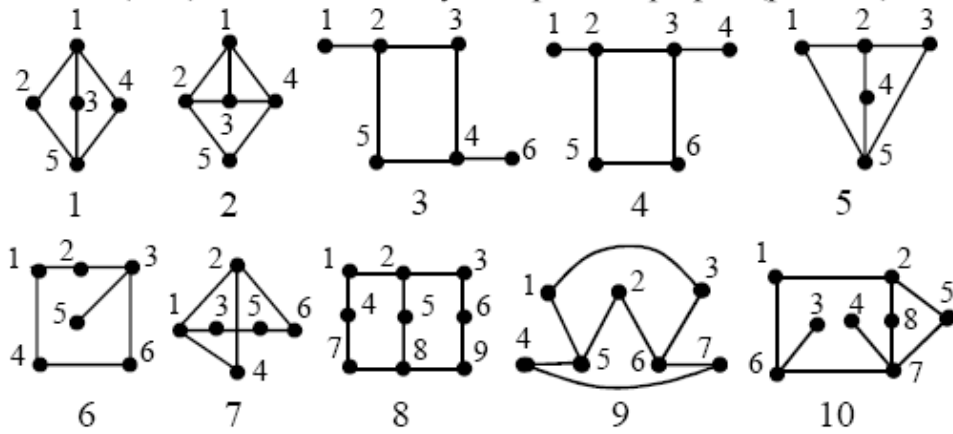
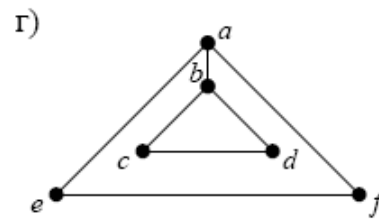
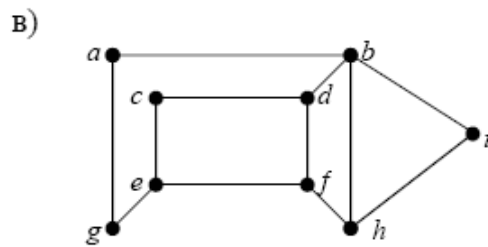
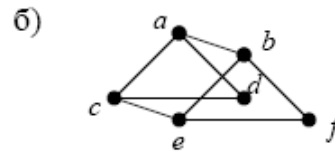
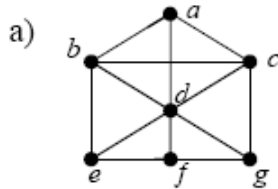


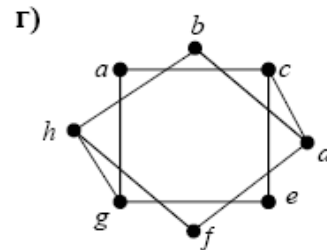
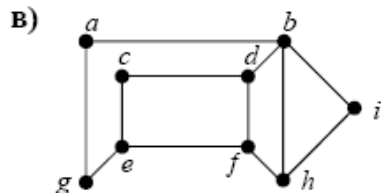
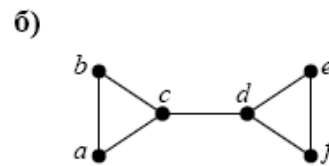
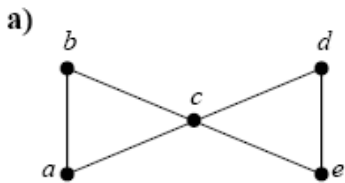
Рис. 14

3. Найдите гамильтонов цикл, если он существует, для каждого из приведенных ниже графов:

1)



2)



п.5.3. Планарные и плоские графы

5.3.1. Вводные понятия

Плоским называется граф, изображенный на плоскости так, что его ребра пересекаются только в вершинах. Граф на рис. 1, является плоским, а тот же граф на рис. 2 плоским не является, так как его ребра $\{1,3\}$ и $\{2,4\}$ пересекаются не только в вершинах.

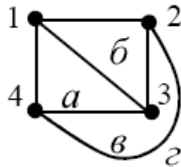


Рис. 1

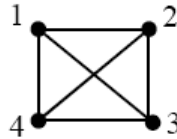


Рис. 2

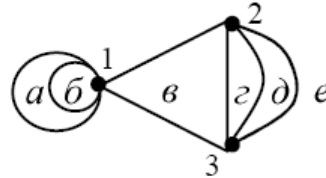


Рис. 3

Граф называется планарным, если у него есть плоское изображение. Пример планарного графа приведен на рис. 2. Любой плоский граф является планарным.

Часть плоскости, ограниченная со всех сторон ребрами и не содержащая внутри себя ни вершин, ни ребер, называется гранью. Граф, приведенный на рис. 1, имеет четыре грани: три внутренних – а, б, в, и одну внешнюю (бесконечную), обозначенную буквой г. Бесконечную грань имеет любой плоский граф.

Любая петля в графе образует отдельную грань. Два кратных ребра также ограничивают отдельную грань. Например, граф на рис. 3 содержит шесть граней, из которых грани а и б образованы петлями, а г и д – кратными ребрами.

Упражнения

1. Укажите номера плоских графов (рис.4).

