МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДАЛЬНЕВОСТОЧНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

З.И. Каньшина, Н.П. Кидяева

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

**Учебное пособие по дисциплине
«Математический анализ»**

**Благовещенск
Издательство ДальГАУ
2014**

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171

Неопределенный интеграл: учебное пособие по дисциплине «Математический анализ». – Благовещенск: ДальГАУ, 2014. – 55 с.

Составители: Каньшина З.И., доцент кафедры высшей математики;
Кидяева Н.П., ст. преподаватель кафедры высшей математики

Пособие составлено в соответствии с требованиями федеральных государственных стандартов высшего профессионального образования по направлениям бакалавриата. В пособии подобраны и методически распределены задачи по интегрированию. В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач. В конце пособия представлен справочный материал из курса средней школы. В пособии имеются задания для контрольной работы, которые можно использовать и для типового расчета.

Пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения. Может быть использовано студентами для проведения самостоятельных работ.

Рецензент – Л.В. Козлова, канд.техн.наук, заведующая кафедрой общетехнических дисциплин факультета механизации сельского хозяйства ДальГАУ

Рекомендовано к печати методическим советом технологического факультета ДальГАУ (Протокол №10 от 25 июня 2014 года).

Издательство ДальГАУ

2014

Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Определение. Функция **F(x)** называется **первообразной** функцией для функции f(x) на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Например, $F(x)=\frac{x^4}{4}$ является первообразной для функции $f(x)=x^3$,

$\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}4x^3=x^3$

Определение. Совокупность всех первообразных для функции f(x) на промежутке X называется **неопределенным интегралом** от функции f(x) и обозначается $\int f(x)dx,$ где $\int$ - знак интеграла, f(x) — подынтегральная функция, f(x)dx — подынтегральное выражение. Таким образом,

$$\int f(x)dx=F(x)+c, \qquad (1.1)$$

где F(x) — некоторая первообразная для f(x), c — произвольная постоянная.

Например, поскольку $\frac{x^4}{4}$ - первообразная для функции $f(x)=x^3$, то $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+c$

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется интегрированием этой функции.

1.1 Свойства неопределенного интеграла

Таблица интегралов

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е.*

$$(\int f(x)dx)' = f(x) \qquad (1.2)$$

2. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.*

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

(1.3)

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.*

$$\int dF(x) = F(x) + c$$

(1.4)

где с — произвольное число.

4. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла,*

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx,$$

(1.5)

где с — некоторое число.

5. *Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т.е.* $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

(1.6)

Нетрудно видеть, что свойство (1.6) остается справедливым для любого конечного числа слагаемых.

Перечислим интегралы от элементарных функций, которые в дальнейшем мы будем называть табличными:

$$\int 0dx = c, \qquad (1.7)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1, \qquad (1.8)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, \qquad (1.9)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, a > 0, a \neq 1, \qquad (1.10)$$

$$\int e^x dx = e^x + c, \qquad (1.11)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \qquad (1.12)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \qquad (1.13)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c, -a < x < a, a > 0, \qquad (1.14)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + c, a \neq 0, \qquad (1.15)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c, a \neq 0, \qquad (1.16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c, a \neq 0, \qquad (1.17)$$

Пример 1.1.

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^5}$; б) $\int \sqrt[4]{x}dx$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. Во всех трех случаях нам придется воспользоваться одним и тем же табличным интегралом (1.8) от степенной функции, но при разных значениях n.

а)При n=5: $\int x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$

б) При n=1/4: $\int x^{1/4}dx = \frac{x^{5/4}}{5/4} + c = \frac{4}{5}x^{5/4} + c.$

в) При n=-1/2: $\int x^{-1/2}dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c.$

Пример 1. 2.

Найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{4^x}$; б) $\int 2^{4x-1}dx;$ в) $\int \frac{dx}{9x^2-1};$ г) $\int \frac{dx}{4x^2+25};$ д) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}.$

Решение. а) Учитывая, что $\frac{1}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ и используя (1.10) при a=1/4, получаем:

$$\int \frac{dx}{4^x} = \int \left(\frac{1}{4}\right)^x dx = \frac{(1/4)^x}{\ln(1/4)} + c = -\frac{1}{4^x \ln 4} + c.$$

б) Так как $2^{4x-1} = 2^{4x} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2}16^x$, то используя (1.5) и (1.10) при a=8, получаем

$$\int 2^{4x-1}dx = \int \frac{1}{2}16^x dx = \frac{1}{2}\int 16^x dx = \frac{1}{2}\frac{16^x}{\ln 16} + c.$$

в) Поскольку $\frac{1}{9x^2-1} = \frac{1}{9}\frac{1}{(x^2-(1/3))^2}$, то воспользуемся (1.5) и (1.16) при a=1/3:

$$\int \frac{dx}{9x^2-1} = \int \frac{1}{9}\frac{dx}{(x^2-(1/3))^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2-(1/3)^2} = \frac{1}{9}\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1/3}{x+1/3}\right| + c = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3x-1}{3x+1}\right| + c$$

г) Так как $4x^2 + 25 = 4(x^2 + (5/2)^2)$, то используя (1.5) и (1.14) при a=5/2, получаем

$$\int \frac{dx}{4x^2+25} = \int \frac{1}{4}\frac{dx}{x^2+(5/2)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+(5/2)^2} = \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + c.$$

д) Так как $\sqrt{4x^2+1}=2\sqrt{x^2+1/4}$, то (см 1.5) и (1.16) при а=1/4:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1/4}}=\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+1/4}\right|+c.$$

Метод интегрирования, основанный на применении свойств (1.5) и (1.6) называется **методом разложения**.

Пример 1.3.

Используя метод разложения, найти интегралы:

а) $\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx;$ б) $\int\frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx;$

в) $\int(\sin(x/2)+\cos(x/2))^2dx;$ г) $\int\frac{x^2}{x^2+4}dx.$

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задачах а) и б) воспользуемся соответствующими формулами сокращенного умножения и последующим почленным делением числителя на знаменатель: а)

$$\int\frac{(2\sqrt{x}+1)^3}{x\sqrt{x}}dx=\int\frac{8x^{3/2}+12x+6x^{1/2}+1}{x^{3/2}}dx=\int(8+12x^{-1/2}+6\frac{1}{x}+x^{-3/2})dx=$$

$$=8\int dx+12\int x^{-1/2}dx+6\int\frac{dx}{x}+\int x^{-3/2}dx=8x+24\sqrt{x}+6\ln|x|-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$$

(см. табличные интегралы (1.8) и (1.9)). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную С, не вписывая постоянных от интегрирования отдельных слагаемых. В дальнейшем мы будем опускать при записи постоянные от интегрирования отдельных слагаемых до тех пор, пока выражение содержит хотя бы один неопределенный интеграл. В окончательном ответе тогда будет одна постоянная.

б) $\int\frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+4)}{\sqrt{x}+2}dx=\int(x^{3/2}+4x^{1/2}-2x-8)dx=$

$$=\int x^{3/2}dx+4\int x^{1/2}dx-2\int xdx-8\int dx=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{8}{3}x^{3/2}-x^2-8x+c=$$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{8}{3}\sqrt{x^3}-x^2-8x+c$$

в) Преобразуя подынтегральную функцию, получим

$$\int(\sin(x/2)+\cos(x/2))^2\,dx=$$

$$\int(\sin^2(x/2)+2\sin(x/2)\cos(x/2)+\cos^2(x/2))dx=$$

$$\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x dx=x-\cos x+c$$

(см. табличный интеграл (1.11)).

г) Выделяя из дроби целую часть, получим

$\frac{x^2}{x^2+4}=\frac{(x^2+4)-4}{x^2+4}=1-\frac{4}{x^2+4}$. Тогда

$\int\frac{x^2}{x^2+4}dx=\int dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=x-4\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+c=x-2arctg\frac{x}{2}+c$ (см. (1.14)).

Упражнения

1. В следующих равенствах заполнить пропущенные места по соображению:

1) d( ) = $\int 2xdx$**;**

2) d( ) = $\int\cos xdx$**;**

3) d( ) = $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$**;**

4) d( ) = $\int x^3dx$**;**

5) d( ) = $\int\frac{dx}{x}$**;**

6) d( ) = $\int\frac{dx}{1+x^2}$**.**

Найти затем интегралы $\int 2xdx$**,** $\int x^3dx$ и т.д.

2.Найти интегралы:

1) $\int\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)dx$**;**

2) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx;$

3.

1) $\int\frac{x-2}{x^3}dx$**;**

2) $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx;$

4.

1) $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$**;** **2)** $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$**.**

5.

1) $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}{x}dx$; **2)** $\int\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$**.**

6.

1) $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$**;** **2)** $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x^3}}\right)dx$**.**

7.

1) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$**;** **2)** $\int ctg^2 xdx$**.**

8.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$**;** **2)** $\int\frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2}dx$**.**

9.

1) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$**;** **2)** $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$**.**

10.

1) $\int\left(\frac{2}{1+x^3}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$**;** **2)** $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$**.**

Домашнее задание

11.

1) $\int\frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}dx$**;** **2)** $\int\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)dx$**.**

12.

1) $\int\frac{x-2}{\sqrt{x^3}}dx$**;** **2)** $\int\frac{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}{x^2}dx$**.**

13.

1) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$; **2)** $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$.

14.

1) $\int e^x\left(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$; **2)** $\int a^x\left(1+\frac{a^{-x}}{x^5}\right)dx$.

15.

1) $\int\frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; **2)** $\int tg^2 xdx$.

§2 Замена переменных в неопределенном интеграле

Одним и основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (или *метод подстановки*), описываемой следующей формулой:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \qquad (1.17)$$

где $x=\varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Формула (1.17) показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении.

Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным). Взяв интеграл не забывайте вернуться к старой переменной.

Пример 1.4. (а)

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5x-2}}=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{5x-2},\ u^2=5x-2,\\ x=\frac{1}{5}(u^2+2),\ dx=\frac{2}{5}udu\end{matrix}\right|=\frac{2}{5}\int\frac{udu}{u}=\frac{2}{5}\int du=\frac{2}{5}u+C=\frac{2}{5}\sqrt{5x-2}+C.$$

Пример 1.4 (б)

Найти $\int \frac{dx}{1-3x}$.

Решение. Положим $t = 1-3x.$ Тогда $x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t,$ $\int\int \frac{(-1/3)dt}{t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{-1}{3}\ln|t| + c =$

$= -\frac{1}{3}\ln|1-3x| + c$ (см. (1.5) и табличный интеграл (1.9)).

Следует отметить, что новую переменную можно не вписывать явно (в таких случаях говорят о *преобразовании функции под знаком дифференциала* или о *введении постоянных и переменных под знак дифференциала*).

Пример 1.5. (а)

$$\int \frac{e^{5x}dx}{e^x+1} = \left| \begin{matrix} t = e^x, x = \ln t, \\ dx = \frac{dt}{t} \end{matrix} \right| = \int \frac{t^5 dt}{(t+1)t} = \int \frac{t^4}{t+1}dt = \int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt =$$

$$\int t^3 dt - \int t^2 dt + \int t dt - \int dt + \int \frac{d(t+1)}{t+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) + C =$$

$$= \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + \ln(e^x+1) + C.$$

Пример 1.5. (б)

$$\int \sqrt{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+x^2} = x + t, 1 = 2xt + t^2, \ x = \frac{t^2-1}{2t}, \\ dx = \frac{t^2+1}{2t^2}dt, \ \sqrt{1+x^2} = \frac{t^2-1}{2t} + t = \frac{3t^2-1}{2t} \end{matrix} \right| = \int \frac{(3t^2-1)(t^2+1)}{4t^3}dt =$$

$$\frac{3}{4}\int t dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{4}\int t^{-3}dt = \frac{3t^2}{8} - \frac{3}{2}\ln|t| + \frac{1}{2t^2} + C = \frac{3}{8}\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2 - \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2} - x\right| +$$

$$+ \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)^2} + C = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + C.$$

Пример 1.6.(а)

Найти $\int \cos(5x+2)dx.$

Решение. Используя свойства дифференциала, получаем

$dx = \frac{1}{5}d(5x) = \frac{1}{5}d(5x+2).$

Тогда $\int \cos(5x+2)dx = \int \frac{1}{5}\cos(5x+2)d(5x+2) = \frac{1}{5}\int \cos(5x+)d(5x+2) = \frac{1}{5}\sin(5x+2)+c$ (см. (1.5) и (1.10)).

В примерах 1.4а и 1.5а для нахождения интегралов была использована линейная подстановка t=kx+b, где k и b – некоторые числа $k \neq 0$. В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть F(x) некоторая первообразная для функции f(x).*

Тогда $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+c,$ (1.18)

где k и b – некоторые числа, $k \neq 0$.

Данная теорема утверждает, что если в (1.1) вместо аргумента x подынтегральной функции F(x) подставить выражение (kx+b), то это приведет к появлению дополнительного множителя 1/k перед первообразной

Пример 1.6(б)

Найти интегралы:

а) $\int \sqrt[3]{3-x}dx;$ б) $\int \frac{dx}{4x+3};$ в) $\int e^{-2x+7}dx.$

Решение. Искомые интегралы однотипны: каждый из них может быть найден путем применения формулы (1.18) к одному из табличных интегралов.

а) Из (1.8) и (1.18) следует, что

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+c, n \neq -1, k \neq 0. \qquad (1.19)$$

Тогда, полагая n=1/3, k≠-1, b=3, получаем

$$\int \sqrt[3]{3-x}dx = -\frac{3}{4}(3-x)^{4/3}+c.$$

б) Из (1.9) и (1.18) следует, что

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\ln|kx+b|+c, k \neq 0 \qquad (1.20)$$

Полагая k=4, b=3, получаем $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\ln|4x+3| + c.$

в) Из (1.10) и (1.18) следует, что

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}e^{kx+b} + c. \qquad (1.21)$$

Полагая в (1.21) k= -2, b=7, имеем

$$\int e^{-2x+7}dx = \frac{1}{-2}e^{-2x+7} + c.$$

Рассмотрим примеры нахождения интегралов с помощью нелинейных подстановок

Пример 1.7.

Найти $\int xe^{-x^2}dx$

Решение. Положим $t=-x^2$. Продолжение решения может быть аналогично решению примера 1.4: следует выразить x через t, затем найти выражение для dx. Это позволит реализовать замену переменной в искомом интеграле. Но здесь мы поступим по другому.

Найдем дифференциал от левой и правой частей формулы $t=-x^2$, используя замену переменной, $dt = d(-x^2) = (-x^2)'dx,$ т. е. $dt = -2xdx.$. Из полученного равенства удобно выразить x dx, поскольку это выражение является сомножителем подынтегрального выражения искомого интеграла: $xdx = -\frac{1}{2}dt.$ Тогда

$$\int xe^{-x^2}dx = \int\left(\frac{1}{2}\right)e^t dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + c = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + c$$

(см. (1.10)).

Пример 1.8.

Найти интегралы:

а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{xdx}{3-2x^2}$; г) $\int x^2 e^{3+5x^3}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; е) $\int tgx dx$.

Решение. а) Положим t=1-x².

Тогда $dt = d(1-x^2) = (1-x^2)'dx = -2xdx,$ $xdx = -\frac{1}{2}dt$ и, следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt = -t^{1/2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C$$

б) Положим $t = \sqrt{x}$ Тогда $dt = d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$ $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2dt$ и

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int e^t 2dt = 2\int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

в) Используя введение переменной под знак дифференциала, получаем $xdx = \frac{-1}{4}d(3-2x^2).$ (Неявная замена переменной $t = 3-2x^2$). Тогда

$$\int \frac{xdx}{3-2x^2} = \int \left(-\frac{1}{4}\right)\frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} = -\frac{1}{4}\ln\left|3-2x^2\right| + c.$$

г) Используя введение переменной под знак дифференциала получаем $x^2dx = \frac{1}{15}d(3+5x^3)$ (Неявная замена переменной $t = 3+5x^3$). Тогда

$$\int x^2 e^{3+5x^3}dx = \int \frac{1}{15}e^{3+5x^3}d(3+5x^3) = \frac{1}{15}\int e^{3+5x^3}d(3+5x^3) = \frac{1}{15}e^{3+5x^3} + C.$$

д) Так как $\frac{dx}{x} = d\ln x,$ то

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int (\ln x)^{1/2}d\ln x = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3 + c}.$$

е) Так как $\sin xdx = -d\cos x,$ то

$$\int tgxdx = \int \frac{(-1)d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

Приведенные примеры являются простейшими. Однако даже в тех случаях, когда замена переменной не приводит искомый интеграл к табличному, она часто позволяет упростить

подынтегральную функцию и тем облегчить вычисление интеграла.

Пример 1.9.