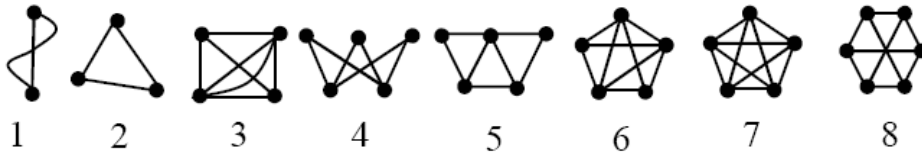


Рис. 4

2. Укажите планарные графы (рис. 4).
3. Сколько граней имеет граф 1? граф 3? граф 4? (рис. 4).
4. Укажите эйлеровы графы (рис. 4).
5. Укажите полуэйлеровы графы (рис. 4).

5.3.2. Деревья и лес

Термин «дерево» ввел в 1857 г. английский математик Артур Кэли (1821–1895). Несвязный граф, не содержащий циклов, называется лесом. Связный граф, не содержащий циклов, называется деревом. На рис. 5 приведен трехкомпонентный лес.

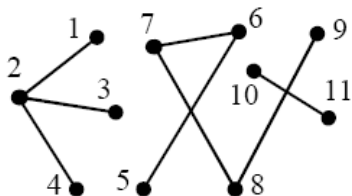


Рис. 5

Первую компоненту образует дерево с вершинами 1,2,3,4, вторую – 5,6,7,8,9, третью – 10,11.

Приведем без доказательств несколько теорем о деревьях.

Теорема 1. Всякое дерево содержит $n - 1$ ребер, где n – число вершин.

Теорема 2. Всякий лес содержит $n - k$ ребер, где k – число компонент связности.

Теорема 3. Любые две вершины дерева соединены точно одной простой цепью.

Теорема 4. Если в дереве любые две вершины соединить ребром, то в графе появится один цикл.

Если связный граф содержит цикл, то после удаления любого ребра, входящего в цикл, этот цикл разрушается, но связность графа сохраняется. Применим операцию разрушения циклов к каждому циклу графа. Тогда в графе не останется циклов и получится связный частичный граф, являющийся деревом. Полученное дерево называется остовом (ударение на первый слог), т. е. остовом называется связный частичный граф данного связного графа G , содержащий все вершины графа G , но не содержащий циклов. Рассмотрим, например, граф, изображенный на рис. 6.

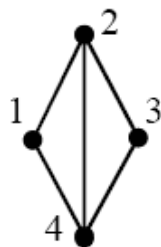


Рис. 6

Удалим из него ребра $\{1,4\}$ и $\{3,4\}$. Получим остов, приведенный на рис. 7.

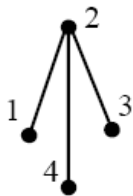


Рис. 7

Если удалить ребра $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$, то получим другой остов (рис. 8), и т. д.

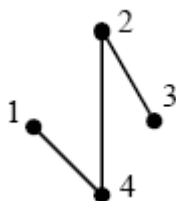


Рис. 8

Наименьшее число z , показывающее, сколько ребер необходимо удалить из графа, чтобы получить его остов, называется цикломатическим числом. Если n – число вершин, m – число ребер, k – число компонент, то $z = m - n + k$,

то есть, чтобы найти цикломатическое число графа, необходимо из числа ребер вычесть число вершин и к результату прибавить число компонент.

В случае связного графа $k = 1$, следовательно, $z = m - n + 1$.

Например, для графа, приведенного на рис. 6, имеем:

$$m = 5; n = 4; z = 5 - 4 + 1 = 2.$$

Упражнения

1. В дереве 25 вершин. К нему добавили 4 ребра. Сколько ребер стало в графе?

2. В связном графе 20 вершин и 40 ребер. Сколько ребер необходимо удалить, чтобы получить остов?

3. В дереве 20 вершин. Сколькими способами в дерево можно ввести цикл при помощи одного дополнительного ребра?

4. В нуль-графе 38 вершин. Сколько ребер необходимо в него ввести, чтобы получить связный граф?

5. Сколько ребер необходимо удалить из дерева, содержащего 20 ребер, чтобы получился лес из 15 деревьев?

6. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да». Верно ли, что:

1) всякое дерево является планарным графом?

- 2) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для непланарных графов?
- 3) формула для нахождения цикломатического числа справедлива и для псевдографов?
- 4) одновершинный граф с одной петлей является деревом?
- 5) изолированная вершина может быть компонентой леса?
- 6) граф, в котором число ребер равно числу вершин, может быть деревом?

5.3.3. Кодирование деревьев

Пусть даны n вершин графа, пронумерованных в некоторой последовательности. Сколько существует различных деревьев, которые могут быть изображены на этих n вершинах? Ответ на данный вопрос дал английский математик Артур Кэли (1821 – 1895). Он нашел формулу вида:

$$t = n^{n-2},$$

где t – число всех возможных помеченных деревьев (напомним, что в помеченных графах все вершины пронумерованы и последовательность номеров является неизменной при любых вариантах соединения вершин ребрами). Если $n = 2$, то согласно формуле А. Кэли существует одно дерево в виде пары вершин, соединенных одним ребром. При $n = 3$ существует три помеченных дерева (рис. 9).

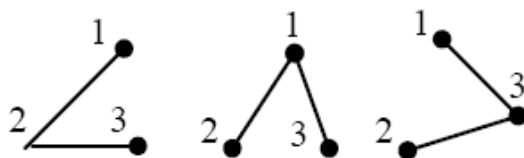


Рис. 9

При $n = 4$ число помеченных деревьев равно 16 (рис. 10) и т. д.