Найти $\int \frac{x^2+1}{x+2}dx$

Решение. Положим $t=x+2$. Тогда $dt=d(x+2)=dx.$ Так как $x=t-2,$ то

$$\int \frac{x^2+1}{x+2}dx=\int \frac{(t-2)^2+1}{t}dt=\int \frac{t^2-4t+5}{t}dt=$$

$$\int\left(t-4+\frac{5}{t}\right)dt=\int tdt-4\int dt+5\int \frac{dt}{t}=$$

$$=\frac{t^2}{2}-4t+5\ln|t|+C=\frac{(x+2)^2}{2}-4(x+2)+5\ln(x+2)+c.$$

Найти интегралы:

16. $\int \cos 3x dx$.

17. $\int \sin\frac{x}{2}dx$.

18. $\int e^{-3x}dx$.

19. $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$.

20. $\int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx$.

21. $\int \sqrt{4x-1}dx$.

22. $\int (3-2x)^4 dx$.

23. $\int \sqrt[3]{5-6x}dx$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}dx$.

25. $\int \sin(a-bx)dx$.

26. $\int \frac{3x-5}{x^2-5x+7}dx$

27. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

28.

29.

$\int \frac{dx}{1-10x}$.

$\int \frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$.

30.
$\int ctgx dx$.

31.
$\int tgx dx$.

32.
$\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$.

33.
$\int \frac{\sin x dx}{1+3\cos x}$.

34.
$\int \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$.

35.
$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

36.
$\int \sin^2 x \cos x dx$.

37.
$\int \cos^3 x \sin x dx$.

38.
$\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$.

39.
$\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$.

40.
$\int \frac{1-2\cos x}{\sin^2 x} dx$.

41.
$\int \sin x \cos x dx$.

42.
$\int e^{\cos x} \sin x dx$.

43.
$\int e^{x^3} x^2 dx$.

44.

а) $\int e^{-x^3} x dx$

б) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$

45.
$\int \sqrt{x^2+1} dx$.

46.
$\int \sqrt[3]{x^3-8} x^2 dx$.

47.
$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

48.
$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

49.
$\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1+2\cos x}}$.

50.
$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$.

51.
$\int \sqrt{1+4\sin x}\cos xdx$.

52.
$\int \sqrt[3]{1-6x^5}x^4 dx$.

Домашнее задание

53.
$\int \left(e^x + e^{-x}\right)^2 dx$.

54.
$\int \sin^3 x \cos xdx$.

55.
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$.

56.
$\int \cos(a-bx)dx$.

57.
$\int \sqrt[3]{1+3x}dx$.

58.
$\int \sqrt[6]{1-2x^3}x^2 dx$.

59.
$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

60.
$\int \frac{1-2\sin x}{\cos^2 x}dx$.

61.
$\int \frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$.

62.
$\int e^{\sin x}\cos xdx$.

63.
$\int \frac{x^2dx}{1-x^2}$.

64.
$\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$.

§3 Интегралы вида $\int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$ и к ним приводящиеся

Пример **65**. показать, что

1) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$, положив $x = atgt$;

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, положив $x = a \sin t$;

3) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, разложив $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \frac{a+x+a-x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+k}\right| + C$, положив $\sqrt{x^2+k} = t - x$.

66.
1) $\int \frac{dx}{x^2+25}$;
2) $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

67.
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

68.
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$;
2) $\int \frac{dx}{x^2+3}$.

69.
1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;
2) $\int \frac{x^2dx}{4+x^6}$.

70.
1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-x^4}}$;
2) $\int \frac{dx}{b^2x^2-a^2}$.

71.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$ **;** **2)** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^8-1}}$ **.**

72.

1) $\int \frac{5x-2}{x^2+4}dx$ **;** **2)** $\int \frac{3x-4}{x^2-4}dx$ **.**

73.

1) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ **;** **2)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ **.**

74.

$\int \frac{x^2dx}{x^2+1}dx$ **.**

75.

$\int \frac{x^4dx}{x^3-3}$

76.

$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

77.

$\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

78.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

79.

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

80.

$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

81.

$\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$

82.

$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

83.

$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2x-1}}$

Домашнее задание

84.
$$\int\left(\frac{3}{x^2+3}+\frac{6}{x^2-3}\right)dx$$

85.
$$\int\left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx$$

86.
$$\int\frac{4x-5}{x^2+5}dx$$

87.
$$\int\frac{x^2dx}{x^2-2}$$

88.
$$\int\frac{x^4dx}{x^2+2}$$

89.
$$\int\frac{e^xdx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

70.
$$\int\frac{xdx}{x^4+0.25}$$

71.
$$\int\frac{dx}{x^2+4x+29}$$

72.
$$\int\frac{dx}{x^2-2x+5}$$

73.
$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

74.
$$\int\frac{xdx}{x^2+x+1}$$

75.
$$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

§4. Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$- дифференцируемые функции. По свойству дифференциала $d(uv)=vdu+udv$ или $udv=d(uv)-vdu.$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства и учитывая (1.6) и (1.4), получаем

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (1.22)$$

Формула (1.22) называется **формулой интегрирования по частям** для неопределенного интеграла. При ее применении фиксируется разбиение подынтегрального выражения искомого интеграла на два сомножителя (u и dv). При переходе к правой части (1.22) первый из них дифференцируется (при нахождении дифференциала: du=u'dx), второй интегрируется ($v=\int dv+C$ (см. (1.4)).

Возможности применения (1.22) связаны с тем, что дифференцирование может существенно упростить один из сомножителей (при условии, что интегрирование не слишком усложнит другой).

Пример 1.10.

Найти интегралы:

а) $\int xe^{-3x}dx;$ б) $(2+5x)e^{x/3}dx$

Решение. а) Так как x'=1, а функция e^{-3x} при интегрировании практически не изменяется (согласно (1.21) появляется лишь постоянный множитель), то данный интеграл можно найти интегрированием по частям, полагая u = x, $dv=e^{-3x}dx$. Найдем необходимые для записи правой части (1.22) v и du.

Так как u=x, то du=dx. Согласно (1.3) и (1.21) при k=-3, b=0, имеем

$$v=\int dv=\int e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}+c.$$

Теперь, применяя формулу интегрирования по частям (1.22), получаем

$$\int xe^{-3x}dx=x\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}+c\right)-\int\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}+c\right)dx.$$

Используя метод разложения, убеждаемся, что полученный интеграл — сумма табличного и интеграла, который был определен при нахождении v. Таким образом, окончательно

$$\int xe^{-3x}dx=-\frac{1}{3}xe^{-3x}+cx+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)e^{-3x}-cx+c_1=-\frac{1}{3}xe^{-3x}-\frac{1}{9}e^{-3x}+c_1$$

б) Пусть $2+5x=u,\ e^{x/5}dx=dv$. Тогда

$du=d(2+5x)=(2+5x)'dx=5dx$ и $v=\int dv=\int e^{x/5}dx=5e^{x/3}$ (см. (1.21)).

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int(2+5x)e^{x/5}dx=(2+5x)5e^{x/5}-\int 5e^{x/5}5dx=(10+25x)e^{x/3}-25\int e^{x/5}dx=(10+25x)e^{x/5}-25\cdot 5e^{x/3}+c=$$
$$=(25x-115)e^{x/5}+c.$$

Пример 1.11.

Найти интегралы: а) $\int x\ln xdx$; б) $\int (x^3+4)\ln xdx$.

Решение. а) "Препятствием" к нахождению данного интеграла является присутствие сомножителя lnx в записи подынтегральной функции. Устранить его в данном случае можно интегрированием по частям, полагая u=lnx. Тогда dv=xdx. (Существенно, что при интегрировании функции f(x)=x получается функция того же типа (степенная)). Так как

$du = d\ln x = \frac{dx}{x}$ и $v = \int dv = \int xdx = \frac{x^2}{2}$ (C=0 см. замечания в примере 10), используем формулу интегрирования по частям; получаем

$$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$$

б)Пусть, $u = \ln x$; $dv = (x^3+4)dx.$

Тогда $du = \frac{dx}{x}$ и $v = \int dv = \int (x^3+4)dx = \frac{x^4}{4} + 4x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (x^3+4)\ln xdx = \left(\frac{x^4}{4}+4x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^4}{4}+4x\right)\frac{dx}{x} = \left(\frac{x^4}{4}+4x\right)\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx - 4\int dx = \left(\frac{x^4}{4}+4x\right)\ln x - \frac{x^4}{16} - 4x + c.$$

В некоторых случаях для нахождения искомого интеграла формулу интегрирования по частям приходится применять более одного раза.

Пример 1.12.

Найти. $\int x^2\sin xdx$

Решение. Положим $u=x^{2,}$ sinxdx=dv. Тогда $du = dx^2 = 2xdx$ и $v = \int dv = \int \sin xdx = -\cos x$

(см. формулу (1.10)). Применяя формулу интегрирования по частям, получаем $\int x^2\sin xdx = -x^2\cos x - \int(-\cos x)2xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx.$

Возникший интеграл не является табличным, однако видно, что мы на правильном пути: по сравнению с исходным интегралом степень переменной x в подынтегральном выражении уменьшилась на единицу, при этом второй сомножитель cosx того же типа, что и в исходном интеграле. Повторное применение формулы интегрирования по частям приводит к табличному интегралу. Действительно, положим теперь u=x, cos x dx=dv. Тогда du=dx,

$v = \int dv = \int \cos x dx = \sin x$ (см. (1.11)) и

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c$$

Анализируя разнообразные примеры, можно указать на следующие типы интегралов, для нахождения которых используется формула интегрирования по частям.

1. $\int x^n e^{ax} dx, \quad \int x^n \sin mx dx, \quad \int x^n \cos mx dx.$
2. $\int x^k \ln^n x dx, \quad \int x^k arc\sin x dx, \quad \int x^k arc\cos x dx,$

$\int x^k arctgx dx, \quad \int x^k arcctgx dx.$

Решение. Выполним сначала замену переменной: положим $t = 2x+3$. Тогда $dt = d(2x+3) = 2dx$ и $dx = \frac{1}{2}dt$. Следовательно, $\int \ln^2(2x+3)dx = \int \ln^2 t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \ln^2 tdt.$ Пусть $\ln^2 t = u, \quad dt = dv.$ тогда $du = d\ln^2 t = 2\ln t \frac{1}{t}dt, \quad v = \int dv = \int dt = t$ и, применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}(t\ln^2 t - \int t \cdot 2\ln t \frac{1}{t}dt) = \frac{1}{2}t\ln^2 t - \int \ln tdt.$$

Полагая в формуле интегрирования по частям u=lnt, dv=dt, получаем $\int \ln tdt = t\ln t - t + c.$ Окончательно имеем

$$\int \ln^2(2x+3)dx = \frac{1}{2}t\ln^2 t - t\ln t - t + c = .\ \frac{1}{2}(2x+3)\ln^2(2x+3) - (2x+3)\ln(2x+3) + 2x + 3 + c$$

Найти интегралы:

76.
$\int \ln x dx.$

77.
$\int x\ln(x-1)dx.$

78.
$\int xe^{2x}dx$

79.
$\int x\,arctgx\,dx$

80.
$\int x^2 \cos x dx$

81.
$\int e^x \sin x dx$

83.
$\int (\ln x)^2 dx$

84.
$\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$

85.
$\int \frac{\ln xdx}{x^2}$

86.
$\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$

87.
$\int \arcsin xdx$

88.
$\int x^3 e^{-x} dx$

89.
$\int \ln(x^2+1)dx$

90.
$\int \cos(\ln x)dx$

Домашнее задание:

91.
$\int \sqrt{x} \ln xdx$

92.
$\int x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$

93.
$\int arctgx\,dx$

94.
$\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$

95.

$$\int e^x \cos x dx$$

96.

$$\int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$$

97.

$$\int \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$$

98.

$$\int arctg \sqrt{2x-1} dx$$

§5. Интегрирование простейших рациональных дробей

К простейшим относятся дроби вида:

I $\frac{A}{x-a}$

II $\frac{A}{(x-a)^{\kappa}}$

III $\frac{Ax+B}{x^2+px+g}$

Где κ - натуральное число, a, A, B, p, g- действительные числа, выражение x^2+px+g не имеет действительных корней.

Интегралы дробей типа I, II находятся при помощи подстановки $(x-a)=t$ и таблицы основных интегралов

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

Дробь типа III интегрируется в три этапа:

1) в знаменателе выделяется полный квадрат, т. е. применяется формула $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$;
2) вводится подстановка;
3) полученная дробь разлагается на две дроби.

Таким образом $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+g}dx = \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+g} = \int \frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})+\underbrace{(g-\frac{p^2}{4})}_{=k}}dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{P}{2} \\ dx=dt \end{array} \right| =$

$$\int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{t^2+\kappa}dt = \int \frac{At+(B-\frac{p}{2}A)}{t^2+\kappa}dt = \int \frac{At}{t^2+\kappa}dt + \int \frac{B-A\frac{p}{2}}{t^2+\kappa}dt = \frac{A}{2}\ln\left|t^2+\kappa\right| +$$

$$+(B-A\frac{p}{2})\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\cdot arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{k} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+g\right| + (B-A\frac{p}{2})\frac{1}{\sqrt{\kappa}}arctg\frac{(x+\frac{p}{2})}{k} + dt$$

Пример 1.14

Найти

$$\int \frac{4-x}{x^2-4x+20}dx$$

Так как $x^2-4x+20=(x-2)^2+16$, то положим $x-2=t$. Тогда $dt=dx$, $x=t+2$ и

$$\int \frac{4-x}{x^2-4x+20}dx = \int \frac{4-(t+2)}{t^2+16}dt = \int \frac{2}{t^2+16}dt - \int \frac{tdt}{t^2+16}.$$

Применяя формулы (1.9), (1.15) получаем

$$\int \frac{4-x}{x^2-4x+20}dx = 2arctg\,\frac{t}{4} - \frac{1}{2}\ln(t^2+16) + c =$$
$$= 2arctg\,\frac{x-2}{4} - \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+20\right| + c$$

§6 Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную дробь можно представить в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0+A_1x+A_2x^2\cdots+A_nx^n}{B_0+B_1x+B_2x^2\cdots+B_mx^m}$$

В общем случае, считаем, что многочлены f(x) и φ(x) не имеют общих корней. Если n≥m, то рациональная дробь является неправильной; если n<m то правильной. В случае неправильной дроби при делении числителя на зна-

менатель выделяют целую степенную функцию и остаток представляющий правильную дробь. Таким образом, вопрос состоит в интегрировании правильной рациональной дроби. Пусть
знаменатель разлагается на множители $\varphi(x)=(x-a)^m(x-b)^\kappa.....(x^2+px+g)....(x^2+zx+s)$

Тогда из алгебры известно, что дробь будет равна сумме простейших рациональных дробей вида:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+...+\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{B_\kappa}{(x-b)^\kappa}+$$
$$+\frac{B_{\kappa-1}}{(x-b)^{\kappa-1}}+...+\frac{B_1}{x-b}+\frac{Px+Q}{x^2+px+g}+\frac{Rx+S}{x^2+zx+s}$$

где A_m, A_{m-1},…,A_1, $B_к$, $B_{к-1}$,…., B_1, P., Q, R,S- коэффициенты, которые находятся методом неопределенных коэффициентов

Пример 1.15

Найти $\int\frac{x^2-x+3}{x^3-5x^2+6x}$;

Решение.

Так как $x^3-5x^2+6x=x\cdot(x-2)\cdot(x-3)$, то

$$\frac{x^2-x+3}{x^3-5x^2+6x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-3}$$

Из последнего равенства найдем постоянные A_1, A_2, A_3. Приводя дроби правой части к общему знаменателю, приходим к равенству.

$$A_1(x-2)(x-3)+A_2(x-3)x+A_3(x-2)x=x^2-x+3$$

Если x=0, то имеем 6A=3 и $A_1=\frac{1}{2}$

Если x=2,то -2A_2=5 и $A_2=-\frac{5}{2}$

Если x=3 то 3A_3=9 и $A_3=3$

Тогда.

$$\int\frac{x^2-x+3}{x^3-5x^2+6x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{5}{2}\ln|x-2|+3\ln|x-3|+c$$

Пример 1.16

Найти $\int \frac{4dx}{x^3-1}$

Решение. Подынтегральной функцией является правильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы простейших дробей вида I,III, разложив знаменатель на множители. $\frac{4}{x^3-1} = \frac{4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+c}{x^2+x+1}$

$$или\ \frac{4}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+x)+(Bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

Откуда. $4 = A(x^2+x+1)+(Bx+c)(x-1)$или

$4 = x^2(A+B)+x(A+C-B)+(A-C)$, получим систему

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=4 \end{cases}$$

Применяя метод Гаусса решение системы найдем A, B, C.