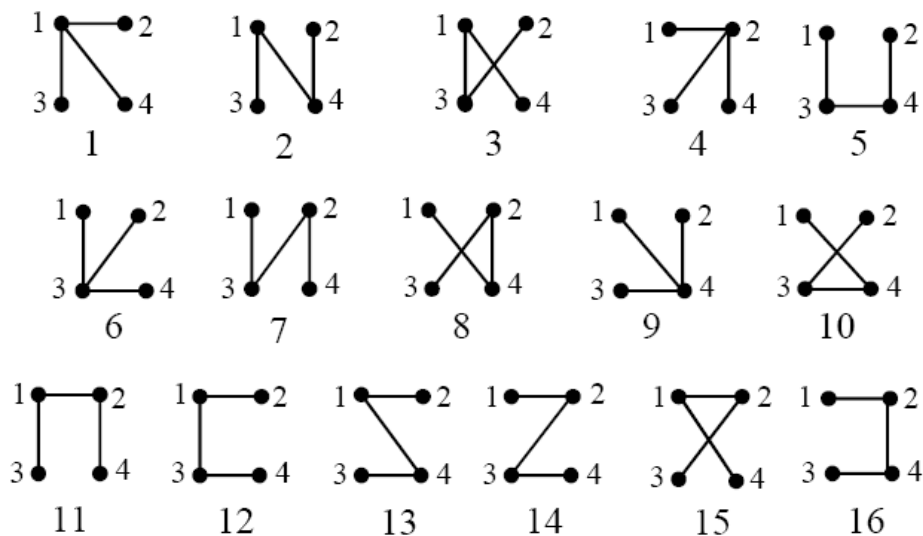


Рис. 10

Немецкий математик Пруфер разработал метод, позволяющий для любого дерева на n вершинах однозначно найти его код в виде упорядоченной последовательности чисел $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, где a_1, a_2, \dots, a_{n-2} — числа, принадлежащие множеству $\{1, 2, \dots, n\}$.

Процесс нахождения кода дерева рассмотрим на примере графа, изображенного на рис. 11.

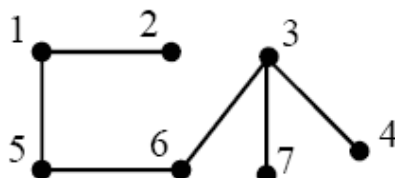


Рис. 11

В этом графе три висячих вершины: 2, 4, 7. Удалим из графа висячую вершину (вместе с ребром), имеющую наименьший номер. Это вершина 2. Номер вершины, инцидентной удаленному ребру, есть первое число искомого кода: число 1.

В оставшемся графе висячими являются вершины 1, 4, 7. Удалим вершину 1 (имеющую наименьший номер). Число 5 записываем в искомый код после числа 1. Теперь висячими оказались вершины 4, 5, 7. Удаляем вершину 4. Число 3 — это третий знак в коде. Получилось дерево с висячими вершинами 5 и 7. Удаляем вершину 5 и число 6 записываем в искомый код четвертым знаком. Пятым знаком записываем число 3. Осталось дерево, состоящее из двух вершин. На этом кодирование заканчивается. Найденный код имеет вид: 1 5 3 6 3.

Упражнения

1. Укажите коды деревьев (рис. 10):
1,2,3,4; 5,6,7,8; 9,10,11,12; 13,14,15,16.
2. Найдите код дерева (рис. 12).
3. Найдите код дерева (рис. 13).
4. Определите число вершин дерева и число его ребер, если код дерева задан семейством: (1,2,3,4); (1,1,1,2,2); (1,1,1,1,2).

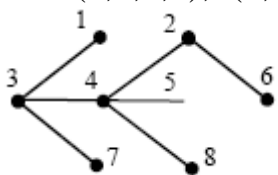


Рис. 12

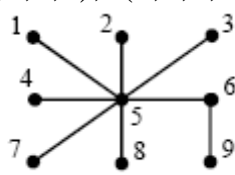


Рис. 13

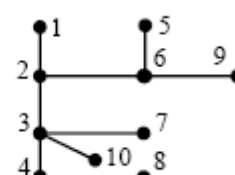


Рис. 14

5. По коду дерева найдите номера висячих вершин:
(1,4,3,3,3,5); (1,5,5,5,6,6);
(2,2,2,2,3,4,5); (6,6,6,1,1,4).

Найдите код дерева (рис. 14).

6. Укажите степени вершин дерева (номера вершин упорядочить по возрастанию), если его код имеет вид:

$$(2,6,3,4,3,6,2,3); (1,4,11,1,1,4,2,2,11);$$

$$(4,4,2,5,5,3,6); (1,4,1,4,6,6,6,6).$$

7. Укажите номера вершин дерева, степени которых равны двум, если дерево задано кодом:

$$(2,1,5,1,4,7,8); (5,6,5,4,3,4,8);$$

$$(3,5,6,4,7,7); (2,6,5,2,3,4,4).$$

8. Укажите номера вершин дерева, степени которых равны трем, если дерево задано кодом:

$$(5,8,6,6,3,5,3,3); (2,3,1,4,4,1,2,6,6);$$

$$(2,2,2,1,3,1,9,9); (2,2,1,1,6,6,1,7,7).$$

9. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) можно ли по коду дерева найти номера его вершин?
- 2) верно ли, что если к дереву добавить ребро, то получится граф, содержащий цикл?
- 3) верно ли, что если из дерева удалить одно ребро, то получится двухкомпонентный граф?
- 4) всякое ли дерево является планарным графом?
- 5) существуют ли деревья, у которых все вершины являются висячими?