Получим:A= $\frac{4}{3}$, B=$-\frac{4}{3}$, C=$-\frac{8}{3}$. Тогда

$$\int \frac{4}{x^3-1}dx = \int \frac{\frac{4}{3}dx}{x-1} + \int \frac{\frac{-4}{3}x - \frac{8}{3}}{x^2+x+1}dx = \frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}dx =$$

$$\frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\int \frac{x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx =$$

$$\frac{4}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\int \frac{(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx - \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$\frac{4}{3}\ln(x-1) - \frac{4}{6}\ln\left|(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right| - 2\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}\ln(x-1) -$$

$$\frac{2}{3}\ln\left|x^2+x+1\right| - \frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$$

§7. Интегрирование рациональных алгебраических функций

- Если подынтегральное выражение дробь неправильная, то нужно исключить из нее целое выражение.
- Знаменатель правильной дроби разлагается на множители вида $(x-a)^{\alpha}$ и $(x^2+px+q)^{\beta}$, а правильная дробь разлагается на сумму элементарных дробей следующим образом:
$$\frac{P(x)}{(x-a)^{\alpha}(x^2+px+q)^{\beta}\ldots}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_{\beta}x+N_{\beta}}{(x^2+px+q)^2}$$
где P(x) – полином степени ниже степени знаменателя.

99.

1) $\int\frac{x^3}{x-2}dx$**;** **2)** $\int\frac{x^4}{x^2+a^2}dx$**;** **3)** $\int\frac{x^5}{x^3-a^3}dx$

100.
$$\int\frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$$

101.
$$\int\frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$$

102.
$$\int\frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$$

103.
$$\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$$

104.
$$\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}dx$$

105.
$$\int\frac{3x-2a}{x^4-ax^3}dx$$

106.
$$\int\frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$$

107.
$$\int\frac{5x-1}{x^3-3x-2}dx$$

108.
$$\int\frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx$$

109.
$$\int\frac{4x-2.4}{x^2-0.2x+0.17}dx$$

110.

111.

$\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4}dx$

$\int \frac{7x-15}{x^3-2x^2+5x}dx$

112.
$\int \frac{dx}{x^3+8}$

113.
$\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

114.

1) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^2}$ **;**

2) $\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^3}$

115.

1) $\int \frac{(2x+1)dx}{(x^2+2x+5)^2}$ **;**

2) $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}$

116.
$\int \frac{4xdx}{(1+x)(1+x^2)^2}$

117.
$\int \frac{x+1}{x^4+4x^2+4}dx$

118.
$\int \frac{dx}{x(x+a)}$

119.
$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

120.
$\int \frac{dx}{x^2-2x}$

121.
$\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}$

122.
$\int \frac{dx}{x^4-x^2}$

123.
$\int \frac{dx}{x^3+4x}$

Домашнее задание

124.
$$\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$$

125.
$$\int \frac{3x+2}{2x^2+x-3}dx$$

126.
$$\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$$

127.
$$\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$$

128.
$$\int \frac{5x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$$

129.
$$\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x}dx$$

130.
$$\int \frac{x-\mathrm{a}}{\mathrm{x}^3+a^2x}dx$$

131.
$$\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$$

132.
$$\int \frac{dx}{x^3-8}$$

133.
$$\int \frac{xdx}{(x^2+2x+2)^2}$$

134.
$$\int \frac{dx}{x^2+5x}$$

135.
$$\int \frac{dx}{x^4+3x^2}$$

136.
$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

137.
$$\int \frac{dx}{x^4-x^2-2}$$

§8. Интегрирование тригонометрических функций

Рассмотрим интеграл вида: $\int R(\sin x, \cos x)dx.$ (I)

Для такого интеграла применяется так называемая *универсальная тригонометрическая подстановка:* $tg\frac{x}{2} = t$, которая исходный интеграл преобразует в интеграл от рациональной функции. В самом деле:

$$\sin x = \sin 2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

Таким образом, если $t = tg\frac{x}{2}$, то $\frac{x}{2} = arctgt$; $x = 2arctgt$;

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2}$$

Пример 1.17.

Найти $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3}$

Решение. Имеем интеграл вида (I). Применим универсальную подстановку.

$tg\frac{x}{2} = t$, откуда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Тогда , $$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2\cdot 2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\frac{4t + 1 - t^2 + 3 + 3t^2}{1+t^2}} = 2\int\frac{dt}{2t^2 + 4t + 4} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int\frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} =$$

$$= arctg(t+1) + c = arctg(tg\frac{x}{2} + 1) + c$$

Замечание: на практике универсальная подстановка приводит к громоздким преобразованиям. Поэтому необходимо рассмотреть другие подстановки, облегчающие вычисление.

Если подынтегральная функция имеет вид R(sinx,cosx) причем sinx и cosx входят только в четных степенях, то применяют подстановку: tgx=t. Тогда $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пусть подынтегральная функция зависит от tgx . Тогда подстановка tgx=t, $x = arctgt$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит исходный интеграл к интегралу от рациональной функции, то есть.

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}. \qquad \text{(II)}$$

Пример 1.18.

Найти $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$.

Решение: Пусть tgx=t, тогда:

$dx = \frac{dt}{1+t^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + c = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Рассмотрим интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, (III)

где m и n – целые числа.

а) Пусть хотя бы одно из m и n нечетное. Возьмем для определенности m=2k+1 и наш интеграл, преобразуется:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx =$$

$$= \int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \sin x dx =$$

= (подстановка $\cos x = t; -\sin x dx = dt$) =

$= -\int (1-t^2)^k \cdot t^n dt$. Получим интеграл от рациональной функции. Аналогично и для случая n=2k+1.

б) Пусть m и n числа неотрицательные и четные. Тогда применим известные формулы тригонометрии, понижающие степень:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

Пример 1.19.

Найти $\int \sin^2 x \cos^5 x dx.$

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx =$$
$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = (\sin x = t; \cos x dx = dt)$$

$$\int t^2 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^2 - 2t^4 + t^6) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{2}{5} t^5 + \frac{t^7}{7} + c =$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

Пример 1.20.

Найти $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

Решение: Имеем интеграл вида III случай (б). Применим формулы понижающие степень. Тогда

$$\int \cos^2 x \sin^2 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx =$$
$$\int (\frac{1}{2}\sin 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x) dx =$$

$$\frac{1}{8}\int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} * \frac{1}{4}\sin 4x + c =$$
$$\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

Интегралы от произведения синусов и косинусов различных аргументов вида.

$$\int \cos mx \cos nx 2x, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx$$

берутся при помощи формул из тригонометрии.

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x],\quad \sin mx\cos nx=\frac{1}{2}[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x]\ ,$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x],$$

Пример 1.21.

Найти $\int\sin 5x\cdot\cos 3x\cdot dx$

Решение

$$\int\sin 5x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int\sin(5+3)xdx+\frac{1}{2}\int\sin(5-2)xdx=$$
$$=\frac{1}{2}\int\sin 8xdx+\frac{1}{2}\int\sin 3xdx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{6}\cos 3x+c\ .$$

- Интегралы от квадратов и других четных степеней синуса и косинуса находят, применяя следующие формулы понижения степени (1): $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$.
- Интегралы от кубов и других нечетных степеней синуса и косинуса находят, отделяя от нечетной степени один множитель и полагая кофункцию равной новой переменной **u** (2).

Интеграл $\int\cos^m x\sin^n dx$ находится по правилу 1, если **m** и **n** оба четные, и

по правилу 2, если **m** и **n** – нечетны

Найти интегралы:

138.
$\int\sin^2 3xdx$

139.
$\int(1+2\cos x)^2 dx$

140.
$\int(1-\sin 2x)^2 dx$

141.
$\int\cos^4 xdx$

142.
$\int\sin^2 x\cos^4 xdx$

143.
$\int\sin^4 x\cos^4 xdx$

144.
$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

145.
$$\int \sin^5 x dx$$

146.
$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

147.
$$\int \sin^3 x \cos^3 x dx$$

148.
$$\int \cos^7 x dx$$

149.
$$\int (1 + 2\cos x)^3 dx$$

150.
$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$$

151.
$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$$

152.
$$\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin x \cos x} dx = ?$$

153.
1) $\int \frac{dx}{\sin x}$ **;** **2)** $\int \frac{dx}{\cos x}$

154.
$$\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$$

155.
$$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$$

156.
$$\int tg^3 x dx$$

157.
$$\int ctg^3 x dx$$

158.
$$\int \sin 3x \cos x dx$$

159.
$$\int \cos mx \cos nx dx$$

160.
1) $\int \sin 3x \sin 5x dx$ **;**
2) $\int \sin mx \sin nx dx$

161. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$

162. Интегрируя по частям, вывести формулы «понижения степени»:

1) $\int \sin^n xdx = -\frac{1}{n}\cos x son^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} xdx$;

2) $\int \cos^n xdx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\cos^{n-2} xdx$;

и по этим формулам найти: 1) $\int \sin^6 xdx$; 2) $\int \cos^6 xdx$

163.

1) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **2)** $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

Домашнее задание

164.
$\int (1+3\cos 2x)^2 dx$

165.
$\int \sin^4 xdx$

166.
$\int \sin^4 x \cos^2 xdx$

167.
$\int \cos^5 xdx$

168.
$\int \sin^3 x \cos^2 xdx$

169.
$\int (1+2\sin x)^3 dx$

170.
$\int \frac{(\sin^3 x - \cos x)^3}{\sin 2x} dx$

171.
$\int \sin 3x \sin xdx$

172.
$\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$

173.
$\int \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos xdx$

§9. Интегрирование некоторых рациональных алгебраических функций

- Интеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)dx$, где R(x,y) – рациональная функция, находится подстановкой $ax+b=t^n$, а интеграл общего вида $\int R\left(x^m, \sqrt[n]{ax^m+b}\right)x^{m-1}dx$ - подстановкой $ax^m+b=t^n$.
- Интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x-a)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ находится подстановкой $x-a=\frac{1}{t}$.
- Тригонометрические подстановки. К рациональному тригонометрическому виду приводятся интегралы $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)dx$ - подстановкой $x=a\sin t$, $\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ - подстановкой $x=atgt$.
- Из интеграла $\int \frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ можно выделить алгебраическую часть по формуле $\int \frac{a_0x^m+\ldots+a_m}{W}dx=\left(A_0x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}\right)W+A_m\int\frac{dx}{W}$, где $W=\sqrt{ax^2+bx+c}$. Коэффициенты Ф находятся после дифференцирования равенства и освобождения его от знаменателя сравнением коэффициентов слева и справа при одинаковых степенях x.
- Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ берется в конечном виде в трех случаях:

1) когда p – целое число, разложением;
2) когда $\frac{m+1}{n}$ - целое число, подстановкой $a+bx^n=t^s$;
3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ - целое число, подстановкой $ax^{-n}+b=t^s$, где s – знаменатель дроби p.

174.
$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$$

175.
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$$

176.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$$

177.
$$\int x\sqrt{a-x}dx$$

178.
$$\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4}+1}$$

179.
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+2}}$$

182.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

183.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$$

184.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$$

185.
$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}$$

186.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$$

187.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$$

188.
$$\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

189.
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^5}}$$

192.
$$\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

193.
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

194.
$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx$$

195.
$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx$$

196.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}$$

197.
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$$

198.
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

199.
$$\int \frac{x^3dx}{(a-bx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Домашнее задание

200.
$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$$

201.
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$$

202.
$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$$

203.
$$\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{a-x}}$$

204.
$$\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$$

205.
$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{x^2+1}-1}$$

206.
$$\int \frac{xdx}{x^2+2+2\sqrt{1+x^2}}$$

207.
$$\int \frac{x^3dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$$

208.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x}}$$

209.
$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$$

210.
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

211.
$$\int \sqrt{\frac{x}{2-x}}dx$$

212.
$$\int \sqrt{4x+x^2}\,dx$$

213.
$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

214.
$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$$

215.
$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

216.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

217.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$$

§10. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

К рациональному алгебраическому виду приводятся интегралы: $\int R(e^x)dx$ - подстановкой $e^x = t$, $x = \ln t$, $dx = \frac{dt}{t}$; $\int R(tgx)dx$ - подстановкой $tgx = t,$ $x = arctgt,$ $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $\int R(\sin x, \cos x)dx$ - подстановкой $tg\frac{x}{2} = t,$ $\sin x = \frac{2t}{1+t^2},$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$ $dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$

218.
$$\int \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^{2x}+1}dx$$

219.
$$\int tg^4 x dx$$

220.
$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^x + 2}$$

221.
$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

222.
$$\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$$

223.
$$\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$$

224.
$$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

225.
$$\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$$

Домашнее задание

226.
$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^x - 1}$$

227.
$$\int tg^5 x dx$$

228.
$$\int \frac{e^{3x}dx}{e^{2x} - 1}$$

229.
$$\int \frac{dx}{3 + \cos x}$$

230.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

231.
$$\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$$

232.
$\int \frac{dx}{2\sin x + \sin 2x}$

233.
$\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx$

234.
$\int \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx$

235.
$\int \frac{1+tgx}{\sin 2x} dx$

§11 Интегрирование гиперболических функций. Гиперболические подстановки

1. $\int chxdx = shx + C$

2. $\int shxdx = chx + C$

3. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$

4. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$

Интегралы от квадратов и других четных степеней chx и shx находятся применением формул:
$ch^2 x = \frac{ch2x+1}{2}, \; sh^2 x = \frac{ch2x-1}{2}, \; shxchx = \frac{sh2x}{2}.$

Интегралы от нечетных степеней chx и shx находятся тем же способом, что и интегралы от нечетных степеней sinx и cosx.

Гиперболические подстановки иногда применяются при нахождении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ - подстановкой $x = acht$; $\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right)dx$ - подстановкой $x = asht$. При этом: если $x = acht$, то $t = \ln\left|\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right|$, если $x = asht$, то $t = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$.

236.
1) $\int sh^2 3xdx$

2) $\int (1 + sh2x)^2 dx$

237.
$\int ch^3 xdx$

238.
$\int thxdx$

239.
$\int \frac{dx}{chx + 1}$

240.
$\int \frac{dx}{thx - 1}$

241.
$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$

242.
$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

243.
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$

244.
$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-5)^3}}$

Домашнее задание

245.
$\int sh^3 3x dx$

246.
$\int sh^2 x ch^2 x dx$

247.
$\int sh^4 x ch x dx$

248.
$\int cth^2 x dx$

Контрольная работа

Задача 1. Найти неопределённые интегралы

1.1 $\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos 2x} dx$;

1.2 $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$;

1.3 $\int ctg^2 x dx$;

1.4 $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$;

1.5 $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \cos 2x}$;

1.6 $\int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx$;

1.7 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx$;

1.8 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

1.9 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;

1.10 $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x} dx$;

1.11 $\int \frac{x^4}{1+x^2} dx$;

1.12 $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$;

1.13 $\int (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$;

1.14 $\int a^x (1+\frac{a^{-x}}{\sqrt{x}}) dx$;

1.15 $\int \frac{(x^2-1)^2}{x^3} dx$;

1.16 $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{x^2} dx$;

1.17 $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x}\,dx$;

1.18 $\int (2tgx + 3ctgx)^2\,dx$;

1.19 $\int \frac{2 - x^4}{1 + x^2}dx$;

1.20 $\int (3\sin x - 5\cos x)^2\,dx$;

1.21 $\int \frac{dx}{2x^2 - 6}$;

1.22 $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x^2}}$;

1.23 $\int \frac{dx}{3x^2 - 6}$;

1.24 $\int \frac{dx}{20 + 5x^2}$;

1.25 $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}dx$;

1.26 $\int (e^x + e^{-x})^3\,dx$;

1.27 $\int \frac{x^3}{x^2 + 6}dx$;

1.28 $\int \frac{x^2 - 2}{x + 2}dx$;

1.29 $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + 3x^2}}$;

1.30 $\int \cos^2 \frac{3x}{2}dx$;

Задача 2. Найти неопределённые интегралы.