п. 5.4. ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ГРАФЫ

5.4.1. Понятие орграфа. Матрица смежности

Во многих случаях необходимы графы, у которых ребра представляют собой улицу с односторонним движением. Это означает, что если рассматривается ребро, выходящее из вершины a в вершину b , то его нельзя рассматривать выходящим из вершины b в вершину a . Например, если граф моделирует поток нефти в трубопроводе, и если нефть течет из пункта a в пункт b , то не хотелось бы, чтобы поток был и в обратном направлении, из пункта b в пункт a .

Пусть V – множество вершин графа. Его квадратом является множество Z упорядоченных пар (v,w) , где $v,w \in V$. Каждой паре (v,w) соответствует ориентированное ребро в виде линии, оканчивающейся стрелкой. Ориентированные ребра принято называть дугами. Началом дуги является вершина $v \in V$, концом – вершина $w \in V$. Граф, содержащий только дуги, называется ориентированным графом или орграфом.

Аналитически орграф можно представить множествами V и F (если нет кратных дуг), где V – множество вершин и $F \subseteq V^2$.

Например, для графа на рис. 1 имеем:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$F = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4), (4,2), (4,4), (4,5)\}.$$

На рис. 1 вершины обозначены незакрашенными кружками.

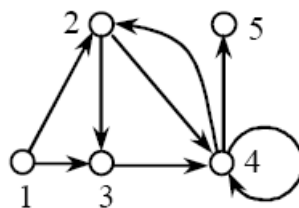


Рис. 1

Заменяем в орграфе все дуги ребрами, получим граф, который называется основанием данного орграфа.

Любой орграф может быть представлен матрицей смежности. Будем считать, что первым элементом пар, обозначающих дуги, соответствуют строки матрицы, вторым элементом – колонки. На рис. 2 приведена матрица смежности, построенная для графа, изображенного на рис. 1.

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0
4	0	1	0	1	1
5	0	0	0	0	0

Рис. 2

Орграф может содержать и кратные дуги. Пример такого графа приведен на рис. 3. Его матрица смежности изображена на рис. 4.

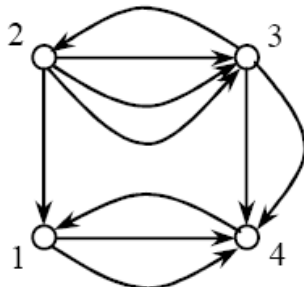


Рис. 3

	1	2	3	4
1	0	0	0	2
2	1	0	3	0
3	0	1	0	2
4	1	0	0	0

Рис. 4

Любой неориентированный граф может быть представлен в виде орграфа. Для этого достаточно все его ребра заменить парами встречных дуг. Если в орграфе две вершины соединены парой встречных дуг, то пару можно заменить одним неориентированным ребром. Граф, содержащий дуги и неориентированные ребра, называется смешанным графом.

Упражнения

1. Укажите номера вопросов, на которые Вы ответите «да»:

1) являются ли кратными две дуги, соединяющие две вершины, но направленные встречно?

2) является ли нуль-граф на пяти вершинах частичным по отношению к орграфу, приведенному на рис. 1?

3) могут ли ориентированный и неориентированный графы иметь одну и ту же матрицу смежности?

4) может ли основание орграфа содержать кратные ребра, если в орграфе нет кратных дуг?

2. Сколько ребер имеет основание орграфа, приведенного на рис. 3?

3. На рис. 5 изображены восемь матриц смежности, каждая из которых задает некоторый орграф на четырех вершинах.

	1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4	
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0
3	1	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	2	3	0	0	2	0	0
4	0	0	0	2	4	0	1	1	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
	1					2					3					4				
	1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4		1	2	3	4	
1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
2	1	0	0	0	2	1	0	0	0	2	0	0	1	0	2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	0	3	0	1	0	0	3	0	0	2	1	3	1	0	0	1	0
4	0	0	1	0	4	0	0	1	0	4	0	0	0	0	4	1	0	0	0	0
	5					6					7					8				

Рис. 5

Укажите:

- а) несвязные орграфы;
- б) орграфы, содержащие петли;
- в) орграфы, содержащие кратные дуги;
- г) орграфы, основания которых – полные графы.

5.4.2. Степень вершины орграфа

В орграфах при определении степени его вершин необходимо учитывать, сколько дуг входит в каждую вершину и сколько – выходит. Степень входа вершины равна числу входящих в нее дуг. Степень выхода вершины равна числу выходящих из нее дуг.

Вместо терминов «степень входа вершины» и «степень выхода вершины» используются словосочетания: «отрицательная степень вершины» и «положительная степень вершины». Применен термин: «полустепень захода» и «полустепень исхода» и используются обозначения соответственно: $id(v)$ и $od(v)$.