2.1 $\int x\sqrt{1 - 3x^2}\,dx$;

2.2 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}dx$;

2.3 $\int \frac{(\arccos x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}dx$;

2.4 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}$;

2.5 $\int \frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x}dx$;

2.6 $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$;

2.7 $\int \sqrt[3]{x^3 - 8} \cdot x^2 dx$;

2.8 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$;

2.9 $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x}dx$;

2.10 $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$;

2.11 $\int \sqrt{1 + 4\sin x} \cdot \cos xdx$;

2.12 $\int \sqrt[3]{1 - 6x^5} \cdot x^4 dx$;

2.13 $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1 + x^4}}\,dx$;

2.14 $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos xdx$;

2.15 $\int x(ax^2 + b)^{\sqrt{3}}\,dx$;

2.16 $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

2.17 $\int 7^{\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2.18 $\int e^{5x^3} x^2 dx$;

2.19 $\int \frac{e^{3tgx}}{\cos^2 x}\,dx$;

2.20 $\int \frac{e^{\sqrt{2x - 1}}}{\sqrt{2x - 1}}dx$;

2.21 $\int \frac{3^{2arctgx}}{1 + x^2}dx$;

2.22 $\int \frac{5^{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}}dx$;

2.23 $\int e^{\sin^2 x} \cdot \sin 2xdx$;

2.24 $\int 2^{\cos x + 3} \cdot \sin xdx$;

2.25 $\int 4^{5 - \sin x} \cdot \cos xdx$;

2.26 $\int 6^{\cos^2 x} \cdot \sin 2xdx$;

2.27 $\int 8^{3\arccos x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;   2.28 $\int 2^{1+arctgx}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$;

2.29 $\int 3^{\sqrt[3]{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;   2.30 $\int 10^{5+3\ln x}\cdot\frac{dx}{x}$;

Задача 3. Найти неопределённый интеграл

3.1 $\int\frac{\sin(1-2\ln x)}{x}dx$;   3.2 $\int\frac{dx}{x\cdot\cos^2(1+2\ln x)}$;

3.3 $\int\cos(\sin x)\cdot\cos x dx$;   3.4 $\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

3.5 $\int tg\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$;   3.6 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sin^2\sqrt{x}}$;

3.7 $\int ctg(5-3\ln x)\frac{dx}{x}$;   3.8 $\int x\cdot\cos(3x^2+5)dx$;

3.9 $\int\frac{dx}{x\cdot\sin(\ln x)}$;   3.10 $\int\frac{x\cdot dx}{\cos x^2}$;

3.11 $\int e^x\cdot tg(2e^x-1)dx$;   3.12 $\int\frac{ctg(3\ln x-1)}{x}dx$;

3.13 $\int\frac{dx}{x\cdot\sin^2(1-4\ln x)}$;   3.14 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\cdot\cos^2\sqrt[3]{x}}$;

3.15 $\int\frac{xdx}{\sin(3x^2+1)}$;   3.16 $\int\frac{\sin 2x}{1+5\cos^2 x}dx$;

3.17 $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}$;   3.18 $\int\frac{dx}{x\cdot(5-\ln x)}$;

3.19 $\int\frac{\sin xdx}{1+3\cos x}$;   3.20 $\int\frac{x^2-1}{x^3-3x+5}dx$;

3.21 $\int\frac{\sin 2xdx}{3\sin^2 x+4}$;   3.22 $\int\frac{\cos xdx}{1+2\sin x}$;

3.23 $\int\frac{e^{3x}}{1+5e^{3x}}dx$;   3.24 $\int\frac{1+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$;

3.25 $\int\frac{x^2dx}{1-5x^3}$;   3.26 $\int\frac{5x+3}{3-x^2}dx$;

3.27 $\int\frac{dx}{x\cdot\ln\sqrt{x}}$;   3.28 $\int\frac{dx}{\cos^2(5-3tgx)}$;

3.29 $\int\frac{x\cdot 7^{x^2}dx}{1+7^{x^2}}$;   3.30 $\int\frac{dx}{\sin^2(1+2ctgx)}$.

Задача 4. Найти неопределённые интегралы

4.1 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x\cdot(x+1)}$;

4.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;

4.3 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$;

4.4 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$;

4.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$;

4.6 $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$;

4.7 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$;

4.8 $\int x^2\cdot\sqrt{4-x^2}\,dx$;

4.9 $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

4.10 $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^4\cdot\sqrt{x}}$;

4.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

4.12 $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}}dx$;

4.13 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt{2x+1}}$;

4.14 $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$;

4.15 $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$;

4.16 $\int \frac{3+\sqrt[3]{x+2}}{(1+\sqrt{x+2})\cdot(\sqrt[6]{x+2})^5}dx$;

4.17 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$;

4.18 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$;

4.19 $\int \frac{e^{2x}}{e^x-e^{-x}}dx$;

4.20 $\int \frac{(\sqrt[6]{x}+1)dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x^5}}$;

4.21 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x^2})}$;

4.22 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$;

4.23 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;

4.24 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1}+1)}$;

4.25 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{x})}$;

4.26 $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[3]{x^2}}$;

4.27 $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$;

4.28 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$;

4.29 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+\sqrt[4]{x^3}}$;

4.30 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x})}$.

Задача 5. Найти неопределённые интегралы

5.1 $\int \arccos x dx$;

5.2 $\int \ln(x^2+1)dx$;

5.3 $\int x\cdot\cos^2 x dx$;

5.4 $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$;

5.5 $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;

5.6 $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$;

5.7 $\int \ln^2 x dx$;

5.8 $\int x^2\cdot\sin\frac{x}{2}dx$;

5.9 $\int x\cdot\ln(x^2+3)dx$;

5.10 $\int x^3\cdot arctg x dx$;

5.11 $\int (x^2+1)\cdot\ln x dx$;

5.12 $\int (2x-1)\cdot\sin 2x dx$;

5.13 $\int (3x^2-1)\cdot\ln(x+1)dx$;

5.14 $\int \arcsin 4x dx$;

5.15 $\int x\sqrt{x}\ln x dx$;

5.16 $\int 2x^3\cdot e^{x^2}dx$;

5.17 $\int x^2\cdot e^{-2x}dx$;

5.18 $\int \cos(\ln x)dx$;

5.19 $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$;

5.20 $\int x^2\cdot 5^{\frac{x}{2}}dx$;

5.21 $\int x^2\cdot\cos 6x dx$;

5.22 $\int \frac{x^2 arctg x}{1+x^2}dx$;

5.23 $\int \sqrt{x}\cdot\ln^2 x dx$;

5.24 $\int e^{3x}\cdot\sin x dx$;

5.25 $\int x^3\cdot e^{-x^2}dx$;

5.26 $\int \frac{x\cdot\cos x}{\sin^3 x}dx$;

5.27 $\int x^2\cdot\cos^2 x dx$;

5.28 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

5.29 $\int (x+1)\cdot\ln^2(x+1)dx$;

5.30 $\int x^2\cdot 3^x dx$.

Задача 6. Найти неопределенные интегралы.

6.1 $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3}dx$;

6.2 $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$;

6.3 $\int \frac{2x^3+25}{x^2+3x+2}dx$;

6.4 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1-x}}dx$;

6.5 $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}dx$;

6.6 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$;

6.7 $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$

6.8 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

6.9 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

6.10 $\int \frac{2x-1}{1-6x-x^2}dx$;

6.11 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$;

6.12 $\int \frac{x dx}{4+6x-9x^2}$;

6.13 $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+2x+3}$;

6.14 $\int \frac{(5x-2)dx}{x^2+4x+5}$;

6.15 $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$;

6.16 $\int \frac{x^5dx}{x^2+2x+3}$;

6.17 $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$;

6.18 $\int \frac{4-x}{x^2-2x+8}dx$;

6.19 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2x+30}}$;

6.20 $\int \frac{dx}{5-4x-x^2}$;

6.21 $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2-7x+12}$;

6.22 $\int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$;

6. 23 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$;

6.24 $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-6x+10}}dx$;

6.25 $\int \frac{xdx}{x^2-10x+29}$;

6.26 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

6.27 $\int \frac{x-4}{x^2-4x+2}dx$;

6.28 $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$;

6.29 $\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx$;

6.30 $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx$.

Задача 7. Найти неопределённые интегралы.

7.1 $\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$;

7.2 $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx$;

7.3 $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$;

7.4 $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)}dx$;

7.5 $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$;

7.6 $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)}dx$;

7.7 $\int \frac{x^3-3x^2-12}{x\cdot(x-4)(x-3)}dx$;

7.8 $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x\cdot(x-1)(x-2)}dx$;

7.9 $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$;

7.10 $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$;

7.11 $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$;

7.12 $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$;

7.13 $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$;

7.14 $\int \frac{2x^5+8x^3-3}{x^2-2x}dx$;

7.15 $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$;

7.16 $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx$;

7.17 $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x\cdot(x+2)^3}dx$;

7.18 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-5}{(x+2)(x-2)^3}dx$;

7.19 $\int \frac{x^3+6x^2+14x+10}{(x+1)(x+2)^3}dx$;

7.20 $\int \frac{x^3-6x^2+11x-10}{(x+2)(x-2)^3}dx$;

7.21 $\int \frac{x^3+6x^2+11x-7}{(x+1)(x+2)^3}dx$;

7.22 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x\cdot(x+1)^3}dx$;

7.23 $\int \frac{x^3+6x^2+10x+10}{(x-1)(x+2)^3}dx$;

7.24 $\int \frac{2x^3+6x^2+7x+2}{x\cdot(x+1)^3}dx$;

7.25 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x(x-2)^3}dx$;

7.26 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-7}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

7.27 $\int \frac{x^3-6x^2+13x-8}{x\cdot(x-2)^2}dx$;

7.28 $\int \frac{x^3-6x^2+10x-10}{(x+1)(x-2)^3}dx$;

7.29 $\int \frac{x^3+x+2}{(x+2)\cdot x^3}dx$;

7.30 $\int \frac{2x^3+x+1}{(x+1)\cdot x^3}dx$.