Для графа, приведенного на рис. 3, имеем:

$$\rho(1)_{\text{вх}} = 2; ; \rho(1)_{\text{вых}} = 2; ; \rho(2)_{\text{вх}} = 1; \rho(2)_{\text{вых}} = 4;$$

$$\rho(3)_{\text{вх}} = 3; \rho(3)_{\text{вых}} = 3; \rho(4)_{\text{вх}} = 4; \rho(4)_{\text{вых}} = 1.$$

Если в орграфе n вершин, то число K его дуг равно:

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вх}} + \sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вых}}}{2}. \quad (1)$$

Например, в ориентированном графе (рис. 3) число дуг равно:

$$K = \frac{2+1+3+4+2+4+3+1}{2} = 10.$$

Степени входа и выхода орграфа обладают следующим свойством: сумма степеней входа всех вершин равна сумме степеней выхода всех вершин, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вх}} = \sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вых}}.$$

Следовательно, формулу (1) можно упростить:

$$K = \sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вх}} \text{ либо } K = \sum_{i=1}^n \rho(i)_{\text{вых}}.$$

Если ориентированный граф на n вершинах представлен матрицей смежности, то степень выхода i -й вершины равна сумме всех чисел i -й строки матрицы. Степень входа i -й вершины равна сумме чисел i -й колонки матрицы ($i = 1, 2, \dots, n$).

Упражнения

1. Определите степень входа каждой из вершин графа на рис. 1.
2. Определите степень выхода каждой из вершин графа на рис. 2.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	
1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	
2	1	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	
3	1	0	0	0	3	1	0	0	0	0	2	0	0	2	0	
4	0	0	0	2	4	0	1	1	0	4	0	0	0	0	0	
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0	0	2	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	2	1	0	0	0	2	0	0	1	0	1	1
3	0	0	0	0	3	0	1	0	0	3	0	0	2	1	1	0
4	0	0	1	0	4	0	0	1	0	4	0	0	0	0	0	0
	5	6	7	8												

Рис. 6

3. Орграфы на рис. 5 заданы матрицами смежности. Укажите номера графов (т. е. матриц):

- содержащих хотя бы одну вершину со степенью входа, равной трем;
- содержащих хотя бы одну вершину со степенью выхода, равной трем;
- в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень входа, равную единице;
- в которых каждая из вершин 1 и 2 имеет степень выхода, равную единице.

5.4.3. Маршруты, цепи, циклы в орграфах

Маршруты, цепи и циклы в орграфах определяются так же, как и в случае неориентированных графов, но с учетом того, что движение возможно лишь в направлении стрелок. Например, последовательность вершин 1,3,2,4 (рис. 1) маршрутом не является, поскольку движение от вершины 3 к вершине 2 осуществлено навстречу стрелке. Примеры «правильных» маршрутов (рис. 1): 1,2,3,4,2; 1,3,4,2,4,5; 1,3,4,2,3,4 и др. В связи с этим в орграфах существует понятие достижимости. Вершина v_2 называется достижимой из вершины v_1 , если существует маршрут, ведущий из вершины v_1 к вершине v_2 .

Если в маршруте нет повторяющихся дуг, то маршрут называется ориентированной цепью. Если в ориентированной цепи нет повторяющихся вершин, то такая цепь называется простой ориентированной цепью. Простая ориентированная цепь может быть замкнутой и разомкнутой. Замкнутая простая ориентированная цепь называется простым ориентированным циклом.

Чтобы найти все простые ориентированные цепи, соединяющие две заданные вершины, можно воспользоваться методом, рассмотренным в пункте 2.3 (нахождение простых цепей), но с соблюдением условия: не двигаться навстречу стрелкам. Для примера найдем все простые цепи, соединяющие вершины 1 и 7 в орграфе на рис. 7.

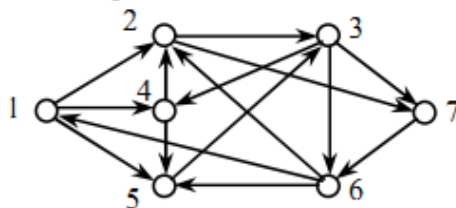


Рис. 7

Из вершины 1 выходят три дуги: (1,2), (1,4) и (1,5). Дугу, входящую в вершину 1, не учитываем. На втором этапе продолжаем движение из вершин 2, 4, 5. В результате получим двухзвенные (по две дуги) простые цепи: 1,2,3; 1,2,7; 1,4,2; 1,4,5; 1,5,3. Одна из них – цепь 1,2,7 – является искомой. Остальные имеют продолжение. После завершения всех этапов получаем девять простых цепей:

1,2,7; 1,2,3,7; 1,4,2,7; 1,5,3,7; 1,4,2,3,7; 1,4,5,3,7; 1,5,3,4,2,7;
1,5,3,6,2,7; 1,4,5,3,6,2,7.

Аналогичным образом можно найти циклы, начинающиеся, например, в вершине 1 и в ней же заканчивающиеся. После первого этапа имеем: 1,2; 1,4; 1,5. После второго: 1,2,3; 1,2,7; 1,4,2; 1,4,5; 1,5,3. После третьего: 1,2,3,4; 1,2,3,6; 1,2,3,7; 1,2,7,6; 1,4,2,3; 1,4,2,7; 1,4,5,3; 1,5,3,4; 1,5,3,6; 1,5,3,7 и т. д.