Задача 8. Найти неопределённые интегралы

8.1 $\int \cos^4 x\cdot\sin^5 x dx$;

8.2 $\int \sin 3x\cdot\cos 10x dx$;

8. 3 $\int \frac{\sin 3x}{\cos x-3}dx$;

8.4 $\int \frac{dx}{\sin^2 x+4\cos^2 x}$;

8.5 $\int \sin^4 x\cdot\cos^4 x dx$;

8.6 $\int tg^5 x dx$;

8.7 $\int \frac{dx}{1-\sin x}$;

8.8 $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$;

8.9 $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$;

8.10 $\int \cos x\cdot\cos 3x dx$;

8.11 $\int \cos^4 2x dx$;

8.12 $\int \frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx$;

8.13 $\int \sin x\cdot\sin 5x dx$;

8.14 $\int \sin^3 2x\cdot\cos^3 2x dx$;

8.15 $\int \frac{dx}{5\cos^2 x-1}$;

8.16 $\int \frac{dx}{3\sin x-5\cos x+4}$;

8.17 $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$;

8.18 $\int \frac{2-\sin}{2+\cos x}dx$;

8.19 $\int \sin^7 x dx$;

8.20 $\int \sin 4x\cdot\sin 6x dx$;

8.21 $\int \frac{\sin^3 x dx}{1+\cos x}$;

8.22 $\int \sin^4 2x dx$;

8.23 $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$;

8.24 $\int tg^4 x dx$;

8.25 $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x}$;

8.26 $\int \sin 2x\cdot\cos^2 x dx$;

8.27 $\int ctg^3 3x dx$;

8.28 $\int \cos^7 x dx$;

8.29 $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;

8.30 $\int \sin^3 x\cdot\cos^4 x dx$.

Справочный материал

Пропорция

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a и b крайние члены; b, c − средние, основное свойство пропорции $a \cdot d = b \cdot c$

Модуль − абсолютная величина действительного числа.

$$|a| = \begin{cases} a, & если\ a \ge 0, \\ -a, & если\ a \le 0. \end{cases}$$

$а)$ Свойство модуля:

1) $|-a| = |a|$
2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3) $|a|^2 = a^2$
4) $|a+b| \le |a| + |b|$
5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
6) $|a-b| \ge |a| - |b|$

$б)$ Если $|x| \le a$, то $-a \le x \le a$.

Если $|x| \ge a$, то $x \ge a;\ x \le -a$.

$в)$ $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|,\ n \in N, n \ne 1$

Свойства степеней и действия с корнями

Пусть $a \ge 0,\ a^n = a \cdot a \cdot a......a$

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
7) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
8) $\sqrt{a^2} = |a| = \pm a$
9) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
10) $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$
11) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
12) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$
13) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
14) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
15) $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
16) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
17) $a^0 = 1$
18) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
19) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Квадратные уравнения

$ax^2 + bx + c = 0,\ a \ne 0$.

$а)$ Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то корни $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то корни $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, то корней нет.

б) $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$ − теорема Виета.

в) $ax^2 + 2kx + c = 0,\ \ x_{1,2} = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$.

г) $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$.

Формулы сокращенного умножения

а) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

б) $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

в) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

г) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\cdot(a^2 \mp ab + b^2)$

Логарифмы

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a ($a > 0$; $a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить b:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Свойства логарифмов.

Пусть $a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $c > 0$; p, q − любые действительные числа.

1) $\log_a a = 1$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

5) $\log_a b^p = p\log_a b$

6) $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q}\log_a b$

7) $\log_{a^q} b^p = \dfrac{p}{q}\log_a b$

8) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

9) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

10) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

Тригонометрия

Основные тождества

1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$;

2) $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

3) $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

4) $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

5) $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

6) $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

7) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$;

8) $\cos ec\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

Формулы приведения

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$;
3) $tg\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp ctg\,\alpha$;
4) $ctg\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp tg\,\alpha$;
5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$;
6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$;
7) $tg\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp ctg\,\alpha$;
8) $ctg\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp tg\,\alpha$;
9) $\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$;
10) $\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$;
11) $tg(\pi\pm\alpha)=\pm tg\,\alpha$;
12) $ctg(\pi\pm\alpha)=\pm ctg\,\alpha$.

Формулы половинного аргумента

1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$;
2) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$;
3) $tg\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
4) $ctg\,\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Формулы понижения степени

1) $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;
2) $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;
3) $\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$;
4) $\cos^3\alpha=\frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$.

Формулы для суммы и разности аргументов

1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$;
2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$;
3) $tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\,\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\,\alpha\cdot tg\beta}$;
4) $ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\,\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\beta\pm ctg\,\alpha}$.

Формулы кратных аргументов

1) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$;
2) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\cdot tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$;
3) $tg\,2\alpha=\frac{2\cdot tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2}{ctg\,\alpha-tg\,\alpha}$;
4) $ctg\,2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2\cdot ctg\,\alpha}=\frac{ctg\,\alpha-tg\,\alpha}{2}$;
5) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;
6) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;
7) $tg\,3\alpha=\frac{3\cdot tg\,\alpha-tg^3\alpha}{1-3\cdot tg^2\alpha}$;
8) $ctg\,3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3\cdot ctg\,\alpha}{3\cdot ctg^2\alpha-1}$.

Формулы, выражающие тригонометрические функции через тангенс половинного аргумента

1) $\sin\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

2) $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $tg\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $ctg\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{2tg\dfrac{\alpha}{2}}$.

Формулы суммы и разности тригонометрических функций

1) $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

3) $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $tg\alpha \pm tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$;

6) $ctg\alpha \pm ctg\beta = \pm\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;

6) $tg\alpha + ctg\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\sin\beta}$;

8) $ctg\alpha - tg\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\cos\beta}$;

9) $tg\alpha + ctg\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$;

10) $tg\alpha - ctg\alpha = -2ctg2\alpha$;

11) $\cos\alpha+\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

12) $\cos\alpha-\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Произведения тригонометрических функций

1) $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

2) $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;

3) $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$;

4) $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$;

5) $tg\alpha\cdot tg\beta = \dfrac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta}$;

6) $ctg\alpha\cdot ctg\beta = \dfrac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$;

7) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta-\cos^2\alpha$;

8) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta-\sin^2\alpha$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горлач, Б.А. Математический анализ [Текст] : учеб. пособие / Б.А. Горлач. – СПб. : Лань, 2013. – 600, [8] с. – (Учебники для вузов. Специальная литература)

2. Высшая математика для экономического бакалавриата [Текст] : учебник и практикум; рек. М-вом образ. РФ / под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 4-е изд., пер. и доп. – М. : Юрайт, 2012. – 909, [3] с. – (Бакалавр. Углубленный курс)

3. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление. Лекции и практикум [Текст] : учеб. пособие; доп. М-вом образ. РФ / под общ. ред. И. М. Петрушко. – 3-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 288 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература)

4. Бараненков А.И., Богомолова Е.П., Петрушко И.М. «Сборник задач и типовых расчётов по высшей математике», 1-е изд., СПБ.: Издательство «Лань», 2009. – 240 с.

5. Соловьёв И.А., Шевелев В.В., Червяков А.В., Репин А.Ю. Практическое руководство к решению задач по высшей математике – СПБ.: Издательство «Лань», 2009 – 320 с.

6. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ. Производная и ее приложения [Текст]: учеб. пособие; рек. Науч.- метод. советом М-ва образ. РФ / А.И. Соловьев [и др.].-2-е изд., испр.- СПб.: Лань, 2009.- 320 с.

7. Виленкин, И. В. Высшая математика: линейная алгебра: аналитическая геометрия: дифференциальное и интегральное исчисление [Текст] / И. В.

8. Виленкин, В. М. Гробер. – 6-е изд. –Ростов н/Д : Феникс, 2011. – 415, [1] с.

СОДЕРЖАНИЕ

Оглавление

Лицензия ЛР 020427 от 25.04.1997 г.
Подписано к печати 30.06.2014 г. Формат 70×100/16.
Уч.-изд.л. – 2,4. Усл.-п.л. – 3,5.
Тираж 150 экз. Заказ 203.

Отпечатано в отделе оперативной полиграфии издательства ДальГАУ
675005, г. Благовещенск, ул. Политехническая, 86