После четвертого этапа получаем три искомого цикла: 1,2,3,6,1; 1,2,7,6,1; 1,5,3,6,1. После пятого: 1,2,3,7,6,1; 1,4,2,3,6,1; 1,4,2,7,6,1; 1,4,5,3,6,1; 1,5,3,7,6,1.

После шестого: 1,4,2,3,7,6,1; 1,4,5,3,7,6,1. После седьмого находим самый длинный цикл: 1,5,3,4,2,7,6,1. Всего получили 11 циклов.

Упражнения

1. На рис. 8 изображен связный орграф, содержащий шесть вершин.

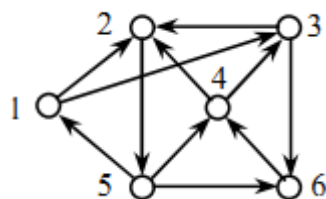


Рис. 8

Пусть начальной является вершина 1, конечной – вершина 6.

1) Сколько существует простых цепей, ведущих от вершины 1 к вершине 6?
 2) Сколько среди них цепей, содержащих по три вершины? по четыре вершины? по пять вершин? По шесть вершин 2.

2. Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф на рис. 8, если каждый цикл начинается и заканчивается в вершине 1?

3. Укажите последовательность вершин, образующих самый длинный цикл (рис. 8). Начинается цикл с вершины 1 и заканчивается также вершиной 1.

4. Сколько простых ориентированных циклов содержит орграф (рис. 8), если каждый цикл начинается с вершины 2 и заканчивается в этой же вершине 2? Сколько среди них циклов, содержащих по две дуги? по три дуги? по четыре дуги? по пять дуг? Укажите номера вершин самого длинного цикла, в котором началом и концом является вершина 2.

5.4.4. Связность орграфа. Эйлеровы цепи и циклы в орграфе

Орграф на n вершинах называется сильно связным, если существует простая ориентированная цепь, соединяющая любые две вершины v_i и v_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Примером является орграф, приведенный на рис. 9.

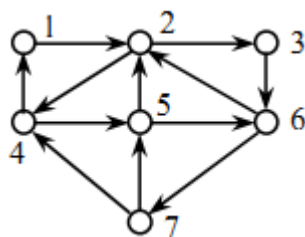


Рис. 9

В этом орграфе имеется всего 49 упорядоченных пар вершин: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) и т. д. Для каждой из этих пар существует по крайней мере одна простая цепь. Например, для пары (1,1) имеем 1,2,4,1 (а также 1,2,3,6,7,4,1). Вершины 2 и 1 соединены короткой цепью 2,4,1 и более длинной – 2,3,6,7,4,1. Вершина 3 соединена с вершиной 2 четырьмя простыми цепями: 3,6,2, 3,6,7,5,2, 3,6,7,4,5,2, 3,6,7,4,1,2 и т. д.

Орграф называется слабо связным, если его основанием является связный граф. Орграф называется несвязным, если число компонент его основания превышает единицу.

Ориентированная замкнутая цепь называется эйлеровой, если она содержит все дуги графа (эйлеров цикл). Если ориентированная разомкнутая цепь содержит все дуги графа, то такая цепь называется полуэйлеровой.

Теорема. Орграф содержит замкнутую эйлерову цепь тогда и только тогда, когда он является слабо связным и когда каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода.

Пример, иллюстрирующий теорему, приведен на рис. 10.

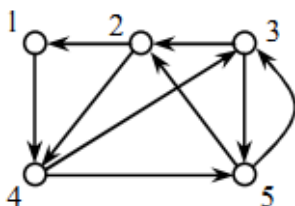


Рис. 10

Замкнутая цепь, содержащая все дуги графа, имеет вид 1,4,5,3,5,2,4,3,2,1 либо 1,4,3,2,4,5,3,5,2,1 и др.

Следствие из теоремы: ориентированный граф содержит разомкнутую эйлерову цепь, если одновременно выполняются следующие условия:

- орграф является слабо связным;
- в орграфе существует одна вершина, степень выхода которой на единицу больше степени входа;
- в орграфе существует одна вершина, степень входа которой на единицу больше степени выхода;
- степень входа каждой из остальных вершин равна степени выхода.

На рис. 11 приведен орграф, для которого:

$$\begin{aligned} \rho(1)_{\text{вых}} - \rho(1)_{\text{вх}} &= 1; & \rho(2)_{\text{вх}} - \rho(2)_{\text{вых}} &= 1; \\ \rho(3)_{\text{вх}} = \rho(3)_{\text{вых}} &= 2; & \rho(4)_{\text{вх}} = \rho(4)_{\text{вых}} &= 2; \\ \rho(5)_{\text{вх}} = \rho(5)_{\text{вых}} &= 2; & \rho(6)_{\text{вх}} = \rho(6)_{\text{вых}} &= 2, \end{aligned}$$

следовательно, орграф является полуэйлеровым. Пример полуэйлеровой цепи: 1,5,3,2,5,4,6,3,4,6,1,2.

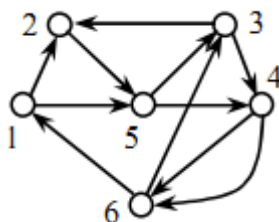


Рис. 11

Упражнения

1. Укажите слабо связанные орграфы (рис. 12).

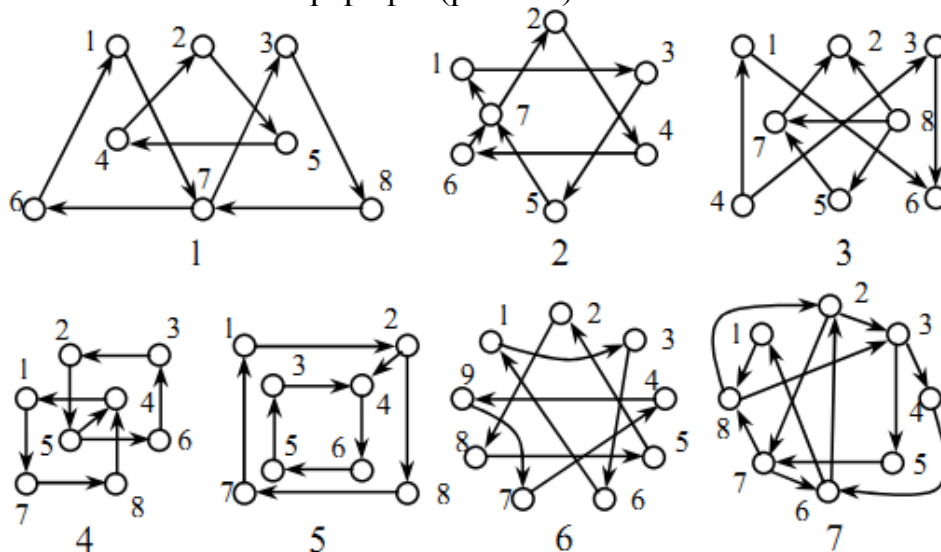


Рис. 12

2. Укажите сильно связанные орграфы (рис. 12).

3. Укажите несвязные орграфы (рис. 12).

4. Укажите число компонент связности каждого из графов на рис. 12.

5. Укажите полуэйлеровы орграфы (рис. 12).

6. Укажите эйлеровы орграфы (рис. 12).

7. На какие вопросы Вы ответите «да»:

1) существуют ли сильно связанные орграфы на двух вершинах?

2) существуют ли сильно связанные орграфы, не являющиеся слабо связными?

3) верно ли, что всякая полуэйлерова цепь является простой цепью в орграфе?

4) существуют ли слабо связанные орграфы, являющиеся и сильно связными?

5) верно ли, что всякий эйлеров цикл является простым циклом в орграфе?

6) существуют ли орграфы, в которых сумма степеней входа всех вершин на 2 больше суммы степеней выхода всех вершин?

7) является ли сильно связным орграф, состоящий из одной вершины и одной петли?

8. Сумма степеней входа всех вершин орграфа равна 19. Определите число дуг в орграфе. Определите сумму степеней выхода всех вершин в орграфе.

5.4.5. Полный орграф

Орграф называется полным, если его основание есть полный граф. Полный орграф называют также турниром. (иногда вместо термина «ориентированный полный граф» используется словосочетание «направленный полный граф».)

2. Сколько турниров можно построить на основе орграфа, содержащего 10 вершин и 36 дуг, путем дополнения его до полного, если ориентация всех 36 дуг исходного орграфа в каждом турнире является неизменной?

3. Укажите номера вершин в графе на рис. 14, последовательность которых образует гамильтонов цикл, если начальной является вершина 1.

4. Определите сумму степеней выхода всех вершин турнира на десяти вершинах.

5. На какие вопросы Вы ответите «да»:

- 1) верно ли, что существуют эйлеровы турниры на шести вершинах?
- 2) верно ли, что существуют турниры на девяти вершинах, содержащие эйлеров цикл?
- 3) является ли гамильтоновым граф на рис. 14?
- 4) существуют ли полные орграфы, не являющиеся сильно связными?
- 5) всякий ли турнир является слабо связным орграфом?
- 6) существуют ли полные орграфы, у которых каждая вершина имеет степень входа, равную степени выхода?
- 7) существуют ли турниры, содержащие 66 дуг?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березина Л.Ю. Графы и их применение. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с.
2. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. — М.: Наука, 1965. — 128 с.
3. Виленкин Н.Я. Математика. — М.: Просвещение, 1977. — 352 с.
4. Горский Д.П. Краткий словарь по логике / Д.П. Горский, А.А. Ивин, А.Л. Никифоров — М.: Просвещение, 1991. — 208 с.
5. Горбатов В.А. Основы дискретной математики.—М.: Высшая школа, 1986. — 311 с.
6. Гаврилов Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко. — М.: Наука, 1977. — 368 с.
7. Давыдов Э.П. Игры. Графы. Ресурсы. —М.: Радио и связь, 1981.—113 с.
8. Кондаков Н.И. Логический словарь-справочник.—М.: Наука, 1975.— 720 с.
9. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. —М.: Наука, 1971. — 320с.
10. Никольская И.Л. Математическая логика. — М.: Высшая школа, 1981. — 127 с.
11. Нефедов В.Н. Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.
12. Оре О. Графы и их применение. — М.: Мир, 1965. —174 с.
13. Пухначев Ю. В. Математика без формул / Ю.В. Пухначев, Ю.П. Попов. — М.: Знание, 1979. — 160 с.
14. Савин А.П. Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1989. — 352 с.
15. Смыслова З.А. Математическая логика и ее приложения. — Томск: Томская гос. академия сист. упр. и радиоэлектроники, 1994. — 111 с.
16. Столл Роберт Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. — М.: Просвещение, 1968. — 230 с.
17. Уилсон Р. Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977. —207 с.
18. Фор Р. Современная математика / Р. Фор, А. Кофман, М. Дени-Папен. — М.: Мир, 1966. — 271 с.
19. Харари Ф. Перечисление графов / Ф. Харари, Э. Палмер. — М.: Мир, 1977. — 324 с.
20. Харитонова Е.В. Графы и сети: Учебное пособие / Е.В. Харитонова. — Ульяновск: УлГТУ, 2006. — 92 с.
21. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. Ч. 1: Теория множеств. Булева алгебра (Автоматизированная технология обучения «Символ»): Учебное пособие. — Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. — 118 с.
22. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. Ч. 2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов (для автоматизированной технологии обучения «Символ»): Учебное пособие. — Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2003. — 130 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава 1. Элементы теории множеств	3
1.1. Множества	4
Упражнения	6
1.2. Подмножества	7
Упражнения	7
1.3. Диаграммы Венна. Универсальное множество	8
Упражнения	9
1.4. Операции над множествами	9
Упражнения	12
1.5. Дополнение множеств	13
Упражнения	14
1.6. Законы де Моргана	14
Упражнения	15
1.7. Разность множеств	16
Упражнения	17
1.8. Симметрическая разность множеств	17
Упражнения	19
1.9. Закон поглощения	19
Упражнения	20
1.10. Закон склеивания	21
Упражнения	22
Глава 2. Бинарные отношения	23
2.1. Декартово произведение множеств	23
Упражнения	25
2.2. Понятие бинарного отношения	25
Упражнения	27
2.3. Симметрия отношений	28
Упражнения	28
2.4. Транзитивность отношений	29
Упражнения	30
2.5. Рефлексивность отношений	30
Упражнения	31
2.6. Отношения эквивалентности	32
Упражнения	32
2.7. Отношения строгого порядка	33
Упражнения	33
2.8. Отношения нестрогого порядка	34
Упражнения	34
Глава 3. Элементы математической логики	35
Введение	35
3.1. Высказывание. Элементарные и составные высказывания	36

Упражнения	37
3.2. Логические операции	38
3.2.1. Отрицание высказываний	38
Упражнения	39
3.2.2. Конъюнкция высказываний	39
3.2.3. Дизъюнкция высказываний	40
3.2.4. Импликация высказываний	41
3.2.5. Эквиваленция высказываний	42
Упражнения	44
3.3. Алгебра логики	45
3.3.1. Основные символы алгебры высказываний	45
3.3.2. Формулы алгебры высказываний	45
Упражнения	48
Глава 4. Элементы комбинаторики	49
Введение	49
4.1. Основные формулы комбинаторики	49
4.1.1. Понятие факториала	49
Упражнения	50
4.1.2. Правило произведения в комбинаторике	50
Упражнения	51
4.1.3. Правило суммы в комбинаторике	52
Упражнения	53
4.1.4. Перестановки без повторений	53
Упражнения	54
4.1.5. Перестановки с повторениями	54
Упражнения	55
4.1.6. Размещения без повторений	56
Упражнения	57
4.1.7. Размещения с повторениями	57
Упражнения	58
4.1.8. Сочетания без повторений	58
Упражнения	60
4.1.9. Сочетания с повторениями	60
Упражнения	62
4.2. Упражнения по всему курсу комбинаторики	62
Глава 5. Элементы теории графов	64
Введение	64
5.1. Основные понятия	65
5.1.1. Граф	65
5.1.2. Псевдограф. Мультиграф	66
Упражнения	67
5.1.3. Подграф. Надграф. Частичный граф	67
Упражнения	68
5.1.4. Смежность. Инцидентность. Степень вершины	69
Упражнения	69

5.1.5. Однородный граф. Полный граф. Дополнение графа	70
Упражнения	71
5.1.6. Объединение и пересечение графов	72
Упражнения	73
5.1.7. Матрицы смежности и инцидентности	74
Упражнения	77
5.2. Связные графы	78
5.2.1. Маршруты, цепи, циклы	78
Упражнения	79
5.2.2. Связность графа	80
Упражнения	81
5.2.3. Пути и циклы Эйлера. Уникурсальная линия	82
Упражнения	84
5.2.4. Гамильтоновы графы	85
Упражнения	86
5.3. Планарные и плоские графы	88
5.3.1. Вводные понятия	88
Упражнения	88
5.3.2. Деревья и лес	89
Упражнения	90
5.3.3. Кодирование деревьев	91
Упражнения	92
5.4. Ориентированные графы	93
5.4.1. Понятие орграфа. Матрица смежности	93
Упражнения	94
5.4.2. Степень вершины орграфа	95
Упражнения	96
5.4.3. Маршруты, цепи, циклы в орграфах	97
Упражнения	98
5.4.4. Связность орграфа. Эйлеровы цепи и циклы в орграфе	98
Упражнения	100
5.4.5. Полный орграф	100
Упражнения	101
Список литературы	103
Содержание	104

А.М. Емельянов, Е.А. Подолько,
З.И. Каньшина, И.А. Скабелкина,

ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.

Подписано к печати 16.06.2014 г. Формат 60×90/16.

Уч.-изд.л. – 4,9. Усл.-п.л. – 6,8.

Тираж 100 экз. Заказ 183.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86

